Departamento de Matemática

Sistemas e Tecnologias de Georreferenciação
Geodesia Física e Espacial

Ano Lectivo 11/12

Data limite de entrega: 28/10/2011

Lab 02: Projecções cartográficas

(Ver 1.2/Out-11)

1. Objectivos:

Estudo das projecções cartográficas utilizadas nos sistemas de referência portugueses.

2. Dados e Recursos:

Os dados para efectuar este estudo consistem em:

1. Coordenadas geográficas de alguns pontos definidos num determinado datum

Os recursos para efectuar este estudo consistem em:

1. Software Transcord Pro
2. Folha de cálculo (Excel ou Calc do OpenOffice)

3. Projecções Cartográficas

Introdução

O conceito de informação geográfica está intimamente ligado ao sistema de coordenada utilizado para posicionar a informação no espaço geográfico (normalmente a superfície da Terra).

Uma projecção cartográfica é definida á custa duma função (ou funções) que transforma (ou projecta) a superfície geográfica (elipsóide) num plano cartesiano, isto é

onde são as coordenadas geográficas num dado datum geodésico e as coordenadas cartesianas ou rectangulares num dado plano cartográfico. Estas últimas coordenadas são também designadas por coordenadas cartográficas e representam as distâncias do ponto em questão aos dois eixos ortogonais X,Y.

A necessidade de projecções cartográficas resulta do facto de se pretender por vários motivos uma representação plana da superfície curva do elipsóide: por exemplo a utilização de cartas em suporte plano, o cálculo de distâncias euclidianas entre pontos geográficos, etc.

As projecções cartográficas podem ser classificadas quanto à:

- Propriedades
  - Conformes - a escala é independente da direcção (exemplo: Mercator)
  - Equivalentes - as proporções entre todas as áreas são conservadas (exemplo: Bonne)
  - Afiláticas - quando não são nem conformes nem equivalentes (exemplo: Miller)
  - Equidistantes - quando a escala principal é conservada ao longo de determinadas linhas (exemplo: cilíndrica equidistante)
  - Azimutais - quando os azimutes são conservados a partir de determinados pontos
- Superfície de projecção. Em função do tipo de superfície em que se apoiam as projecções classificam-se em
  - Cilíndricas (cilindro)
  - Cónicas (cone)
  - Azimutais (plano)

As duas projecções cartográficas comummente recomendadas pela **EuroGeographics** são: a Transversa de Mercator para escalas superiores a 1 : 500 000 e a cónica conforme de Lambert, com dois paralelos de escala conservada, para escalas inferiores a 1 : 500 000.

Deformações

Convergência dos meridianos

Um conceito muito importante das projecções cartográficas é a definição da direcção do norte, o qual é utilizado como referência de orientação das direcções no plano cartográfico. Na superfície terrestre a direcção do norte, designado por norte geográfico, é a direcção do meridiano do local, ou por outras palavras, a direcção da linha geodésica[1] que nos levaria ao pólo norte geográfico.

Deformações lineares

O módulo da deformação linear é dado pelo quociente entre um comprimento ΔS no plano e o respectivo comprimento no elipsóide.

$$k = \frac{\Delta S_{plano}}{\Delta S_{elipsóide}}$$

Como se trata dum conceito infinitesimal este módulo é definido para cada ponto com um comprimento tendente para zero.

Deformações angulares

Contrariamente ao que acontece nas medidas lineares (distâncias) existem projecções cartográficas (as conformes) que mantêm o ângulo entre duas direcções no elipsóide e o ângulo entre as correspondentes direcções projectadas no plano cartográfico.

Projecção Cilíndrica

Projecção transversa de mercator

A projecção transversa de Mercator (TM - Transverse Mercator) é também conhecida por projecção de Gauss ou de Gauss-Kruger. Pelo facto de ser a projecção mais utilizada em Portugal, é importante quais são os parâmetros que a definem e as deformações que ela provoca.

Os cinco parâmetros que definem esta projecção são:

- Meridiano central (λ_0) - é o meridiano central da área (país) a representar, ou seja a reduzir a longitude nas fórmulas de transformação

$$X = f_1(\lambda - \lambda_0, \phi)\ ;\ Y = f_2(\lambda - \lambda_0, \phi)$$

- Factor escala no meridiano central (κ_0) - neste caso as formulas anteriores serão dadas por

$$X = \kappa_0 \times f_1(\lambda - \lambda_0, \phi)\ ;\ Y = \kappa_0 \times f_2(\lambda - \lambda_0, \phi)$$

- Ponto central (ϕ_0) -

$$X = \kappa_0 \times f_1(\lambda - \lambda_0, \phi)\ ;\ Y = \kappa_0 \times f_2(\lambda - \lambda_0, \phi) - \kappa_0 \times f_2(0, \phi_0)$$

- Translação de origem ($\Delta E, \Delta N$) -

$$X = \kappa_0 \times f_1(\lambda - \lambda_0, \phi) + \Delta E;\ Y = \kappa_0 \times f_2(\lambda - \lambda_0, \phi) - \kappa_0 \times f_2(0, \phi_0) + \Delta N$$

Projecção directa

Dadas as coordenadas geodésicas num determinado *datum*, o qual está associado a um dado elipsóide de referência com semi-eixos *a* e *b* (ou equivalentemente semi-eixo *a* e achatamento *e*), iremos calcular as coordenadas cartográficas (X,Y) relativas a uma projecção cartográfica (a projecção de Gauss ou transversa de Mercator) a um ponto central (ϕ_0, λ_0) e a um factor escala definido para o meridiano central (κ_0).

Em primeiro lugar começaremos por calcular um conjunto de parâmetros do elipsóide em causa (f é o achatamento, e^2 é a primeira excentricidade

$$f = 1 - \frac{b}{a};\ \ e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} = 2f - f^2;\ \ n = \frac{f}{2 - f}$$

$$A_0 = 1 + \frac{n^2}{4} + \frac{n^4}{64};\ \ A_2 = \frac{3}{2}\left(n - \frac{n^3}{8}\right);\ \ A_4 = \frac{15}{16}\left(n^2 - \frac{n^4}{4}\right);\ A_6 = \frac{35}{48}n^3;\ A_8 = \frac{315}{512}n^4$$

---

[1] A geodésica é a linha mais curta entre dois pontos traçada sobre a superfície

De seguida calculamos a grande normal N e o comprimento do arco de meridiano S, o raio de curvatura no meridiano ρ

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi}}; \;\; S(\phi) = \frac{a}{1+n}[A_0\phi - A_2 \sin(2\phi) + A_4 \sin(4\phi) - A_6 \sin(6\phi) + A_8 \sin(8\phi)]$$

$$\rho = \frac{a(1-e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \phi)^{\frac{3}{2}}}$$

Finalmente as coordenadas cartográficas serão:

$$X = \kappa_0 N \left[(\lambda - \lambda_0) \cos\phi + \frac{(\lambda-\lambda_0)^3 \cos^3\phi}{6}(1 - t^2 + \eta^3) + \frac{(\lambda-\lambda_0)^5 \cos^5\phi}{6}(5 - 18t^2 + t^4 + 14\eta^2 - 58t^2\eta^2) \right]$$

$$\begin{aligned} Y = k_0[\, S(\phi) - \, S(\phi_0)] \\ + k_0 N \left[\frac{(\lambda-\lambda_0)^2 \sin\phi\cos\phi}{2} + \frac{(\lambda-\lambda_0)^4 \sin\phi\cos^3\phi}{24}(5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^2) \right. \\ \left. + \frac{(\lambda-\lambda_0)^6 \sin\phi\cos^5\phi}{24}(61 - 58t^2 + t^4 + 270\eta^2 - 330t^2\eta^2) \right] \end{aligned}$$

onde:

- $t = \tan\phi$,
- $\eta = \frac{N}{\rho}$

No caso de existir, adicionalmente, uma falsa origem, i.e. uma translação definida pelo vector de componentes $(\Delta X_0, \Delta Y_0)$, será necessário corrigir as coordenadas cartográficas obtidas pelas expressões anteriores destas quantidades.

O coeficiente de deformação linear e a convergência dos meridianos podem ser calculados a partir de:

$$\kappa = \kappa_0 \left[1 + \frac{\lambda^2 \cos^2\phi}{2}(1+\eta^2) + \frac{\lambda^4 \cos^4\phi}{2}(5 - 4t^2) \right] \approx \kappa_0 \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{a}\right)^2 \right]$$

$$\gamma = \lambda \sin\phi \left[1 + \frac{\lambda^2 \cos^2\phi}{3}(1 + 3\eta^2 + 2\eta^4) \right]$$

Projecção inversa

Na projecção inversa pretende-se calcular as coordenadas geodésicas a partir do conhecimento das coordenadas cartográficas:

$$\begin{aligned} \phi = \phi_1 - \frac{t}{2}(1+\eta^2)\left(\frac{X}{\kappa_0 N}\right)^2 + \frac{t}{24}(5 + 3t^2 + 6\eta^2 - 6t^2\eta^2 - 3\eta^4 - 6t^2\eta^4)\left(\frac{X}{\kappa_0 N}\right)^2 \\ - \frac{t}{720}(61 + 90t^2 + 45t^4 + 107\eta^2 - 162t^2\eta^2 - 45t^4\eta^2)\left(\frac{X}{\kappa_0 N}\right)^6 \end{aligned}$$

e

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{1}{\cos\phi_1}\left[\frac{X}{\kappa_0 N} - \frac{1}{6}(1 + 2t^2 + \eta^2)\left(\frac{X}{\kappa_0 N}\right)^3 + \frac{1}{120}(5 + 28t^2 + 24t^4 + 6\eta^2 + 8t^2\eta^2)\left(\frac{X}{\kappa_0 N}\right)^5 \right]$$

Nestas duas expressões todos elementos são calculados para a latitude ϕ_1, ou seja, a latitude do ponto sobre o meridiano central para o qual se tem $S(\phi) = \frac{Y}{\lambda_0}$, onde Y é a distância do ponto ao equador (i.e. a coordenada Y depois de removida do efeito da translação da origem). Para calcularmos o seu valor podemos utilizar um método iterativo para resolvermos a equação:

$$\frac{Y}{\kappa_0} = \frac{a}{1+n}A_0\phi_1 + [A_0\phi_1 - A_2 \sin(2\phi_1) + A_4 \sin(4\phi_1) - A_6 \sin(6\phi_1) + A_8 \sin(8\phi_1)]$$

Para aproximação inicial de ϕ_1 podemos utilizar o primeiro termo da equação anterior, i.e.

$$\phi_1 = \frac{Y(1+n)}{aA_0\kappa_0}$$

4. Tarefas a realizar

4.1. Cálculo das coordenadas de pontos do elipsóide utilizando o programa transcoord pro

Exercício 1: Dadas as coordenadas geodésicas do vértice Melriça (TF4) no elipsóide do ETRS89 (Elipsóide GRS80) calcule as coordenadas planas do ponto utilizando a projecção Transversa de Mercator (TM06) para o território nacional

Ponto	λ	ϕ	h
TF4	8º07'48,5274"W	39º41'38,9042"	650,43

Nota: No sistema de referência PT-TM06/ETRS89 a projecção transversa de Mercator é dada por

- Elipsóide de referência: GRS80
  - Semi-eixo maior: a = 6 378 137 m
  - Achatamento: f = 1 / 298,257 222 101
- Projecção cartográfica: Transversa de Mercator
- Latitude da origem das coordenadas rectangulares: 39º 40’ 05’’,73 N
- Longitude da origem das coordenadas rectangulares: 08º 07’ 59’’,19 W
- Falsa origem das coordenadas rectangulares:
  - Em M (distância à Meridiana): 0 m
  - Em P (distância à Perpendicular): 0 m
- Coeficiente de redução de escala no meridiano central: 1,0

Exercício 2: Repita o exercício anterior utilizando desta vez uma folha de cálculo (Excel ou Calc do OpenOffice).

Exercício 3: Calcule as coordenadas rectangulares do vértice geodésico Cruz de Morouços

4.2 Implementação da projecção transversa de Mercator numa função MatLab (ou Python)[2].

Exercício 4: Escreva uma função que execute a projecção transversa de Mercator (directa e inversa).

5. Elementos a entregar

1. Respostas ao exercícios anteriores
2. Os ficheiros com as folhas de cálculo (ou programas em MatLab ou Python)[2].

Bibliografia

José Alberto Gonçalves. Sérgio Madeira João J. Sousa. Topografia - Conceitos e Aplicações. LIDEL 2005.

J C ILIFFE. Datums and Map Projections. CRC Press. 2000

Joaquim Alves Gaspar. Cartas e Projecções Cartográficas. LIDEL 2005.

Map Projections for Europe. European Commission. Joint Research Centre. 2001. Eur 20120 En.

[2] Se aplicável.