

## 1. Objectivos:

---

Avaliar a qualidade posicional horizontal das imagens de alta resolução do Google Earth por comparação com a cartografia 1:10k de Coimbra

## 2. Dados<sup>1</sup>:

---

Os dados para efectuar este estudo consistem em:

1. Imagens Google Earth
2. Cartografia 1:10k da cidade de Coimbra

## 3. Tarefas a realizar

---

1. Avaliar a qualidade posicional horizontal das imagens Google Earth de Coimbra em termos de erro circular com um nível de confiança de 90% (CE90).
2. Comparar os resultados obtidos anteriormente com as especificações de exactidão e precisão posicionais para a ortocartografia nas escalas 1K, 2k, 5k e 10k, dados na tabela em anexo.

## 4. Elementos a entregar

---

1. Relatório do trabalho efectuado. Utilize a seguinte estrutura para o seu relatório:
  - Introdução
  - Metodologia
  - Resultados
  - Conclusões
2. Anexos com os pontos de controlo e suas coordenadas

**Sugestão: Consulte a seguinte referência.**

Potere D. Horizontal positional accuracy of Google Earth's high-resolution imagery Archive. Sensors. 2008;8:7973–7981. doi: 10.3390/s8127973.

---

<sup>1</sup> Extratos dos dados relativos a este TPC podem ser obtidos em <http://www.mat.uc.pt/~gil/downloads/>

## 5. Medidas de avaliação da qualidade

---

### Aplicação da teoria dos erros na definição de precisão posicional de imagens de satélite georeferenciadas

#### Resumo

Uma das contribuições mais úteis da teoria dos erros são os índices (métricas) de precisão, os quais definem a distribuição dos erros e especificam a probabilidade do erro verdadeiro de uma dada quantidade não excede um determinado valor. Neste estudo iremos utilizar a teoria dos erros, definida no contexto das probabilidades e estatística, para definirmos algumas métricas de precisão posicional de informação georeferenciada. Iremos analisar em detalhe a distribuição normal dos erros lineares (1D) dado que as distribuições bidimensional (2D) e tridimensional (3D) dos erros são mais facilmente analisadas estatisticamente pelo tratamento das componentes individuais. Como os princípios da distribuição linear dos erros se aplicam apenas a erros aleatórios independentes, assume-se que os erros sistemáticos foram eliminados ou reduzidos suficientemente para permitirem o tratamento como erros aleatórios. Os procedimentos propostos para o cálculo dos erros circulares ou esféricos a partir dos erros lineares nas direcções  $x$  e  $y$  ou  $x, y$  e  $z$ , respectivamente assentam no cálculo da média dos erros lineares nestas direcções.

Keywords: Índices de precisão, Erro linear, Erro circular, Erro Elíptico, Erro esférico e Erro Elipsoidal

1 Erros lineares (1D).....	2
1.1 Introdução .....	2
1.2 Classes de erros .....	3
1.3 Conceitos básicos de probabilidades .....	3
1.4 Distribuição normal de uma variável aleatória contínua .....	3
1.5 Aplicação da função de densidade de probabilidade a erros aleatórios .....	4
1.6 Índices de precisão .....	5
1.7 Factores de conversão.....	6
1.8 Propagação dos erros .....	7
1.9 Exemplos de erros lineares .....	7
2 Erros circulares e elípticos (2D).....	7
2.1 Introdução .....	7
2.2 Erros elípticos.....	8
2.3 Erros circulares.....	8
2.3.1 Função circular de distribuição de probabilidade .....	8
2.3.2 Índices de precisão circular .....	9
3 Erros esféricos e elipsoidais (3D).....	11
4 Aplicação da teoria dos erros à precisão posicional da geo-informação.....	11
4.1 Erros posicionais .....	11
Bibliografia.....	11
Anexo 1: Derivação e solução da função de distribuição de probabilidade bidimensional.....	11

#### Erros lineares (1D)

##### Introdução

Em várias actividades das ciências fotogramétricas, geodésicas e cartográficas é necessário a medição de quantidades físicas e a utilização destas medidas em outros procedimentos. Independentemente da precisão do instrumento utilizado para efectuar estas medidas, não existe nenhum instrumento de medida ou método que forneça o verdadeiro valor da quantidade medida. As imperfeições de índole tecnológica (mecânica, óptica, electrónica) dos instrumentos de medição e as limitações introduzidas pelo factor humano são tais que medições repetidas da mesma quantidade produzem valores diferentes. As variações observadas nos sucessivos valores de uma dada quantidade são causadas pelos erros nas observações. O erro verdadeiro de cada observação será dado pela diferença se

## Classes de erros

Os erros presentes nas observações podem ser agrupados relativamente à sua origem em:

- erros grosseiros (*blunders*):
- erros sistemáticos (*systematic*)
- erros aleatórios (*random*)

A probabilidade de um dado erro aleatório não exceder um determinado valor pode ser inferida pela análise da distribuição normal ou Gaussiana de um número infinito de variáveis aleatórias.

## Conceitos básicos de probabilidades

A probabilidade é definida como a frequência da ocorrência em proporção ao número das ocorrências possíveis, ou simplesmente como o quociente entre o número de acertos e o número de lançamentos. Sejam A e B dois eventos completamente independentes. Designemos por P(A) a probabilidade do evento A e P(B) a probabilidade do evento B. A probabilidade de qualquer evento acontecer deve estar entre zero e um: a probabilidade zero significa que um dado evento nunca acontecerá, a probabilidade um significa que um determinado evento acontecerá sempre em cada lançamento. Por exemplo, a probabilidade de termos o número 7 num lançamento de um dado é 0.0, as a probabilidade de termos um número entre 0 e 6 é 1.0.

As regras básicas da teoria das probabilidades são:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

- $1 - P(A)$  = representa a probabilidade de um evento não acontecer
- $P(A \text{ ou } B) = P(A) + P(B)$  representa a probabilidade de ocorrência de um de dois eventos
- $P(A \text{ e } B) = P(A) \cdot P(B)$  representa a probabilidade de dois eventos ocorrerem simultaneamente

Exemplo: A figura 1 mostra as probabilidades de ocorrência

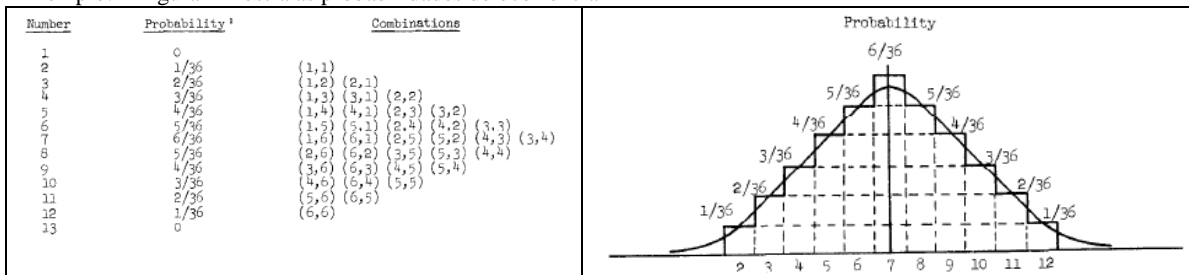


Figura 1: Probabilidades do número para um lançamento de dois dados

## Distribuição normal de uma variável aleatória contínua

A área debaixo da curva de densidade de probabilidade normal representa a probabilidade total da ocorrência da variável aleatória contínua  $\bar{x}^2$  e é igual a um, ou 100%. A expressão

$$p(\bar{x}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\bar{x}-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (1)$$

Onde,

- $\bar{x}$  é a variável aleatória
- $\mu$  um parâmetro representando o valor médio da variável x
- $\sigma$  um parâmetro representando o desvio padrão, que é uma medida da dispersão da variável aleatória em torno da média.

Os parâmetros são calculados a partir de um número infinito de variáveis aleatórias:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{x}_i^2}{n} \quad (2)$$

e

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\bar{x}_i - \mu)^2}{n}} \quad (3)$$

Onde n é o número de variáveis aleatórias ( $n \rightarrow \infty$ )

<sup>2</sup> Não confundir esta notação com a notação utilizada para representar o valor médio

A função de **distribuição** de probabilidade normal determina a probabilidade que uma variável aleatória assumirá um dado valor dentro de um determinado intervalo e é derivada da função **densidade** de distribuição normal pela integração entre os limites do intervalo desejado. Assumindo os limites do intervalo entre  $-\infty$  e  $X$  vem:

$$P(\bar{x}) = \int_{-\infty}^x p(\bar{x})d\bar{x} = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\bar{x}-\mu)^2}{2\sigma^2}} d\bar{x} \quad (4)$$

O valor de  $P(\bar{x})$  varia entre 0 e 1 tal como está ilustrado na figura 2-b seguinte.

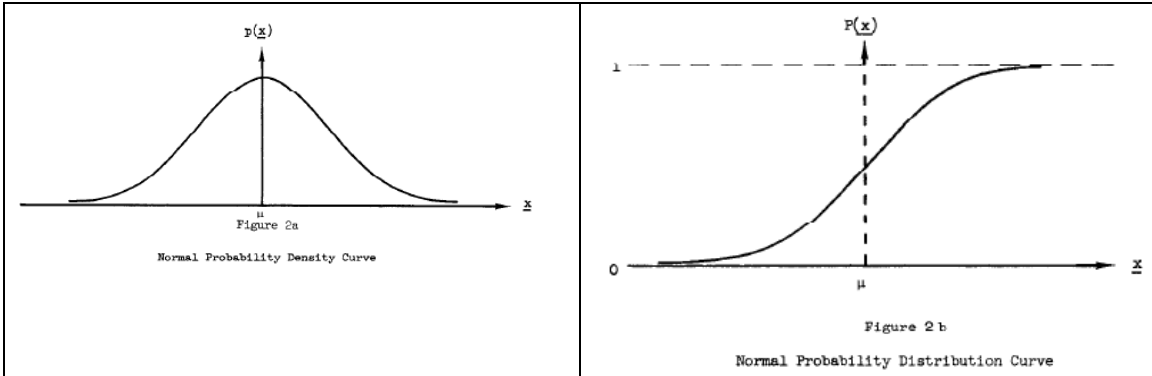


Figura 2: a) Curva densidade de probabilidade normal; b) Curva da distribuição de probabilidade normal

### Aplicação da função de densidade de probabilidade a erros aleatórios

A curva de densidade de probabilidade de um número infinito (ou seja, a população) de medições de uma quantidade  $X$  é expressa por parâmetros análogos aos da equação (1). O valor verdadeiro  $\mu_X$  é a média da distribuição dos valores observados  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . A curva representada na figura 3 é descrita pela equação

$$p(X_i) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(X_i-\mu_X)^2}{2\sigma^2}} \quad (5)$$

onde

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_X)^2}{n}}$$

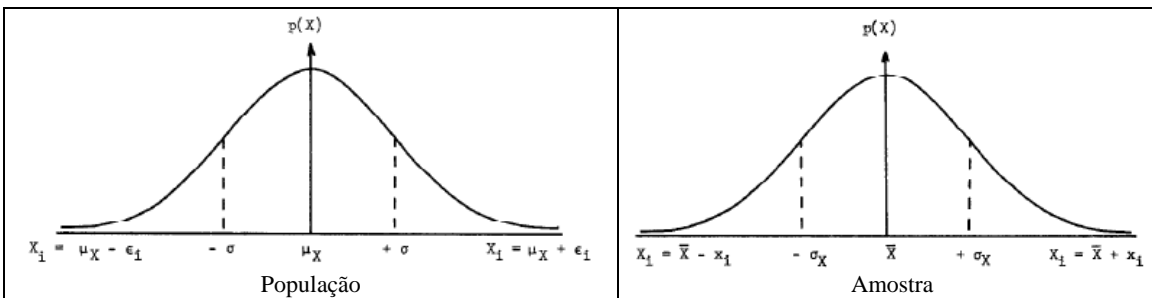


Figura 3: Curva densidade de probabilidade normal dos valores observados

A curva de densidade de probabilidade dos erros tem média zero<sup>3</sup> e a sua forma é idêntica à dos valores observados. A curva representada na figura 4 é descrita pela equação:

$$p(\epsilon) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\epsilon^2}{2\sigma^2}}$$

onde

-  $\epsilon = X_i - \mu_X$  é o erro verdadeiro

<sup>3</sup> Note-se que os erros sistemáticos foram eliminados das observações

-  $\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \epsilon_i^2}{n}}$  é o desvio padrão dos erros, que designaremos por erro padrão

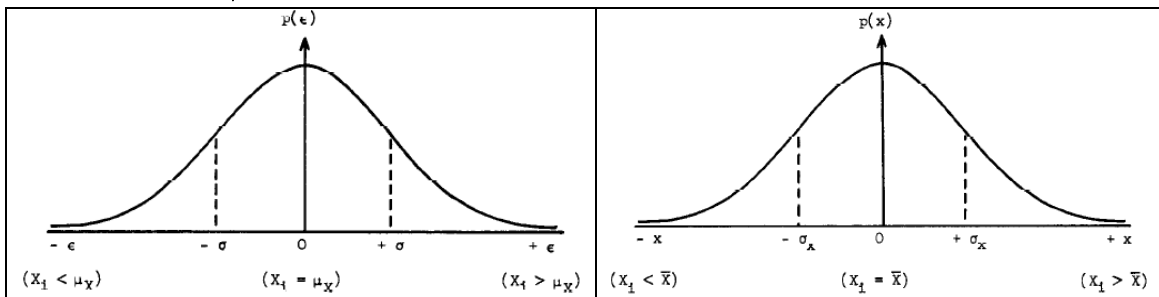


Figura 4: Curva de densidade de probabilidade normal dos erros

Dado que o verdadeiro valor de uma quantidade não pode ser observado e que é impraticável efectuar um número infinito de observações, os valores estimados, obtidos a partir de um número finito de medições, isto é de uma amostra, deverão ser substituídos pelo valor verdadeiro e pelos parâmetros da função densidade. O valor mais provável ( $\bar{X}$ ) aproxima o valor verdadeiro e é determinado a partir da média aritmética dos valores observados:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$$

O valor verdadeiro é aproximado pelo resíduo  $x$ , designado aqui por erro e definido pela diferença entre o valor observado e o valor mais provável:

$$x = X_i - \bar{X}$$

O erro padrão calculado a partir da amostra ( $\sigma_x$ ) e identificado pelo subscripto é dado por:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{x^2}{n-1}}$$

A função densidade de probabilidade dos erros será dada por:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}}$$

Como os parâmetros  $\bar{X}$  e  $\sigma_x$  podem assumir valores diferentes em função da amostra que é seleccionada da população, são portanto variáveis aleatórias e com dispersão expressa por parâmetros semelhantes. O erro padrão da média  $\sigma_{\bar{X}}$  e o erro padrão do erro padrão  $\sigma_{\sigma}$  indicam a fiabilidade (*reliability*) da estimativa:

$$\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n(n-1)}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$$

e

$$\sigma_{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{2(n-1)^2}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{2(n-1)}}$$

## Índices de precisão

Um índice de precisão mostra a dispersão dos erros em torno do zero e reflete a magnitude limite do erro para várias probabilidades. Por exemplo, 50% dos erros numa dada série de medições não excedem  $\pm 20\text{cm}$ ; 90% não excedem  $\pm 49\text{cm}$ . Apesar de serem dados diferentes erros, cada um deles expressa a mesma precisão do processo de medição (figura 5). O erro padrão e o erro médio ( $\eta$ ) são dois índices comumente utilizados e que podem ser deduzidos teoricamente. Outros índices utilizados são os três níveis de probabilidade os quais são de facto índices de precisão:

- erro provável (PE-probable error)

- precisão padrão do mapa (MAS-map accuracy standard)
- erro 3 sigma ( $3\sigma$ )

O erro padrão é um dos índices de precisão mais importantes e tem a probabilidade:

$$P(x) = \int_{-\sigma_x}^{+\sigma_x} p(x)dx = 0.6827$$

Ou seja 68.27% dos erros ocorrem dentro do intervalo  $\pm\sigma_x$ .

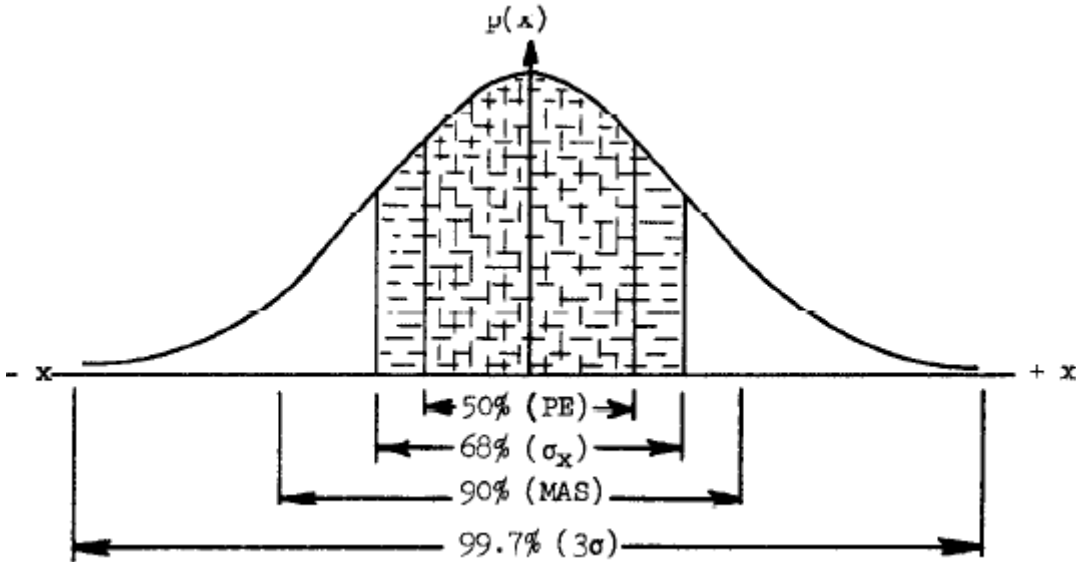


Figura 5: Áreas de probabilidade

O erro médio (average error) é definido como a média da soma dos valores absolutos de todos os erros:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^n |X_i - \bar{X}|}{n} = \frac{\sum_i |x_i|}{n}$$

A probabilidade representada pelo erro médio é 0.5751 ou 57.51%. O erro médio pode ser calculado facilmente a partir do erro padrão através de:

$$\eta = 0.7979\sigma_x$$

O erro provável é o erro para o qual 50% de todos os erros numa distribuição linear não o excedem. É expresso matematicamente por

$$PE = \int_a^b p(x)dx = 0.50$$

O erro provável pode ser calculado a partir do erro padrão utilizando a expressão:

$$PE = 0.6745 \sqrt{\frac{\sum x^2}{n-1}} = 0.6745\sigma_x$$

A instituição U.S. National Map Accuracy Standards especifica que não mais do 10% dos erros da altitude (um erro unidimensional) numa carta topográfica deverão ultrapassar um dado valor limite. Os padrões são comumente interpretados como o limite da amplitude do erro que 90% das altitudes não deverão ultrapassar. Consequentemente o MAS (map accuracy standard) é dado por

$$MAS = \int_a^b p(x)dx = 0.90$$

Este valor pode ser calculado a partir do erro padrão através de:

$$MAS = 1.6449\sigma_x$$

Tal como o nome indica o erro  $3\sigma$  é um erro cuja magnitude é três vezes superior à magnitude do erro padrão. Este erro tem interesse porque a probabilidade quase- certa – 0.9973 ou 99.73%

### Factores de conversão

Uma vez que todos os índices de precisão estão relacionados com o desvio padrão (tabela 1) os factores calculados a partir desta relação convertem a probabilidade do erro em outra probabilidade (tabela2)

Tabela 1:

Índice	Probabilidade	Expressão
PE	0.5000	$0.6745\sigma_x$
$\eta$	0.5751	$0.7979\sigma_x$
$\sigma_x$	0.6827	$1.0000\sigma_x$
MAS	0.9000	$1.6449\sigma_x$
$3\sigma$	0.9973	$3.0000\sigma_x$

Tabela 2: Factores de conversão lineares

	50.00%	57.51%	68.27%	90.00%	99.73%
50.00%	<b>1.0000</b>	<b>1.1830</b>	<b>1.4826</b>	<b>2.4387</b>	4.4457
57.51%	<b>0.8453</b>	<b>1.0000</b>	<b>1.2533</b>	<b>2.0615</b>	3.7599
68.27%	<b>0.6745</b>	<b>0.7979</b>	<b>1.0000</b>	<b>1.6449</b>	3.0000
90.00%	<b>0.4101</b>	<b>0.4851</b>	<b>0.6080</b>	<b>1.0000</b>	1.8239
99.73%	0.2248	0.2660	0.3333	0.5483	1.0000

## Propagação dos erros

Seja  $f$  uma quantidade calculada a partir de duas quantidades medidas  $a$  e  $b$ :  $f(a, b)$ . O erro  $\Delta f$  de  $f$  é afectado pelos erros em ambas as variáveis  $a$  e  $b$ :  $\Delta a$  e  $\Delta b$ . Assumindo que  $a$  e  $b$  são independentes e que os erros  $\Delta a$  e  $\Delta b$  são aleatoriamente distribuídos, o erro combinado  $\Delta f$  pode ser calculado utilizando a expressão

$$\sigma_f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial b}\right)^2 \sigma_b^2}$$

Onde

- $\sigma_f, \sigma_a, \sigma_b$  são, respectivamente, os erros padrão em  $f, a$  e  $b$ .
- $\frac{\partial f}{\partial a}, \frac{\partial f}{\partial b}$  as derivadas parciais em relação a  $a$  e a  $b$

## Exemplos de erros lineares

Em Engenharia Geográfica existem vários casos da ocorrência de variáveis aleatórias. Por exemplo, as linhas de base, os ângulos medidos, os comprimentos observados e as cotas resultantes de operações de triangulação, nivelamento contêm erros. Assim os princípios da teoria dos erros podem ser utilizados para analisar os resultados em termos das especificações estabelecidas para os levantamentos. Assim, a distribuição normal do erro linear tem importantes aplicações relativamente à avaliação da exactidão da informação posicional. Além, dos erros uni-dimensionais que existem em dados posicionais tais como as altitudes as componentes do erro linear nas posições bidimensionais e tridimensionais podem ser analisadas por aplicação da distribuição normal do erro linear.

## Erros circulares e elípticos (2D)

### Introdução

Um erro bidimensional é um erro numa quantidade definida por duas variáveis aleatórias. Assumindo que os erros são aleatórios e independentes e que cada um deles tem a função de densidade de probabilidade

$$p(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}} \quad e \quad p(y) = \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}}$$

e aplicando a regra 4 do parágrafo função bidimensional de densidade de probabilidade é então dada por

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{y^2}{\sigma_y^2}\right)}$$

Reorganizando os termos vem que

$$2\pi\sigma_x\sigma_y p(x, y) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{y^2}{\sigma_y^2}\right)}$$

Ou seja

$$-2 \ln \left[ 2\pi\sigma_x\sigma_y p(x, y) \right] = \frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{y^2}{\sigma_y^2} \quad (6)$$

Para valores dados de p(x,y) o lado esquerdo da equação (6) é constante e será designado por k2. Assim

$$k^2 = \frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{y^2}{\sigma_y^2} \quad (7)$$

Para valores de p(x,y) a variar de 0 a  $\infty$  teremos uma família das elipses de igual densidade de probabilidade com eixos  $k\sigma_x$  e  $k\sigma_y$ .

Quando  $\sigma_x = \sigma_y$  a equação (6) virá:

$$-2\sigma_x^2 \ln \left[ 2\pi\sigma_x^2 p(x, y) \right] = x^2 + y^2 \quad (8)$$

Para um dado valor de p(x,y) o lado esquerdo da equação (8) é constante e é igual ao quadrado do raio de um círculo de igual densidade de probabilidade.

A função densidade de probabilidade integrada sobre uma dada região torna-se na função de distribuição de probabilidade a qual traduz a probabilidade de x e y ocorrerem simultaneamente nesta região, isto é:

$$P(x, y) = \iint p(x, y) dx dy$$

No entanto, como ambos os valores positivos e negativos quer de x como de y ocorrem com igual frequência, os erros podem ser considerados como erros radiais e serão designados por r, com

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

### Erros elípticos

A probabilidade de uma elipse é dada pela função de distribuição

$$P(x, y) = 1 - e^{-\frac{1}{2}k^2} \quad (9)$$

A solução da equação (9) com valores de k para diferentes probabilidades é dada na tabela. Para 39% de probabilidade os eixos da elipse são

Tabela : Valores da constante k

Probabilidade	K
39.35%	1.0000
50.00%	1.1774
63.21%	1.4142
90.00%	2.1460
99.00%	3.0349
99.78%	3.5000

A utilização da elipse de erro é complexa devido ao problema da orientação dos eixos e da propagação dos erros elípticos. Consequentemente as elipses de erro são habitualmente substituídas pela forma circular a qual é mais fácil de usar e compreender.

### Erros circulares

#### Função circular de distribuição de probabilidade

A função de distribuição de probabilidade do erro radial que expressa a probabilidade de r ser igual ou menor que o raio R, ou ainda a probabilidade do vector (x,y) estar contido dentro de um círculo de raio R é derivada no apêndice e é dada por:

$$P(R) = \frac{1}{\sigma_x\sigma_y} \int_0^R r e^{-\frac{r^2}{4\sigma_y^2} \left( 1 + \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2} \right)} I_0 \left[ \frac{r^2}{4\sigma_y^2} \left( \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2} - 1 \right) \right] dr$$

onde I é a função Bessel de ordem 0.

Um caso especial da função P(R) acontece quando  $r = R$  e  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_r = c$ . Então

$$P(R) = P_c = 1 - e^{-\frac{R^2}{2\sigma_c^2}} \quad (10)$$

Onde



- $P_c$  é a função circular de distribuição de probabilidade (um caso especial de P(R))
- R o raio do círculo de probabilidade
- $\sigma_c$  o erro padrão circular (um caso especial para  $\sigma_r = \sigma_x = \sigma_y$ )

Quando  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$  não são iguais, a função P(R) pode ser modificada fazendo  $a = \frac{\sigma_x}{\sigma_y}$  onde  $\sigma_x$  é o menor erro padrão dos dois.

### Índices de precisão circular

Os índices representados na figura 6 são medidas de dispersão dos erros numa dada distribuição e representam o erro que é improvável de ser excedido segundo uma dada probabilidade. Os índices de precisão escolhidos, consistentes com os índices utilizados nas distribuições lineares, são:

O erro padrão circular  $\sigma_c$

- O erro provável circular (CPE)
- A precisão standard circular do mapa (CMAS – circular map accuracy standard)
- O erro três ponto cinco sigma

A probabilidade do erro padrão circular é obtida resolvendo a equação (10) em ordem a  $P_c$  para  $\sigma_c = R$  isto é

$$P_c = 1 - e^{-\frac{\sigma_c^2}{2\sigma_c^2}} = 1 - e^{-\frac{1}{2}} = 0.3935$$

Para uma verdadeira distribuição circular, os erros padrão lineares são iguais e idênticos ao erro padrão circular

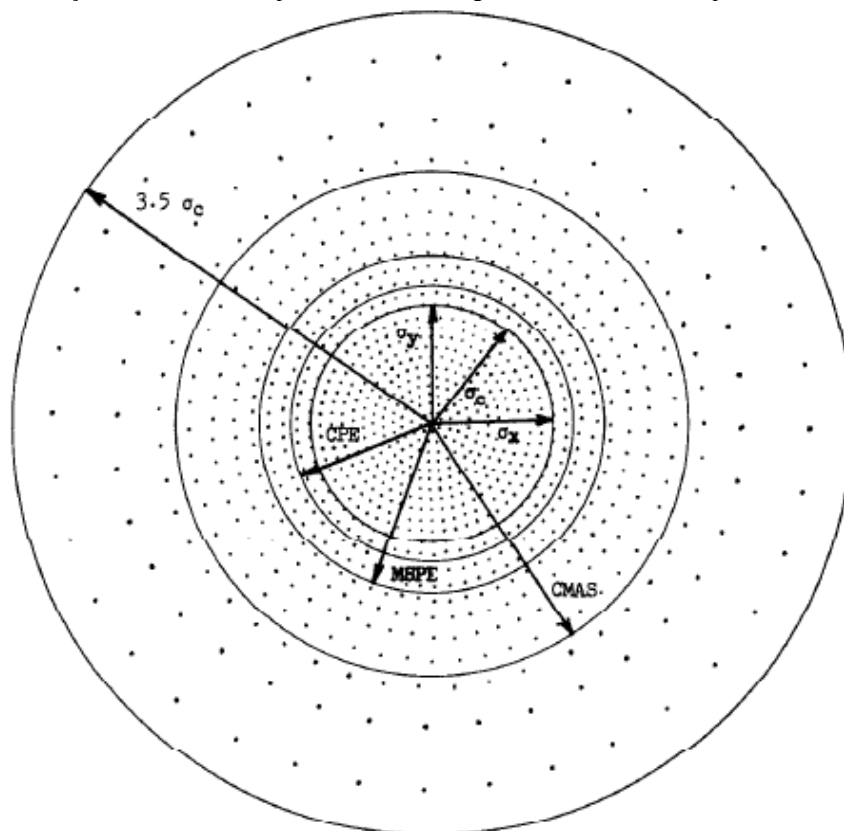


Figura 6: Distribuição circular normal

O erro provável circular é o valor do erro circular que não será excedido por mais de 50% de todos os erros numa distribuição circular, ou seja, o valor de R na equação para o qual  $P_c = 0.5$ . Este erro que é uma distribuição circular exacta (i.e.

$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_c$ ) é calculado a partir de

$$0.5 = 1 - e^{-\frac{R^2}{2\sigma_c^2}}$$

Ou seja

$$\ln 0.5 = -\frac{R^2}{2\sigma_c^2}$$

e por definição de CPE, vem que  $R = 1.1774\sigma_c$  ou seja

$$CPE = 1.1774\sigma_c$$

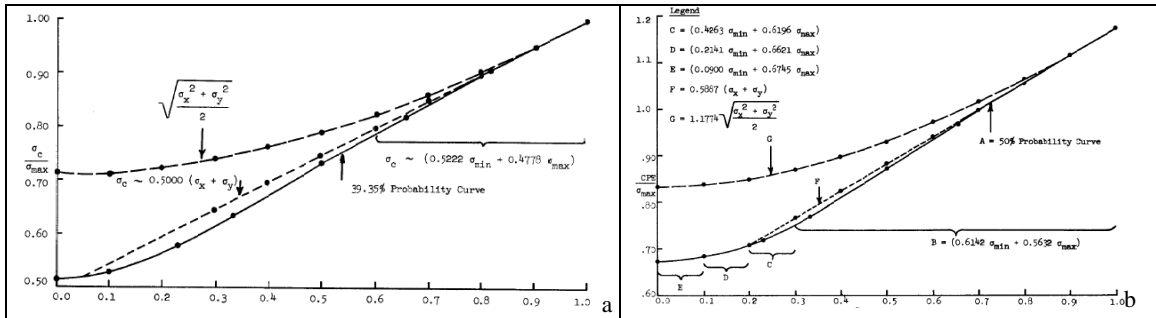


Figura Curvas de probabilidade da função  $P(R)$  em função de  $\sigma_{\min}/\sigma_{\max}$ : a) para  $P(R) = 39.35\%$ ; b) para  $P(R) = 50.00\%$

O erro posicional médio quadrático (MSPE - mean square positional error) é definido como o raio do círculo de erro igual a  $1.4142\sigma_c$  e tem pouco significado numa distribuição do erro circular exacta. No entanto quando  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$  são aproximadamente iguais, o MSPE define o erro numa posição geográfica e é calculado através de:

$$MSPE = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}, \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} \in [0.8, 1.0]$$

A probabilidade representada pelo MSPE pode ser calculada resolvendo a equação (10) em ordem a  $P_c$ , para  $R = MSPE$  e para  $\sigma_c$  aproximado pela equação

$$P_c = 1 - e^{-\frac{R^2}{2\sigma_c^2}} = 1 - e^{-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma_c^2}} \quad (11)$$

quando  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_c$  vem

$$P_c = 1 - e^{-1.0} = 63.21\%$$

Quando  $\sigma_x \neq \sigma_y$ , a solução de (11) conduz-nos a valores de  $P_c$  (

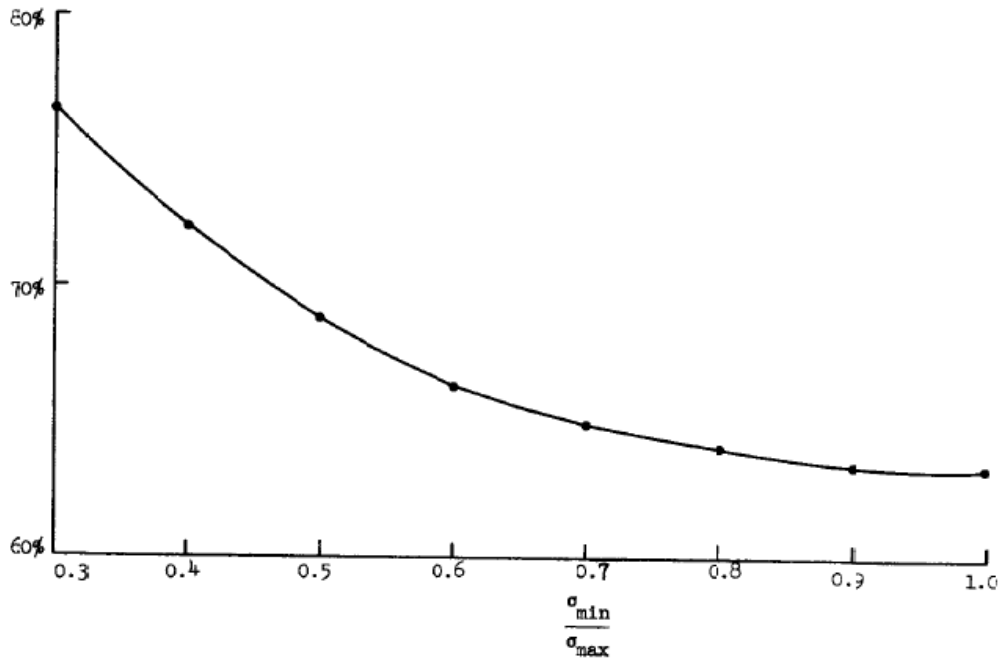


Figura :Curva de probabilidade do erro MSPE

A precisão padrão do mapa circular (CMAS) é baseada no nível de percentagem (ou quantile) utilizado no U.S. National Map Accuracy Standards a qual especifica que não mais do que 10% dos pontos utilizados para aferir a precisão do mapa deverão exceder um dado erro. Consequentemente, a precisão circular do mapa é representada pelo valor R da equação (10) para  $P_c = 0.90$ , ou seja

$$CMAS = 2.1460 \times \sigma_c$$

ou

$$CMAS = 1.8227 \times CPE$$

O erro três-ponto-cinco sigma representa a probabilidade de

### Erros esféricos e elipsoidais (3D)

## Aplicação da teoria dos erros à precisão posicional da informação geográfica

### Erros posicionais

### Bibliografia

#### Anexo 1: Derivação e solução da função de distribuição de probabilidade bidimensional

As funções de densidade de probabilidade de dois erros independentes são:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}} \quad e \quad p(y) = \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}}$$

Utilizando a regra 4 vem:

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{y^2}{\sigma_y^2}\right)}$$

e portanto

$$P(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \iint_{x, y} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{y^2}{\sigma_y^2}\right)} dx$$

Utilizando coordenadas polares

$$x^2 = r^2 \cos^2 \theta \quad ; \quad y^2 = r^2 \sin^2 \theta$$

onde  $r$  é o erro radial e

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Assim,

$$P(r) = P\left(r = \sqrt{x^2 + y^2} \leq R\right) = P(xy < R)$$

onde  $R$  é o círculo de probabilidade. Por outro lado

$$P(R) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}\left(\frac{\sin^2\theta}{\sigma_y^2} + \frac{\cos^2\theta}{\sigma_x^2}\right)} r dr d\theta$$

**Anexo 2: Tabela de especificações de qualidade para a cartografia.**

Arquivo Editar Visualizar Documento Ferramentas Janela Ajuda

1 / 1 67.7% Localizar

### Exactidão e precisão posicionais para a cartografia nas escalas 1:1 000, 1:2 000, 1:5 000 e 1:10 000

		Escala da Carta / Escala do Voo	1:1 000 / 1:4 500	1:2 000 / 1:7 500	1:5 000 / 1:15 000	1:10 000 / 1:22 500
		<b>Equidistância das curvas de nível</b>	1,00	2,00	2,50	5,00
Apoyo Fotogramétrico	Planimetria	$EMQ_M \leftarrow$	0,05	0,08	0,25	0,40
		99% dos pontos da amostra têm de apresentar um desvio em $M < 2,57\sigma$ $EMQ_M$	0,13	0,21	0,60	1,25
		$EMQ_P \leftarrow$	0,05	0,08	0,25	0,40
		99% dos pontos da amostra têm de apresentar um desvio em $P < 2,57\sigma$ $EMQ_P$	0,13	0,21	0,60	1,25
	Se $r = \sqrt{(EMQ_M)^2 + (EMQ_P)^2}$ , então $EMQ_r \leftarrow$	0,07	0,11	0,30	0,60	
	99% dos pontos da amostra têm de apresentar um desvio em $r < (3,035/\sqrt{2}) \cdot EMQ_r$	0,15	0,24	0,70	1,50	
Altimetria	$EMQ_Z \leftarrow$	0,10	0,14	0,35	0,60	
	99% dos pontos da amostra têm de apresentar um desvio em $Z < 2,57\sigma$ $EMQ_Z$	0,26	0,35	0,95	1,50	
Triangulação Aérea	Planimetria	$EMQ_M \leftarrow$	0,06	0,10	0,25	0,40
		O valor do desvio padrão em cada ponto $\leftarrow$	0,15	0,25	0,60	1,00
		$EMQ_P \leftarrow$	0,06	0,10	0,25	0,40
		O valor do desvio padrão em cada ponto $\leftarrow$	0,15	0,25	0,60	1,00
	O valor à posteriori do desvio padrão da unidade de peso em M e P $\leftarrow$	0,10	0,15	0,30	0,40	
	Altimetria	$EMQ_Z \leftarrow$	0,10	0,17	0,35	0,60
		O valor do desvio padrão em cada ponto $\leftarrow$	0,26	0,35	0,95	1,55
	O valor à posteriori do desvio padrão da unidade de peso em Z $\leftarrow$	0,15	0,20	0,40	0,55	
Diferença entre pontos da TA e pontos de verificação	Desvio planimétrico $\leftarrow$	0,18	0,30	0,60	1,00	
	Desvio altimétrico $\leftarrow$	0,20	0,35	0,95	1,50	
Orientação absoluta dos Modelos	Planimetria	Desvio máximo $\leftarrow$	0,15	0,25	0,50	0,75
	Altimetria	Desvio máximo $\leftarrow$	0,18	0,30	0,75	1,30
Restituição Tridimensional	Curvas de nível e elementos da hidrografia 3D	$EMQ_Z \leftarrow$	0,25	0,40	1,00	1,70
		90% dos pontos da amostra têm de apresentar um desvio em $Z < 1,64\sigma$ $EMQ_Z$	0,41	0,65	1,65	2,75
	Pontos cotados	$EMQ_Z \leftarrow$	0,15	0,25	0,40	0,65
90% dos pontos da amostra têm de apresentar um desvio em $Z < 1,64\sigma$ $EMQ_Z$	0,25	0,40	0,70	1,10		
MNA	Faixa envolvente		100,00	200,00	500,00	1000,00
	Cotas dos pontos da grid	$EMQ_Z \leftarrow$	0,30	0,45	1,10	1,80
	90% dos pontos da amostra têm de apresentar um desvio em $Z < 1,64\sigma$ $EMQ_Z$	0,49	0,75	1,80	3,00	
Espaçamento da grid		2,00	4,00	7,50	10,00	
ORTOS	Planimetria Digital	Desvio planimétrico $\leftarrow$	0,18	0,30	0,75	1,50
		90% dos desvios da amostra têm de apresentar um desvio $r < 1,517 \cdot EMQ_r$	0,27	0,45	1,25	2,30
	Planimetria - Saídas Gráficas	Desvio planimétrico $\leftarrow$	0,20	0,40	1,20	2,00
90% dos desvios da amostra têm de apresentar um desvio $\leftarrow$	0,35	0,70	2,10	3,50		
MNT (Nas escalas 1:1000, 1:2000 e 1:5000 tem a designação de MNTC)	Planimetria Digital	Grupo A - Desvio Planimétrico	0,00	0,00	0,00	0,00
		Grupo B - Desvio planimétrico $\leftarrow$	0,18	0,30	0,75	1,50
		Grupo B - 90% dos desvios da amostra têm de apresentar um desvio $r < 1,517 \cdot EMQ_r$	0,27	0,45	1,25	2,30
	Planimetria - Saídas Gráficas	Grupo A - Desvio Planimétrico	0,30	0,60	1,05	1,50
		Grupo A - 90% dos desvios da amostra têm de apresentar um desvio $\leftarrow$	0,45	0,90	1,60	2,30
		Grupo B - Desvio planimétrico $\leftarrow$	0,40	0,80	1,40	2,00
Grupo B - 90% dos desvios da amostra têm de apresentar um desvio $\leftarrow$	0,60	1,20	2,35	3,50		

Valores em Metros

As percentagens de erros admissíveis para a **Completo** e para a **Classificação** dos objectos mantêm-se para todas as escalas no valor de 5%.

O Catálogo de Objectos para a cartografia à Escala 1:1 000 e 1:5 000 é o mesmo da cartografia à Escala 1:2 000

Para elaboração da cartografia e ortofotocartografia nas escalas 1:1 000 e 1:5 000 devem ser utilizadas as especificações técnicas que constam na página da