Data limite de entrega: Dezembro de 2011

Lab 05: Transformação de coordenadas Bursa-Wolf

1. Objectivos:

Determinar os parâmetros de transformação entre dois data.

2. Dados:

Os dados para efectuar este estudo consistem em:

1. Coordenadas elipsoidais cartesianas num datum de referência
2. Coordenadas elipsoidais cartesianas num datum local (usando a informação dos levantamentos)

3. Determinação dos sete parâmetros: problema inverso

Introdução

A determinação dos parâmetros de transformação entre dois data é de extrema utilidade já que permite, de uma forma simples e rápida, o conhecimento das coordenadas cartesianas de pontos num determinado datum local a partir do conhecimento das coordenadas dos mesmos pontos numa datum global. Esta operação é de muita utilidade em diferente tipo de aplicações como é o estabelecimento de redes geodésicas ou a construção de infra-estruturas. A metodologia está baseada na resolução de um problema inverso conhecida como transformação de Bursa-Wolf[1] (Bursa 1962; Wolf 1963).

Os sete parâmetros de transformação

A transformação de coordenadas entre dois data, ambos orientados aleatoriamente, exige o conhecimento de 7 quantidades: três quantidades espaciais (Δx, Δy, Δz), que correspondem às diferenças entre as respectivas coordenadas cartesianas dos centros dos elipsóides, três ângulos de rotação ($\varepsilon 1$, $\varepsilon 2$, $\varepsilon 3$) respectivamente, rotação em torno do eixo do xx, yy e zz, e um factor de escala relacionado com a forma dos dois elipsóides, designado por σ e normalmente expresso em partes por milhão (ver figura1)

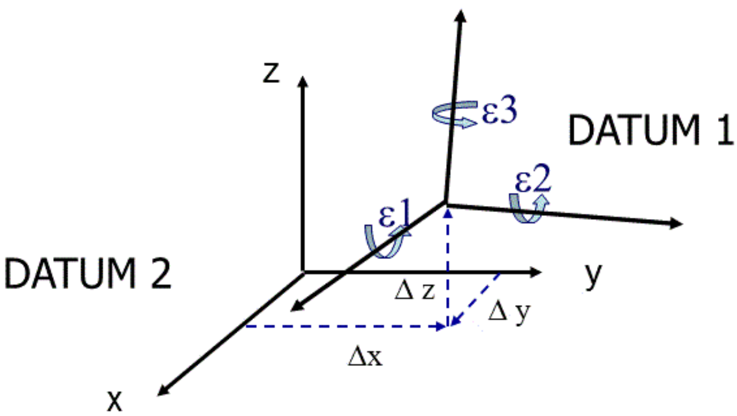

Figura 1: Transformação entre dois data: os sete parâmetros

[1] "The theory of the Determination of the Non-parallelism of the Minor axis of the Earth and Initial Astronomical and Geodetic meridians from observation of Artificial Satellitea", 1962, M. Bursa, Studia Geophysica et Geodetica, vol. 6, nº2 e "Geometric connection and re-orientation of three-dimensional triangulation nets", 1963, H. Wolf, Bulletin Géodésique vol. 68, pp. 65

A transformação Bursa-Wolf

Por uso de matrizes elementares de rotação, demonstra-se que a matriz resultante de uma rotação em torno dos três eixos pode ser escrita como:

$$\mathrm{R} = \mathrm{R}_3\{\varepsilon_3\}\mathrm{R}_2\{\varepsilon_2\}\mathrm{R}_1\{\varepsilon_1\}$$

ou seja

$$R = \begin{bmatrix} \cos\varepsilon_2\cos\varepsilon_3 & \cos\varepsilon_1\sin\varepsilon_3 + \sin\varepsilon_1\sin\varepsilon_2\cos\varepsilon_3 & \sin\varepsilon_1\sin\varepsilon_3 - \cos\varepsilon_1\sin\varepsilon_2\cos\varepsilon_3 \\ -\cos\varepsilon_2\sin\varepsilon_3 & \cos\varepsilon_1\cos\varepsilon_3 - \sin\varepsilon_1\sin\varepsilon_2\sin\varepsilon_3 & \sin\varepsilon_1\cos\varepsilon_3 + \cos\varepsilon_1\sin\varepsilon_2\sin\varepsilon_3 \\ \sin\varepsilon_2 & -\sin\varepsilon_1\cos\varepsilon_2 & \cos\varepsilon_1\cos\varepsilon_2 \end{bmatrix}$$

Por outro lado, como veremos mais à frente, os ângulos ($\varepsilon1$, $\varepsilon2$, $\varepsilon3$) são da ordem de alguns segundos de arco (ou seja muito mais pequenos que 1°). Nestas condições a matriz de rotação pode ser simplificada considerando o sen x ~ x e cos x ~ 1 (onde x está expresso em radianos), o que corresponde a preservar apenas os termos de primeira ordem (por exemplo sen x × sen x ~0):

$$R = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon_3 & -\varepsilon_2 \\ -\varepsilon_3 & 1 & \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 & -\varepsilon_1 & 1 \end{bmatrix}$$

Consideremos agora que assumimos conhecidas as coordenadas cartesianas elipsoidais de um ponto num datum 1 (x,y,z) bem como os parâmetros de transformação entre este e um datum 2 (a saber Tx, Ty, Tz, ε, ψ, ω, $d\sigma$) e se pretende determinar as coordenadas desse ponto num datum 2 (u,v,w). Demonstra-se que:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Tx \\ Ty \\ Yz \end{bmatrix} + (1 + d\sigma) \times \begin{bmatrix} 1 & \omega & -\psi \\ -\omega & 1 & \varepsilon \\ \psi & -\varepsilon & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Determinação dos 7 parâmetros de transformação

Suponha agora que se conhecem as coordenadas cartesianas de um ponto em dois data diferentes e se pretende determinar os parâmetros de transformação.

1. Pela análise do sistema acima, rapidamente se compreende que o problema é impossível. O sistema tem três equações e sete incógnitas;
2. Assim, sendo que a cada ponto corresponde um terno de coordenadas, resulta que serão necessários 3 pontos e portanto, 9 coordenadas, para que o sistema resultante se possa resolver.
3. Demonstra-se que o sistema de nove equações a sete incógnitas se pode escrever na forma matricial da seguinte maneira:

$$A\times x=b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x1 & 0 & -z1 & y1 & 1 & 0 & 0 \\ y1 & z1 & 0 & -x1 & 0 & 1 & 0 \\ z1 & -y1 & x1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ x2 & 0 & -z2 & y2 & 1 & 0 & 0 \\ y2 & z2 & 0 & -x2 & 0 & 1 & 0 \\ z2 & -y2 & x2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ x3 & 0 & -z3 & y3 & 1 & 0 & 0 \\ y3 & z3 & 0 & -x3 & 0 & 1 & 0 \\ z3 & -y3 & x3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} d\sigma \\ \varepsilon 1 \\ \varepsilon 2 \\ \varepsilon 3 \\ Tx \\ Ty \\ Tz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u1-x1 \\ v1-y1 \\ w1-z1 \\ u2-x2 \\ v2-y2 \\ w2-z2 \\ u3-x3 \\ v3-y3 \\ w3-z3 \end{bmatrix}$$

4. Estamos na presença de um sistema que deixou de ser impossível mas é indeterminado: 9 equações para 7 incógnitas. A sua resolução pode ser feita recorrendo ao método dos mínimos quadrados.
5. Assumindo que temos um sistema de equações escrito na forma matricial como (com x e b, vectores coluna):

$$Ax = b$$

A solução x pode ser determinada (pelo método dos mínimos quadrados) como:

$$x = (A^T A)^{-1} A^T b$$

Por outro lado o resíduo final, *r*, pode ser calculado como:

$$|r| = |b - Ax|$$

4. Tarefas a realizar

1. Demonstração do sistema de 9 equações a 7 incógnitas apresentado no item 3 (para os alunos do GFE)
2. Construção do sistema de equações do item 3 usando os dados observados
3. Construção de uma rotina (por exemplo usando MatLab ou FreeMat - freemat.sourceforge.net/) para a resolução do sistema do item 5. Obtenção da solução *x* e de *r*
4. Estudo da sensibilidade da solução a pequenas variações nos dados (eg. erros observacionais, arredondamentos, etc.)

5. Elementos a entregar

1. Relatório do trabalho efectuado. Utilize a seguinte estrutura para o seu relatório:
   - Introdução
   - Metodologia
   - Resultados
   - Conclusões
2. Ficheiro com rotina Matlab

Bibliografia

- Domingues Geraldes: Noções gerais de geodesia. Instituto Geográfico do Exercito (2000)