



---

Université de Marne-la-Vallée

# Qualités Requises en Modélisation Numérique du Relief :

Etude de l'équivalence entre modèle cartographique et modèle  
numérique

## THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 17 Novembre 1999

pour l'obtention du grade de

**Docteur de l'Université MARNE-LA-VALLEE**

(Spécialité: Sciences de l'Information Géographique)

par

**Gil RITO GONÇALVES**

### Composition du jury

*Président :* Bernard Cervelle  
*Rapporteurs :* Jean Chorowicz  
Marcel Raffy  
*Examineurs :* Daniel Piquet-Pellorce  
Serge Riazanoff

---

Laboratoire de recherche en Méthodes d'Analyse et de Traitement d'Images pour la Stéréorestitution



## Remerciements

Cette thèse s'est déroulée au laboratoire MATIS « Méthodes d'Analyse et de Traitement d'Images pour la Stéréorestitution » du Service de la Recherche de l'Institut Géographique National, en collaboration avec l'Université de Marne-la-Vallée.

Je suis particulièrement redevable à M. Patrick Julien qui a accepté d'encadrer cette thèse au sein du laboratoire MATIS et qui m'a notamment appris à faire de la recherche et à rédiger une publication scientifique.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à Monsieur le Professeur Cervelle, responsable de la formation doctorale des Sciences de l'Information Géographique à l'Université de Marne-la-Vallée, qui a accepté de diriger cette recherche. Merci également à Messieurs les Professeurs Raffy et Chorowicz pour avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse.

Je remercie très sincèrement M. Daniel Piquet-Pellorce pour ses conseils, sa gentillesse et sa générosité, ainsi que M. Serge Riazanoff pour ses remarques judicieuses.

Mes remerciements vont aussi à la Fundação para a Ciência e a Tecnologia qui, dans le cadre du Programa Praxis XXI (BD-5339-95), m'a assuré une partie du support financier. Merci également au Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra pour avoir soutenu cette recherche.

J'aimerais aussi remercier chaleureusement toutes les personnes du laboratoire MATIS, qui ont su donner une atmosphère de travail sympathique, et grâce auxquelles je garderai un excellent souvenir de cette période.

Enfin, un grand merci à Rosa et à toute ma famille pour les encouragements et le soutien qu'elles m'ont prodigués pendant ces quatre années de thèse.

# Table des matières

<b>Table des figures</b>	<b>v</b>
<b>1 L'équivalence entre modèle cartographique et modèle numérique</b>	<b>1</b>
1.1 Position du problème . . . . .	1
1.2 Définition du modèle cartographique . . . . .	2
1.3 Définition du modèle numérique . . . . .	3
1.4 Passage des courbes de niveau au MNT maillé . . . . .	5
1.5 Passage du MNT maillé aux courbes de niveau . . . . .	7
1.6 Appréciation de l'équivalence: le problème des courbes intercalaires . . . . .	8
1.7 Objectifs de la thèse et démarche suivie . . . . .	10
<b>2 Description et mise en oeuvre de la grille élastique</b>	<b>12</b>
2.1 Description de la méthode originelle d'Autume . . . . .	13
2.2 La méthode de la spline plaque-mince . . . . .	14
2.2.1 Courbure globale d'une surface . . . . .	14
2.2.2 Spline plaque-mince d'ajustement . . . . .	15
2.3 Améliorations de la grille élastique . . . . .	17
2.3.1 Courbure invariante par rotation du repère . . . . .	17
2.3.2 Modèle bicubique par morceaux . . . . .	18
2.3.3 Contraintes-inégalités sur l'altitude des noeuds . . . . .	21
2.4 Choix des poids . . . . .	21

---

2.4.1	Poids relatifs . . . . .	22
2.4.2	Coefficient de lissage . . . . .	24
2.5	Minimisation du critère $E(H)$ . . . . .	25
2.5.1	Expression matricielle . . . . .	25
2.5.2	Conditions d'existence et d'unicité de la solution . . . . .	28
2.5.3	Algorithme numérique . . . . .	29
<b>3</b>	<b>Essais de solution au problème des courbes intercalaires</b>	<b>32</b>
3.1	Contraintes sur les directions de l'horizontale . . . . .	33
3.1.1	Principe . . . . .	33
3.1.2	Expression des contraintes . . . . .	34
3.1.3	Mise en oeuvre . . . . .	36
3.1.4	Interpolation des directions de l'horizontale entre les courbes de niveau . . . . .	37
3.2	Contraintes sur les lignes de crête et de talweg . . . . .	40
3.2.1	Principe . . . . .	40
3.2.2	Expression des contraintes . . . . .	40
3.2.3	Recherche automatique des lignes de crête et de thalweg dans les courbes de niveau . . . . .	41
3.3	Applications à des terrains réels . . . . .	48
3.3.1	Exemple 1 . . . . .	48
3.3.2	Exemple 2 . . . . .	51
3.4	Une autre utilisation des directions de l'horizontale . . . . .	53
<b>4</b>	<b>Evaluation numérique de l'équivalence</b>	<b>55</b>
4.1	L'état de l'art sur les qualités des MNT . . . . .	55
4.1.1	Exactitude altimétrique . . . . .	56
4.1.2	Exactitude des formes de terrain . . . . .	57

---

4.2	Proposition des mesures d'évaluation de l'équivalence . . . . .	61
4.2.1	Longueur des courbes de niveau . . . . .	61
4.2.2	Courbure moyenne des courbes de niveau . . . . .	61
4.3	Evaluation de la cohérence entre courbes initiales et intercalaires . . . . .	66
4.3.1	En utilisant l'aller-retour CN-MNT . . . . .	66
4.3.2	En utilisant la longueur . . . . .	68
4.3.3	En utilisant la courbure moyenne . . . . .	72
<b>5</b>	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>75</b>
5.1	Résumé des résultats acquis . . . . .	75
5.2	Perspectives d'application . . . . .	77
5.2.1	Lissage cartographique des MNT obtenus par corrélation . . . . .	77
5.2.2	Comparaison des différents restitutions d'un même terrain . . . . .	78
	<b>Annexes</b>	<b>79</b>
<b>A</b>	<b>Interpolation polynômiale par morceaux</b>	<b>79</b>
A.1	Interpolation linéaire . . . . .	79
A.2	Interpolation cubique . . . . .	81
A.2.1	Choix de la fonction cubique . . . . .	83
A.2.2	Interpolation sur les bords . . . . .	85
A.3	Généralisation a deux dimensions . . . . .	86
<b>B</b>	<b>Diagramme de Voronoï et Triangulation de Delaunay</b>	<b>87</b>
B.1	Diagramme de Voronoï . . . . .	87
B.2	Triangulation de Delaunay . . . . .	88
B.3	Triangulations contraintes . . . . .	89
	<b>Bibliographie</b>	<b>92</b>

# Table des figures

1.1	Construction manuelle de la ligne de plus grande pente qui passe par le point $P$ . . . . .	3
1.2	Ombrage d'un MNT calculé à partir des courbes de niveau en utilisant la méthode de la grille élastique. . . . .	6
1.3	Le problème des courbes intercalaires dans la construction d'un MNT. a) Courbes initiales; b) Echantillon prélevé; c) Courbes normales (gras) et intercalaires tracées sur la surface ajustée; d) Les mêmes courbes respectant le figuré en courbes de niveau. . . . .	9
1.4	Représentation schématique de la condition nécessaire et suffisante (l'aller-retour $CN \Leftrightarrow MNT$ ). . . . .	10
2.1	Conditions supplémentaires (cas unidimensionnel). a) Altitude minimale. b) Pente minimale. c) Courbure minimale . . . . .	12
2.2	Interprétation mécanique de la grille élastique . . . . .	13
2.3	Contraintes-inégalités sur l'altitude des noeuds « o ». . . . .	22
2.4	Choix des poids relatifs $w_i$ des points des courbes de niveau. . . . .	23
2.5	Influence du paramètre $\lambda$ dans la grille élastique. a) Courbes de niveau de départ. b-f) Courbes du MNT calculé avec $\lambda = 10^{-1}, 10, 10^3, 10^5, 10^8$ respectivement. . . . .	24
2.6	Construction du vecteur $z_0$ . . . . .	30
3.1	Définition de la direction de l'horizontale. . . . .	33
3.2	Une solution au problème des intercalaires. a) Courbes initiales complétées par une grille de directions de l'horizontale; b) Extrait de la figure-a; c) Courbes initiales et intercalaires tracées sur la surface ajustée. . . . .	36
3.3	Interpolation d'une grille de directions de l'horizontale à partir des directions données aux points des courbes de niveau. . . . .	37

---

3.4	Effet d'une grille de directions de l'horizontale, interpolée par grille élastique, sur la construction d'un MNT ; a) Extrait de la grille de directions interpolée par grille élastique ; b) Courbes de niveau du MNT ajusté avec la grille de directions de la figure-a. . . . .	38
3.5	Effet d'une grille de directions de l'horizontale, interpolé à partir d'une triangulation, sur la construction d'un MNT ; a) Extrait de la grille de directions interpolée linéairement par une triangulation contrainte aux courbes ; b) Courbes de niveau du MNT interpolé avec la grille de la figure-a. . . . .	40
3.6	Une solution au problème des intercalaires. a) Courbes initiales complétées par les lignes de crête et thalweg ; b) Echantillon prélevé ; c) Courbes initiales (gras) et intercalaires tracées sur la surface ajustée. . . . .	41
3.7	Localisation des crêtes et talwegs. a) Le triangle horizontal ABC fait partie de la triangulation de Delaunay ; b) ABD n'est pas un triangle possible de la triangulation de Delaunay. . . . .	43
3.8	Densification de l'échantillon de points des courbes de niveau. . . . .	44
3.9	Détection des régions traversées par les lignes de crête et de talweg (régions critiques). . . . .	45
3.10	Calcul des altitudes des points des lignes de contrainte. . . . .	46
3.11	Recherche des lignes de contrainte dans les CN : a) Triangulation conforme aux CN ; b) Recherche d'une ligne de contrainte dans les triangles horizontaux ; c) CN et lignes de contrainte issues de l'approche ; d) Courbes initiales (gras) et intercalaires dérivées du MNT grille élastique. . . . .	47
3.12	Estimation d'une ligne de crête dissymétrique : en utilisant notre méthode et manuellement (tireté) en tenant compte de la pente de chaque flanc. . . . .	47
3.13	Effet des lignes de contrainte sur la construction d'un MNT par grille élastique : a) CN initiales ; b) CN du MNT sans lignes de contrainte ; c) CN initiales complétées par les lignes de contrainte ; d) CN du MNT avec lignes de contrainte. . . . .	49
3.14	Visualisation des MNT par ombrage. a) MNT calculé sans lignes de contrainte ; b) MNT calculé avec les lignes de contrainte . . . . .	50
3.15	Effet des lignes de contrainte sur la construction d'un MNT par grille élastique : a) CN initiales ; b) CN du MNT sans lignes de contrainte ; c) CN initiales complétées par les lignes de contrainte ; d) CN du MNT avec lignes de contrainte. . . . .	51
3.16	Visualisation des MNT par ombrage. a) MNT calculé sans lignes de contrainte ; b) MNT calculé avec les lignes de contrainte . . . . .	52

---

3.17	Construction d'un MNT en utilisant des courbes cotées et non-cotées: a) courbes de niveau maitresses cotées et points cotés; b) courbes de niveau non-cotées; c) courbes de niveau du MNT calculé avec l'information de la figure-a; d) courbes de niveau du MNT calculé avec l'information des figures a et b. . . . .	54
4.1	Visualisation de la qualité d'un MNT par ombrage de l'altitude (figures a et d) et de ses dérivées: pente (figures b et e) et courbure (figures c et e); Figures a) à c) ombrage d'un MNT issu de corrélation; Figures d) à f) ombrage d'un MNT issu des courbes de niveau. . . . .	59
4.2	Altitudes relatives distribuées en 10 classes d'amplitude de $0.5m$ : a) MNT calculé sans lignes de contrainte; b) MNT calculé avec des lignes de contrainte	60
4.3	Courbure d'une courbe plane. . . . .	62
4.4	Courbure moyenne d'une ligne polygonale inscrite dans une courbe plane. .	64
4.5	Courbure d'une ligne polygonale composée des plusieurs lignes polygonales continues disjointes. . . . .	66
4.6	Aptitude de la grille élastique à préserver le modèle cartographique: a) aller-retour sans les lignes de contrainte; b) aller-retour avec les lignes de contrainte. . . . .	67
4.7	Portion de cône approximant le terrain. . . . .	68
4.8	Comparaison des longueurs des courbes de niveau; le MNT_a est le MNT calculé sans lignes de contrainte et le MNT_b est le MNT calculé avec les lignes de contrainte . . . . .	69
4.9	Evaluation de la cohérence entre courbes initiales et intercalaires (equidistance $1m$ ): a) Longueur des CN du MNT calculé sans lignes de contrainte; b) Longueur des CN du MNT calculé avec les lignes de contrainte. . . . .	69
4.10	Evaluation de la cohérence entre courbes initiales et intercalaires (equidistance $0.5m$ ): a) Longueur des CN du MNT calculé sans lignes de contrainte; b) Longueur des CN du MNT calculé avec les lignes de contrainte. . . . .	70
4.11	Evaluation de la cohérence entre courbes initiales et intercalaires: a) Longueur des CN du MNT ajusté sans lignes de contrainte; b) Longueur des CN du MNT ajusté avec lignes de contrainte. . . . .	71
4.12	Comparaison des longueurs des courbes de niveau dérivées de deux MNT: (a) MNT issu de corrélation automatique d'images; (b) MNT issu d'une représentation du relief par courbes de niveau. . . . .	72
4.13	Comparaison des courbures des courbes de niveau; on note par MNT_a le MNT calculé sans lignes de contrainte et par MNT_b le MNT calculé avec les lignes de contrainte . . . . .	73

---

4.14	Evaluation de la courbure moyenne des courbes de niveau.a) Courbure des CN du MNT calculé sans lignes de contrainte; b) Courbure des CN du MNT calculé avec les lignes de contrainte. . . . .	73
4.15	Evaluation de la courbure moyenne des courbes de niveau.a) Courbure des CN du MNT calculé sans lignes de contrainte; b) Courbure des CN du MNT calculé avec les lignes de contrainte. . . . .	74
5.1	Aspect des courbes de niveau : a) Tracées sur le MNT issu de corrélation ; b) Obtenus par restitution photogrammétrique manuelle (provenance BDTopo - IGN). . . . .	77
5.2	Superposition de 2 restitutions :. a) faites par le même opérateur (équidistance 10m) ; b) faites par deux opérateurs (équidistance 20m). . . . .	78
A.1	Fonctions d'interpolation : linéaire $Q(t)$ et cubique $U(t)$ . . . . .	81
A.2	Reconstruction de la fonction $f(x) = x + 1$ par les fonctions $U$ et $V_{-1}$ . . . . .	85
B.1	Construction du diagramme de Voronoï : a) Chaque polygone de Voronoï est défini par l'intersection des demi-plans. b) Diagramme de Voronoï du semis de points . . . . .	88
B.2	Dualité entre le Diagramme de Voronoï et la triangulation de Delaunay. a) Diagramme de Voronoï et Triangulation de Delaunay. b) Construction du diagramme de Voronoï à partir de la triangulation de Delaunay . . . . .	89
B.3	Construction d'une triangulation contrainte. . . . .	90
B.4	Triangulations contraintes : a) Les données sont des points et des arêtes ; b) Triangulation de Delaunay des points ; c) Triangulation conforme ; d) Triangulation contrainte. . . . .	91

# Chapitre 1

## L'équivalence entre modèle cartographique et modèle numérique

### 1.1 Position du problème

Depuis plus de cinquante ans la représentation du relief sous la forme de courbes de niveau et points cotés a été adoptée et a permis à un grand nombre d'utilisateurs de disposer d'un système de mesure et d'échantillonnage du terrain ; les usages principaux étant l'interprétation et la compréhension du terrain, et la capacité d'interpoler l'altitude d'un point ou d'un ensemble de points.

Aujourd'hui nous possédons cet ensemble de mesures sur de larges territoires et la question du passage de l'utilisation graphique de cet ensemble à des utilisations sous forme numérique se pose.

Le problème abordé dans ce travail est celui de la génération d'un modèle numérique du terrain (MNT) à partir des courbes de niveau numérisées, et de la qualité de ce MNT en un sens que nous allons préciser. Le type de MNT auquel nous nous intéressons est la représentation continue de la surface du terrain sous forme de grille régulière à maille carrée. La qualité que nous recherchons pour ce MNT est d'être équivalent au modèle cartographique, qui est la surface définie par les courbes de niveau et une règle d'interpolation entre ces courbes ; nous disons que le modèle numérique et le modèle cartographique sont équivalents s'ils définissent deux surfaces identiques, ou du moins très voisines.

Dans ce travail nous ne discutons pas du bien-fondé de la représentation du relief en courbes de niveau. En particulier, cette représentation, et les MNT qui en dérivent, peuvent ne pas répondre aux besoins de certains utilisateurs, par exemple ceux qui s'intéressent au terrain dans les zones quasi-horizontales. La construction et les qualités des MNT dans ces zones constituent un problème qui sort du cadre de notre étude.

En outre, dans ce travail on aborde uniquement le problème de la construction des MNT « à moyenne échelle », c'est-à-dire dont le niveau de détail et la précision sont ceux des cartes à 1 : 25 000.

Afin de pouvoir apprécier une équivalence il est nécessaire, d'abord, de préciser les deux modèles intervenants : le cartographique et le numérique. Ensuite il est nécessaire de maîtriser les deux passages : des courbes de niveau à un MNT conservant le maximum de l'information du modelé de terrain représenté par les courbes de niveau et d'un MNT à des courbes de niveau.

## 1.2 Définition du modèle cartographique

L'objectif des différentes représentations cartographiques du relief qu'on utilise depuis de nombreuses années (les croquis perspectifs, les hachures, les courbes de niveau, les semis des points) est de permettre, aux différents usagers de la carte de reconstituer le terrain sans erreur et sans ambiguïté. Chacune de ces représentations traduit une certaine modélisation (ou figuré) du terrain qui est réalisée par un échantillonnage de valeurs et un mode d'interpolation entre les points de l'échantillon (Piquet-Pellorce, 1996).

La description du terrain par courbes de niveau et points cotés est la représentation du relief utilisée dans les cartes aux moyennes échelles. Cette modélisation permet à l'utilisateur de la carte de calculer les altitudes d'une façon précise (suffisant aux applications que l'on fait) et donne, à la fois, « une image immédiatement perceptible des formes du relief » (Cuenin, 1972). Afin de reconstituer le relief, qui est un phénomène à trois dimensions dont les variations sont continues<sup>1</sup>, l'utilisateur de la carte utilise un mode d'emploi (modélisation) défini par la règle de (Carré, 1971b) :

$$\textit{l'interpolation linéaire suivant la ligne de plus grande pente.} \quad (1.1)$$

En effet, selon Carré : *le tracé de la courbe de niveau devra être tel que l'utilisateur puisse toujours considérer que la pente entre deux courbes normales ou intercalaires est régulière ; lorsqu'il n'en sera pas ainsi le topographe devra intervenir soit pour déplacer légèrement une courbe soit pour introduire une courbe intercalaire.* Donc, si l'utilisateur veut tracer une nouvelle courbe de niveau située à mi-hauteur de deux courbes consécutives, il doit placer cette courbe à égale distance horizontal des deux premières, faute de quoi la pente serait plus forte d'un côté de la nouvelle courbe que de l'autre, donc non-régulière. Plus généralement toute courbe intercalaire doit être tracée entre les deux courbes encadrantes, à des distances horizontales qui sont dans le rapport des distances verticales.

Notons d'abord que l'interprétation de la règle 1.1 n'est simple qu'en apparence. En fait, la ligne de plus grande pente dans le cas des talwegs sinueux (ou des régions de faible pente) est très complexe et elle est reconstruite, par l'utilisateur, à l'aide de modèles assez élaborés (cf. figure 1.1). Cependant, nous irons admettre qu'entre plusieurs utilisateurs cette règle donne lieu à des différences d'interprétations négligeables, autrement dit que les courbes de niveau suggèrent à tous les utilisateurs une seule et même « surface topographique ». C'est ce modèle simplifié de la surface réelle du terrain, le modèle cartographique, que nous utiliserons dans cette thèse.

1. Sauf les cas exceptionnels des falaises et surplombs.

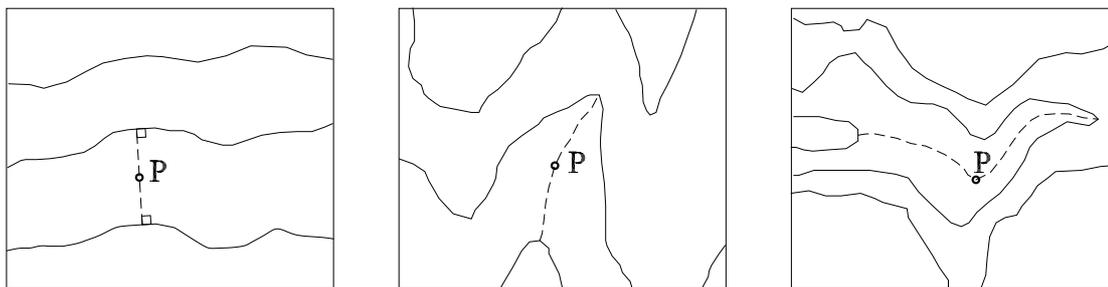


FIG. 1.1 – Construction manuelle de la ligne de plus grande pente qui passe par le point  $P$ .

### 1.3 Définition du modèle numérique

Dans ce travail, nous définissons le MNT comme une description numérique de la position et de la forme de la surface du sol. Il est toujours décrit sous une forme d'une surface paramétrée

$$z = H(x,y) \quad (1.2)$$

où  $H$  est une fonction numérique et  $(x,y)$  varie sur la surface de référence adoptée (l'ellipsoïde, le plan d'une représentation cartographique...).

Notons que cette représentation numérique ne permet pas de représenter les reliefs verticaux, puisqu'à un point  $(x,y)$  correspond une et une seule valeur  $z$ . Pour représenter n'importe quel relief, il serait nécessaire d'utiliser des représentations plus complexes comme par exemple une représentation paramétrique ( $x = x(u,v)$ ,  $y = y(u,v)$ ,  $z = z(u,v)$ ). Cependant, la représentation mathématique de l'altitude sous la forme 1.2 est suffisante pour décrire le terrain aux moyennes échelles car, d'une part le terrain moyen de la France est caractérisé par un relief de collines arrondies, sans falaises et boisé à 20% (Carré, 1971a) et d'autre part les courbes de niveau (les données de notre problème) ne permettent pas elles-mêmes de représenter les falaises et les surplombs.

La fonction  $H$  est supposée donnée sous la forme d'une combinaison linéaire de fonctions numériques élémentaires  $F_1, \dots, F_p$  :

$$H(x,y) = \sum_{i=1}^p c_i F_i(x,y)$$

où les coefficients  $c_i$  sont les valeurs de la fonction  $H$  aux « noeuds d'interpolation »  $m_i = (x_i, y_i)$ , c'est-à-dire  $c_i = H(m_i)$ ,  $i = 1, \dots, p$ . Autrement dit, on suppose que le MNT est toujours donné par un échantillon (représentatif) du terrain (les noeuds  $m_i$  et les altitudes  $z_i = H(m_i)$ ) et une fonction ou ensemble de fonctions d'interpolation (les fonctions numériques  $F_i$ ).

## Choix du modèle numérique :

Actuellement les deux grandes classes de MNT les plus utilisées sont (Weibel and Heller, 1991) :

- Les grilles irrégulières triangulaires (en anglais TIN - Triangular Irregular Network) où les noeuds  $m_i$  sont les sommets d'un réseau de triangles. En général, le terrain est décrit à l'intérieur de chaque triangle par le plan qui passe par ces trois sommets ; donc  $h(x,y) = a_0 + a_1x + a_2y$ .
- Les grilles régulières, où les noeuds  $m_i$  sont organisés selon un maillage régulier (en général rectangulaire). À l'intérieur de chaque rectangle le terrain est habituellement représenté par un paraboloïde hyperbolique qui passe par ces quatre sommets ; donc  $h(x,y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy$ .

Pour l'étude du relief sous forme numérique les MNT à grille régulière sont les plus couramment utilisés. Par rapport aux TIN les grilles régulières ont l'avantage d'avoir une topologie très simple et donc leur utilisation informatique est élémentaire (par exemple, pour un point donné le calcul du rectangle encadrant est immédiat). En outre, l'échantillonnage résultant de la numérisation des courbes de niveau n'est pas adaptée à la représentation du terrain sous la forme de TIN, car cette représentation est très dépendant de l'échantillonnage choisie ; bien évidemment, à la condition d'adapter le pas de la grille au plus petit détail qu'on veut représenter (quitte à augmenter le volume de données), les grilles régulières peuvent décrire, comme les TIN, n'importe quel terrain. Finalement, et on le verra ultérieurement, la méthode de construction de la fonction  $H$  (la grille élastique) est, pour l'instant, uniquement formalisable dans le cadre d'une grille régulière. En effet, il n'y a pas à notre connaissance, dans la littérature, une mise en oeuvre de cette technique dans une grille irrégulière.

En définitive, nous supposons que le MNT est donné sous la forme d'un maillage régulier  $\mathcal{M}_h$  de pas  $h$  ( $h > 0$ ) et noeuds  $m_{c,l} = (x_c, y_l)$  définis dans le plan par l'intersection des deux familles orthogonales de droites :

$$x_c = x_0 + ch, c = 1, \dots, N \quad ; \quad y_l = y_0 + lh, l = 1, \dots, M. \quad (1.3)$$

La fonction  $H(x,y)$  est supposée définie sous la forme<sup>2</sup> d'une somme :

$$H(x,y) = \sum_{c=1}^N \sum_{l=1}^M z_{c,l} V\left(\frac{x-x_c}{h}\right) V\left(\frac{y-y_l}{h}\right) \quad (1.4)$$

où  $V(t)$  est une fonction continue, à support borné, polynômiale dans chaque intervalle  $[c, c+1]$ ,  $c$  entier, et telle que  $V(0) = 1$ ,  $V(c) = 0 \forall c \neq 0$ .

---

2. Designant par  $x_c = ch$  et  $y_l = lh$  l'expression devient  $H(u,v) = \sum_{c=1}^N \sum_{l=1}^M z_{c,l} V(\frac{u}{h} - c) V(\frac{v}{h} - l)$ , avec  $u \in [ch, ch + h]$  et  $v \in [lh, lh + h]$ . Encore, en notant par  $x_c = c$  et  $y_l = l$  on a  $H(s,t) = \sum_{c=1}^N \sum_{l=1}^M z_{c,l} V(s - c) V(t - l)$ , avec  $s \in [c, c+1]$  et  $t \in [l, l+1]$ .

## 1.4 Passage des courbes de niveau au MNT maillé

Pour ajuster une fonction  $H$ , définie sous la forme 1.4, sur des courbes de niveau (en fait des lignes polygonales) qui sont des données continues, il faut d'abord se ramener à un échantillon fini de points.

Il est naturel de prélever ces points sur les courbes, bien entendu avec un intervalle de prélèvement assez petit pour que l'échantillon soit représentatif. Or, compte tenu que la fonction  $H$  est définie sur un maillage régulier, cet intervalle peut être défini, par exemple, de façon à avoir au moins un point en chaque maille traversée par une courbe de niveau donnée. En plus, le fait de considérer les courbes comme des lignes polygonales nous permet d'utiliser une interpolation linéaire en chaque segment de la ligne polygonale.

L'étape suivante dans la construction de la fonction  $H$  (c'est-à-dire le MNT) est un problème d'approximation : étant donné un échantillon fini  $\mathcal{P}$  de points du terrain

$$\mathcal{P} = \{(x_i, y_i, z_i) \ ; \ i = 1, \dots, n\}. \quad (1.5)$$

on cherche la fonction  $H$  sous la forme 1.4 qui décrit le terrain représenté par cet échantillon.

Notons d'abord que le problème d'interpolation  $H(x_i, y_i) = z_i$  a peu d'utilité car il n'assure pas un résultat *quel que soit l'échantillon de points*. En effet, l'interpolation n'est possible qu'exceptionnellement puisqu'elle conduit au système linéaire en  $\mathbf{z} = (z_{11}, \dots, z_{NM})^T$

$$\sum_{c,l} z_{c,l} V\left(\frac{x_i - x_c}{h}\right) V\left(\frac{y_i - y_l}{h}\right) = z_i \quad (i = 1, \dots, n),$$

qui est indéterminé lorsque  $NM > n$  et en général impossible lorsque  $NM < n$ .

Donc, on s'intéresse plutôt au problème d'ajustement

$$E_{\text{échantillon}}(H) = \sum_{i=1}^n w_i [H(x_i, y_i) - z_i]^2 \quad \text{minimal, } (w_i > 0)$$

car il admet toujours au moins une solution (Julien, 1994).

Toutefois, il y a une infinité de solutions lorsque  $NM > n$  (plus de noeuds que de points). En effet, soit  $H_w$  une solution possible pour une famille  $w = (w_1, \dots, w_n)$  fixé, il existe

$$\mathbf{k} = (k_{11}, \dots, k_{NM})^T \neq \mathbf{0} : \sum_{c,l} k_{c,l} V\left(\frac{x_i - x_c}{h}\right) V\left(\frac{y_i - y_l}{h}\right) = 0, \quad i = 1 \dots n$$

ce que implique que la fonction  $K(x, y) = \sum_{c,l} k_{c,l} V\left(\frac{x-x_c}{h}\right) V\left(\frac{y-y_l}{h}\right)$  vérifie  $K(x_i, y_i) = 0$ ,  $i = 1 \dots n$ ; donc, toute fonction  $H_w + \alpha K$  est solution puisque

$$E_{\text{échantillon}}(H_w + \alpha K) = \sum_{i=1}^n w_i [H_w(x_i, y_i) - z_i]^2 + 0 = E_{\text{échantillon}}(H_w)$$

est minimal.

Donc, pour disposer d'une méthode qui assure une solution unique *quel que soit l'échantillon* de points, on doit imposer à la fonction  $H(x,y)$  de satisfaire une condition supplémentaire.

Les différentes méthodes qu'on trouve dans la littérature peuvent se classer en fonction du comportement de la surface  $H$  entre les points d'échantillonnage, c'est-à-dire du modèle a priori du terrain que l'on se fixe. Actuellement, les méthodes les plus utilisées sont les méthodes de reconstruction par régularisation<sup>3</sup>, telles que les fonctions splines d'ajustement, où le modèle a priori du terrain a des caractéristiques déterministes, et les méthodes de krigeage, où le modèle a priori du terrain a des caractéristiques statistiques. Ici, nous ne nous intéressons qu'aux méthodes déterministes et en particulier celles permettant de construire des surfaces avec une continuité, au moins,  $C^1$ .

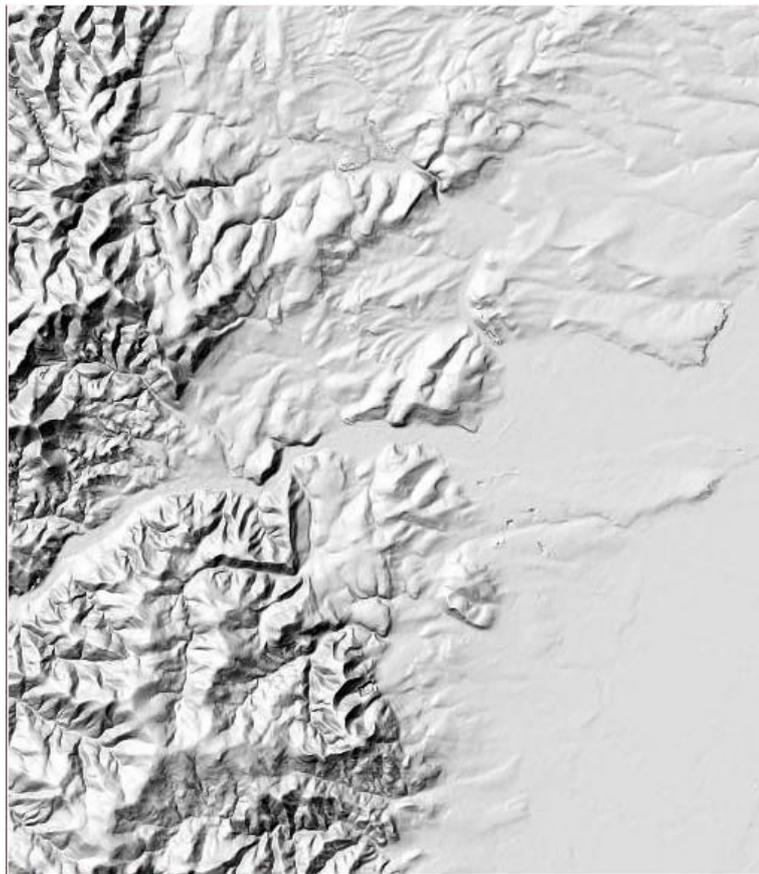


FIG. 1.2 – Ombrage d'un MNT calculé à partir des courbes de niveau en utilisant la méthode de la grille élastique.

Les méthodes de reconstruction par régularisation semblent maintenant assez répandues, notamment depuis l'ouvrage (Grimson, 1981). Parmi ces méthodes les modèles de surface du type élastique, en particulier la spline plaque-mince (Duchon, 1976), sont très

---

3. En présence d'un problème mal posé on ajoute au critère à optimiser un terme de régularisation garantissant l'unicité de la solution.

utilisées en cartographie et traitement d'images (Terzopoulos, 1988; Muraki et al., 1990; Bignone and Nonin, 1995). Nous parlerons de cette méthode au chapitre 2. Disons pour l'instant qu'elle sert à ajuster une surface « élastique » (rigide, mais souple) sur l'échantillon donné de points. La condition d'élasticité est destinée en premier lieu à empêcher, *quel que soit l'échantillon*, l'indétermination du problème ; mais elle a aussi l'avantage de fournir une surface lisse.

Dans le cadre de cette thèse nous disposions déjà pour la construction des MNT d'une méthode dite « grille élastique » (D'Autume, 1978). Comme on le verra ultérieurement la grille élastique est l'équivalent discret de la spline plaque-mince. De façon générale, les MNT obtenus par cette méthode sont « globalement satisfaisants » beaucoup d'utilisations (orthophotographie, aménagement). En effet, la figure 1.2 montre l'ombrage d'un MNT calculé à partir des courbes de niveau en utilisant la méthode de la grille élastique. On constate que les formes représentées par le MNT sont vraisemblables et qu'il n'y a pas d'artéfacts visibles.

Finalement, remarquons que certains auteurs (Habib, 1997; Lancaster and Salkauskas, 1986; Utreras, 1979) au lieu d'ajuster une fonction  $H$  sur la totalité du domaine d'approximation, préfèrent diviser le domaine en sous-domaines et ajuster en chaque sous-domaine une fonction  $H_i$ . Pour assurer la continuité de la fonction, ou de ses dérivées, des conditions supplémentaires sont imposées sur les bords. Cependant, ces méthodes ne sont pas adaptées à des données avec une répartition non-homogène comme c'est le cas des courbes de niveau. En effet, cette répartition peut créer des trous, c'est-à-dire des sous-domaines où il n'y a pas assez de données, mettant en échec les méthodes d'ajustement.

## 1.5 Passage du MNT maillé aux courbes de niveau

En principe, il n'y a aucune difficulté théorique pour calculer les courbes de niveau d'un MNT ; bien sûr, il faudra au préalable discrétiser le MNT à un pas très fin de façon qu'on puisse assimiler chaque maille du MNT à une facette plane. Dans ce cas, la détermination de la courbe de niveau de cote  $z$  se réduit à l'intersection du polyèdre avec le plan horizontal de cote  $z$ . Il faut remarquer que le pas de cette discrétisation auxiliaire n'a aucune relation avec le pas de la grille sur laquelle on a défini le MNT.

Dans la pratique, le calcul des courbes de niveau de cotes  $z_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), dans une matrice d'altitudes se fait en deux étapes :

- Calcul des intersections des courbes de niveau avec les arêtes du maillage. En chaque maille on calcule les segments des courbes de niveau qui intersectent les arêtes de la maille.
- Chaînage des segments. Pour chaque altitude  $z_i$  les courbes de niveau (lignes polygonales) correspondantes sont définies par le chaînage des segments contigus de cote  $z_i$ .

## 1.6 Appréciation de l'équivalence : le problème des courbes intercalaires

Il s'agit maintenant de vérifier si le modèle numérique construit à partir d'un échantillon prélevé sur les courbes de niveau (dans notre cas le MNT grille élastique) ait les mêmes « propriétés » que le modèle cartographique donné par les courbes de niveau et la règle d'interpolation 1.1.

Une condition nécessaire pour que le MNT soit équivalent au modèle cartographique dont il est issu, est que les courbes de niveau de départ soient superposables aux courbes de niveau *correspondantes* du MNT. Cependant, cette condition n'est pas suffisante. En effet, il peut arriver que les courbes de niveau intercalaires de la surface ajustée ne respectent pas la forme des courbes de niveau voisines. De telles courbes intercalaires sont inacceptables car elles contredisent le principe du figuré en courbes de niveau, qui veut qu'on *puisse toujours considérer que la pente entre deux courbes normales ou intercalaires est régulière* (voir définition 1.1).

Pour illustrer ce problème on va faire appel à une surface de synthèse. Tenant compte que le phénomène est particulièrement visible sur les crêtes et dans les talwegs on a choisi une surface pour laquelle les lignes caractéristiques (crêtes et talwegs) étaient bien évidentes. Dans la surface représentée dans figure 1.3 la forme des courbes de niveau est donnée par

$$x(u) = r(u) \cos(\pi u); y(u) = r(u) \sin(\pi u) \quad \text{avec} \quad r(u) = 1 + \frac{1}{4} \sin(15\pi u)$$

Les points sur les lignes de crêtes correspondent aux maximums de la fonction  $r(u)$ , et les points sur les lignes de talweg correspondent au minimums de  $r(u)$ .

Les figures 1.3-a et 1.3-b montrent les courbes initiales (équidistance de 10m) et l'échantillon prélevé; la figure 1.3-c montre les courbes tracés sur la surface ajustée, avec les courbes intercalaires trop « tendues »; la figure 1.3-d montre les courbes intercalaires (équidistance de 5m) régulièrement emboîtées qu'exigerait la logique du figuré en courbes de niveau.

Ainsi, l'échantillon de la figure 1.3-b apparaît satisfaisant si le contrôle de la surface ajustée (MNT) se limite à superposer les courbes dont on est parti (figure 1.3-a) avec les courbes de niveau correspondantes de la surface (les courbes en gras de la figure 1.3-c) : la superposition est parfaite. L'échantillon apparaît moins satisfaisant si on trace les courbes de niveau intercalaires de la surface ajustée (courbes en trait normal de la figure 1.3-c) : celles-ci sont plus « tendues » que les courbes initiales (courbes en gras). En effet, comme ces courbes ne sont pas placées à égale distance des courbes initiales elles montrent qu'en particulier sur les lignes de crête et talweg la valeur scalaire de la pente n'est pas constante; donc le modèle cartographique représenté par les courbes de niveau initiales n'est pas respecté par le MNT grille élastique.

Ces résultats nous permettent de dire qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une méthode quelconque de construction d'un MNT, à partir des courbes de niveau,

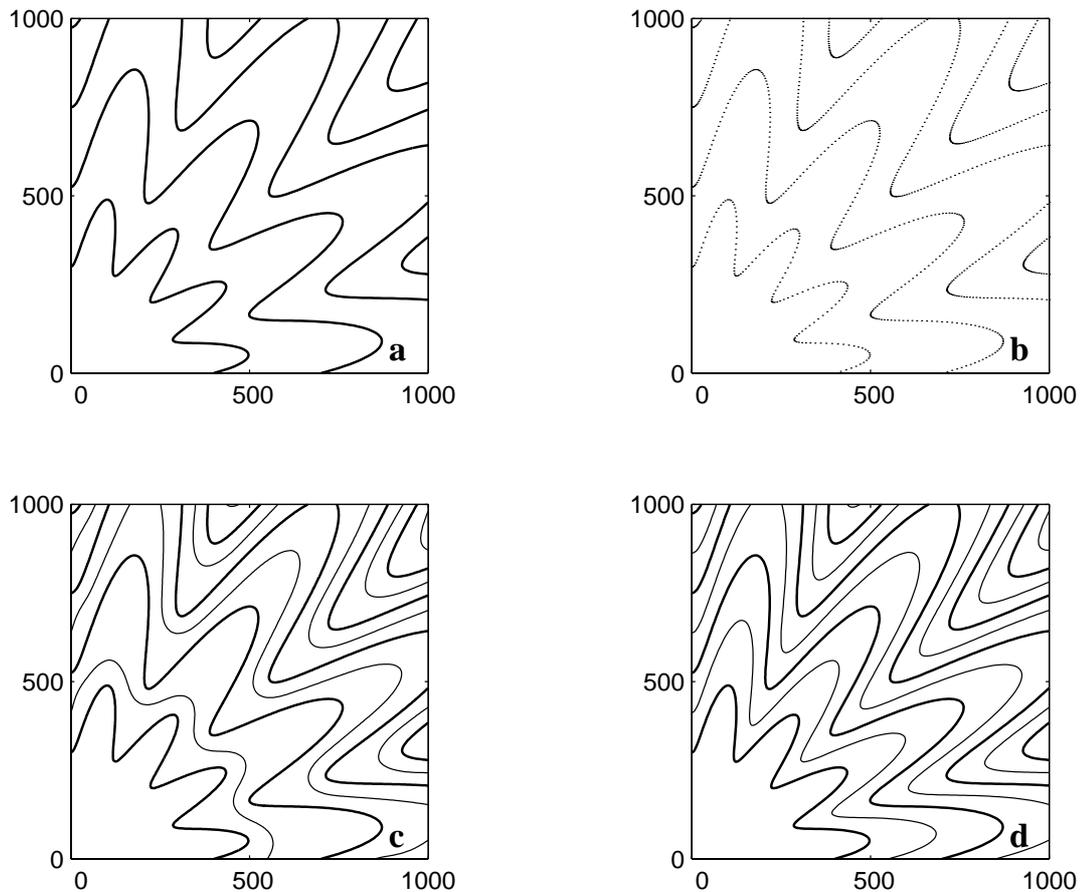


FIG. 1.3 – *Le problème des courbes intercalaires dans la construction d'un MNT. a) Courbes initiales ; b) Echantillon prélevé ; c) Courbes normales (gras) et intercalaires tracées sur la surface ajustée ; d) Les mêmes courbes respectant le figuré en courbes de niveau.*

respecte le modèle cartographique représenté par ces courbes, est que les courbes intercalaires tracées sur le MNT s'accordent avec les courbes initiales.

Cette condition peut être validée par un calcul aller-retour courbes de niveau/MNT (voir figure 1.4) : à partir des courbes de niveau initiales  $CN_i$  (disons de cotes  $0, e, 2e, \dots, ne$ ), on calcule un premier MNT et on dérive les courbes de niveau intercalaires (de cotes  $\frac{1}{2}e, \frac{3}{2}e, \dots, \frac{2n-1}{2}e$ ). Ensuite à partir de ce jeu de courbes on calcule un deuxième MNT et on dérive les courbes de niveau de cotes  $0, e, 2e, \dots, ne$  ( $CN_f$ ), c'est-à-dire de mêmes cotes que les courbes initiales. Si les courbes de niveau finales ( $CN_f$ ) sont « superposables » au courbes de niveau initiales ( $CN_i$ ) alors la méthode de construction du MNT respecte le modèle cartographique, à savoir la régularité de la pente entre deux courbes de niveau consécutives.

En négligeant, bien évidemment, la perte d'information due à chaque ré-échantillonnage, l'écart entre les courbes initiales et les courbes finales nous donne une mesure de qualité  $\varepsilon$  qui s'applique à la totalité de la surface représentée par les courbes de niveau. Plus

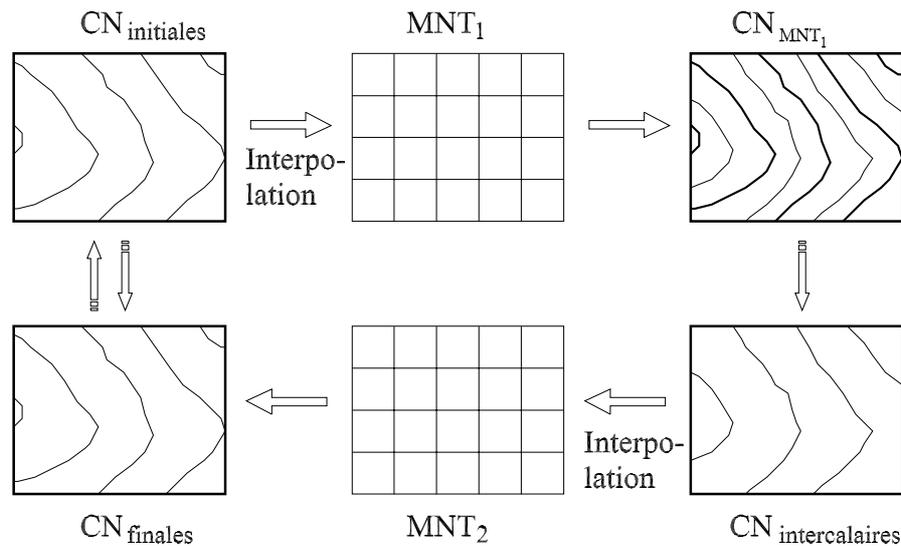


FIG. 1.4 – Représentation schématique de la condition nécessaire et suffisante (l’aller-retour  $CN \Leftrightarrow MNT$ ).

précisément, on peut admettre que  $\frac{1}{2}\varepsilon$  est une estimation (un majorant) de la qualité du MNT ( $MNT_1$  de la figure 1.4) construit à partir des courbes initiales par une méthode d’interpolation quelconque.

Notons, finalement, que le fait de calculer le MNT en utilisant seulement les courbes médianes, c’est-à-dire les courbes de cotes  $\frac{1}{2}e, \frac{3}{2}e \dots, \frac{2n-1}{2}e$ , nous paraît suffisante parce que l’artéfact observé (voir figure 1.3) est maximale sur ces courbes (voir figures 4.14 et 4.15) ; en conséquence, si l’artéfact est supprimé sur ces courbes médianes on a tout lieu de croire que l’artéfact est supprimé sur toutes les courbes intercalaires.

## 1.7 Objectifs de la thèse et démarche suivie

### Objectifs :

Le premier objectif de cette thèse est de savoir construire un MNT, sous forme d’une grille régulière d’altitudes, qui soit équivalent au modèle de surface représenté par les courbes de niveau (modèle cartographique) dont le MNT est issu. Par équivalent nous entendons que les deux modèles contiennent « potentiellement » la même information, qu’elle soit explicite comme les coordonnées  $(x, y, z)$  ou implicite comme le modelé du terrain.

Le deuxième objectif consiste à valider numériquement cette équivalence, c’est-à-dire à trouver des mesures qui permettront de vérifier si le modèle cartographique représenté par les courbes de niveau est ou non respecté par le MNT.

## Démarche :

La localisation des défauts observés dans la figure 1.3 indique qu'il a manqué sur les crêtes et dans les talwegs des informations contraignant l'ajustement de la surface. On peut donc se douter que la correction de ces défauts va passer par l'apport d'informations supplémentaires relatives au modelé de terrain représenté par les courbes de niveau dans ces régions.

Dans le chapitre 2, nous décrivons la méthode d'approximation, la grille élastique, utilisé dans la construction des MNT maillés à partir des courbes de niveau. Cette méthode, proposée par D'Autume en 1978, a été modifiée de façon à produire une surface de classe  $C^1$  et à traiter le cas spécifique où l'échantillon est formé par des courbes de niveau.

Ensuite, nous montrons au chapitre 3 que le problème des courbes intercalaires peut être résolu par l'addition dans la grille élastique d'informations supplémentaires relatives aux directions de l'horizontale et aux lignes de crête et talweg. Dans ce chapitre nous montrons aussi que ces informations peuvent être extraites automatiquement car elles figurent déjà, soit explicitement pour les directions de l'horizontal, soit implicitement pour les lignes de crête et talweg, dans les courbes de niveau.

Dans le chapitre 4 nous nous intéressons à l'évaluation numérique de l'équivalence entre le modèle cartographique et le modèle numérique. Plus précisément, nous prétendons vérifier si le modelé de terrain défini par l'interpolation linéaire suivant la ligne de plus grande pente entre deux courbes de niveau consécutives est respecté par le modèle numérique. La démarche suivie consiste à expliciter le modelé de terrain représenté dans le MNT par l'intermédiaire des courbes de niveau intercalaires tracées sur la surface numérique. En effet, nous montrons que si ce modelé est respecté par le modèle numérique les graphes de la fonction longueur et courbure moyenne des courbes de niveau intercalaires tracés sur le MNT devraient être, en général, linéaires en chaque tranche du terrain comprise entre deux courbes de niveau consécutives. Enfin, nous montrons qu'on peut détecter de façon simple si une surface présente ou non des artefacts liés au non-respect du modèle cartographique, en confrontant les longueurs des courbes de niveau initiales et des intercalaires.

## Chapitre 2

# Description et mise en oeuvre de la grille élastique

Nous avons vu, dans le chapitre 1, que pour ajuster une fonction  $H(x,y)$ , définie dans un maillage régulière  $\mathcal{M}_h$ , sur un échantillon fini de points  $\mathcal{P}$  on doit imposer à la surface  $H$  des conditions supplémentaires.

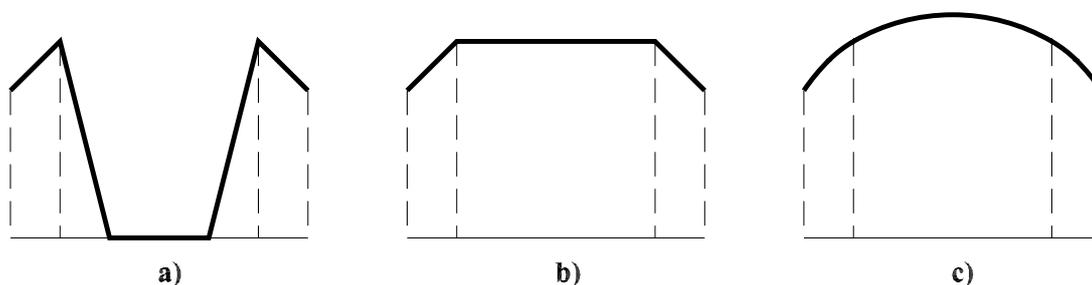


FIG. 2.1 – Conditions supplémentaires (cas unidimensionnel). a) Altitude minimale. b) Pente minimale. c) Courbure minimale

La figure 2.1 illustre quelques conditions possibles pour le cas unidimensionnel de la fonction  $H$  : la courbe de la figure 2.1-a à été ajusté par minimisation du critère altitude minimal plus précisément  $\|H\|_{\min}^2$  ; la courbe 2.1-b par minimisation du critère  $\|H'\|_{\min}^2$  (pente minimal) ; la courbe 2.1-c par minimisation du critère  $\|H''\|_{\min}^2$  (par abus de langage on dit courbure minimal). Dans les deux premiers exemples, les formes de terrain reconstruites par les critères d'altitude et pente minimal sont dans la réalité peu vraisemblables. Par contre, la minimisation d'un critère de courbure conduit à des formes de terrain vraisemblables<sup>4</sup> et bien adaptées au type de modélisation du relief qu'on souhaite pour les moyennes échelles (voir aussi figure 1.2).

---

4. D'ailleurs, (Hutchinson, 1989) avait aussi remarqué que ce critère était approprié à la modélisation des surfaces topographiques.

## 2.1 Description de la méthode originelle d'Autume

D'Autume en 1978 a généralisé cette condition de courbure minimale pour une fonction  $H$  à deux variables et donnée sur un maillage régulier (D'Autume, 1978). La grille élastique de d'Autume peut être aussi définie par la fonction  $H(x,y)$  qui minimise la quantité

$$E_h(H) = E_{\text{courbure}}(H) + E_{\text{echantillon}}(H), \quad (2.1)$$

où

$$E_{\text{echantillon}}(H) = \sum_{i=1}^n w_i [H(x_i, y_i) - z_i]^2 \quad (2.2)$$

et

$$E_{\text{courbure}}(H) = \sum_{c=2}^{N-1} \sum_{l=1}^M (z_{c-1,l} - 2z_{c,l} + z_{c+1,l})^2 + \sum_{c=1}^N \sum_{l=2}^{M-1} (z_{c,l-1} - 2z_{c,l} + z_{c,l+1})^2. \quad (2.3)$$

Dans l'expression 2.2,  $H$  est une fonction bilinéaire par morceaux (voir Section 2.3.2.1), et le paramètre  $w_i$  est un poids positif ( $w_i > 0$ ) associé au point  $(x_i, y_i, z_i)$ .

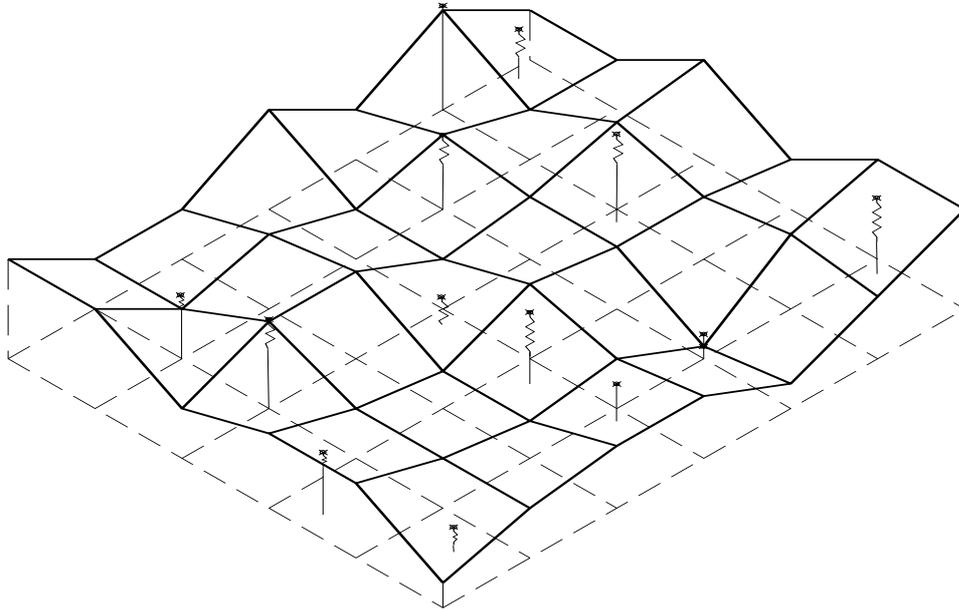


FIG. 2.2 – *Interprétation mécanique de la grille élastique*

Le nom de grille élastique vient de l'interprétation physique qu'on peut donner de la méthode (voir figure 2.2). On considère que le maillage est matérialisé par des tiges rigides reliées élastiquement entre elles par des ressorts qui tendent, en absence des forces extérieures, à les maintenir alignées. En chaque noeud on a deux ressorts, un dans le sens

longitudinal et un dans le sens transversal.  $E_{\text{courbure}}(H)$  représente l'énergie de flexion de cet assemblage. D'autre part, la surface fictive appuyée sur cet assemblage est reliée aux points de l'échantillon par des ressorts verticaux de raideurs  $w_i$ . Le terme  $E_{\text{échantillon}}$  représente l'énergie élastique de ces ressorts. La surface cherchée  $H(x,y)$  est atteinte lorsque l'énergie totale est minimale, c'est-à-dire lorsque l'assemblage est en position d'équilibre.

## 2.2 La méthode de la spline plaque-mince

### 2.2.1 Courbure globale d'une surface

Admettons que la fonction  $H(x,y)$  est une représentation explicite d'une surface de classe  $C^2$ . Notons par  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$  les courbures principales en  $(x,y)$  de cette surface.

Comme mesure possible de la courbure on pourrait penser à utiliser, soit la courbure totale (ou courbure de Gauss)

$$\Phi = \kappa_1 \cdot \kappa_2$$

soit la courbure moyenne

$$\Psi = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2);$$

en utilisant les notations de (O'Neill, 1997) on a :

$$\Phi = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \quad , \quad \Psi = \frac{1}{2} \frac{NE - 2MF + LG}{EG - F^2}$$

où

$$\begin{aligned} E &= 1 + H_x^2 & ; & & G &= 1 + H_y^2 & ; & & M &= \frac{1}{D} H_{xy} \\ F &= H_x H_y & ; & & L &= \frac{1}{D} H_{xx} & ; & & N &= \frac{1}{D} H_{yy} \end{aligned}$$

et  $D^2 = EG - F^2 = 1 + H_x^2 + H_y^2$ .

Or, les quantités  $\Phi$  et  $\Psi$  peuvent s'annuler même pour une surface courbée et donc ne rendent pas toujours compte d'une courbure de la surface.

Une mesure plus discriminante de la courbure est représenté par l'expression :

$$\kappa_1^2 + \kappa_2^2. \tag{2.4}$$

Cette quantité qui a une expression complexe pour la surface  $H$  est néanmoins simple pour la surface  $\bar{H} = H - T$ , écart entre la surface  $H$  et son plan tangent  $T$ . En effet, en un point  $(x_0, y_0)$  l'équation de cette surface est

$$\bar{H}(x,y) = H(x,y) - H(x_0,y_0) - H_x(x_0,y_0) \cdot (x - x_0) - H_y(x_0,y_0) \cdot (y - y_0)$$

d'où

$$\begin{aligned}\overline{H}_x(x_0, y_0) &= \overline{H}_y(x_0, y_0) = 0, \\ \overline{H}_{xx}(x_0, y_0) &= H_{xx}(x_0, y_0) \quad \text{et} \quad \overline{H}_{yy}(x_0, y_0) = H_{yy}(x_0, y_0).\end{aligned}$$

Donc, pour la surface  $\overline{H}$  au point  $(x_0, y_0)$  on a :

$$\overline{\kappa}_1^2 + \overline{\kappa}_2^2 = H_{xx}^2 + 2H_{xy}^2 + H_{yy}^2$$

La quantité  $\overline{\kappa}_1^2 + \overline{\kappa}_2^2$  est a priori relative à la surface  $\overline{H}$ . Cependant l'écart  $\overline{H}(x, y)$  contient en fait toute l'information de courbure de la surface  $H = \overline{H} + T$  car le plan  $T$  n'a par définition aucune courbure. Il est donc légitime de mesurer la courbure de  $H$  par celle de  $\overline{H}$ .

Finalement, il est raisonnable de mesurer la courbure globale de la surface  $H$  par :

$$K(H) = \iint (H_{xx}^2 + 2H_{xy}^2 + H_{yy}^2) dx dy \quad (2.5)$$

Remarquons que cette quantité est invariante par rotation du repère, car  $\overline{\kappa}_1^2 + \overline{\kappa}_2^2$  est une caractéristique géométrique de la surface, indépendante d'un repère. On peut aussi vérifier directement que la fonction  $H_{xx}^2 + 2H_{xy}^2 + H_{yy}^2$  est invariante par rotation du repère de coordonnées, c'est-à-dire par changement de variables :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad R = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

En effet si  $\Theta$  est la fonction définie par  $\Theta(x_1, y_1) = H(x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta, x_1 \sin \theta + y_1 \cos \theta) = H(x, y)$ , les dérivées secondes de  $H$  en  $(x, y)$  et de  $\Theta$  en  $(x_1, y_1)$  sont reliées par des conditions qui s'écrivent sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \Theta_{xx}(x_1, y_1) & \Theta_{xy}(x_1, y_1) \\ \Theta_{xy}(x_1, y_1) & \Theta_{yy}(x_1, y_1) \end{bmatrix} = R^T \begin{bmatrix} H_{xx}(x, y) & H_{xy}(x, y) \\ H_{xy}(x, y) & H_{yy}(x, y) \end{bmatrix} R.$$

En élevant au carré et en prenant les traces<sup>5</sup>, on obtient :

$$\Theta_{xx}^2(x_1, y_1) + 2\Theta_{xy}^2(x_1, y_1) + \Theta_{yy}^2(x_1, y_1) = H_{xx}^2(x, y) + 2H_{xy}^2(x, y) + H_{yy}^2(x, y),$$

ce qui prouve que la fonction  $H_{xx}^2 + 2H_{xy}^2 + H_{yy}^2$  est invariante par rotation.

## 2.2.2 Spline plaque-mince d'ajustement

Duchon à démontré (Duchon, 1976) que pour un échantillon fini de points  $\mathcal{P} = \{(x_i, y_i, z_i), i = 1, \dots, n\}$  la fonction  $S_\lambda(x, y)$  qui rende minimal une quantité

$$\lambda \iint (S_{xx}^2 + 2S_{xy}^2 + S_{yy}^2) dx dy + \sum_{i=1}^n (S_\lambda(x_i, y_i) - z_i)^2 \quad (\lambda > 0) \quad (2.6)$$

5. La trace d'une matrice carrée est la somme des éléments diagonaux

est unique, de la forme

$$S_\lambda(x,y) = \sum_{i=1}^n a_i K_i(x,y) + a_{n+1} + a_{n+2}x + a_{n+3}y \quad (2.7)$$

avec

$$K_i(x,y) = d_i^2(x,y) \ln(d_i(x,y)) \quad \text{où} \quad d_i = \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2},$$

$$\sum_{i=1}^n a_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n a_i(x_i, y_i) = \mathbf{0},$$

et vérifie l'équation

$$8\pi a_i \lambda + S_\lambda(x_i, y_i) = z_i, \quad i = 1, \dots, n$$

La fonction  $S_\lambda(x,y)$  est appelée spline plaque-mince parce que l'intégrale  $\int \int (S_{xx}^2 + 2S_{xy}^2 + S_{yy}^2) dx dy$ , qui est une mesure de la courbure globale de la surface, est aussi une approximation de l'énergie de flexion de la plaque mince infinie d'équation  $z = S_\lambda(x,y)$ .

Le paramètre  $\lambda$  ( $\lambda > 0$ ) fixe l'importance relative qu'on veut donner à la régularité de  $S$  (lissage) par rapport à l'ajustement de  $S$  sur les points.

La détermination de la fonction spline, c'est-à-dire les calcul des coefficients  $a_i$ ,  $i = 1, \dots, n+3$ , implique la résolution du système linéaire

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (2.8)$$

où

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} + 8\pi\lambda\mathbf{I} & \mathbf{P} \\ \mathbf{P}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ a_{n+1} \\ a_{n+2} \\ a_{n+3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

avec

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_1(x_1, y_1) & \cdots & K_n(x_1, y_1) \\ \vdots & & \vdots \\ K_1(x_n, y_n) & \cdots & K_n(x_n, y_n) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & y_n \end{bmatrix}$$

et  $\mathbf{I}$  la matrice identité d'ordre  $n$ .

D'un point de vue théorique la spline plaque-mince peut sembler préférable à la grille élastique, car celle-ci n'est qu'une approximation discrète de la spline plaque-mince (voir section 2.3.1).

Cependant, le calcul numérique de la spline plaque-mince pose quelques problèmes non-négligeables. En effet, la résolution du système linéaire 2.8 est peu séduisante, quand le nombre de points  $n$  commence à être très grand (Dierckx, 1995) ; dans la pratique quand  $n$  est supérieur<sup>6</sup> à 100. En outre, la matrice  $A$  est pleine et mal conditionnée ; notons par exemple que dans le cas de  $\lambda \rightarrow 0$  les termes sur la diagonale sont nuls et augmentent si on s'éloigne de la diagonale car la fonction  $K_i(x,y)$  est rapidement croissante avec la distance  $d_i$ .

Un autre inconvénient de la spline plaque mince est qu'elle ne permet pas l'introduction des lignes de rupture, c'est-à-dire des lignes de discontinuités de la fonction  $S(x,y)$ , ni l'addition des nouveaux critères de minimisation.

Aussi, pour toutes ces raisons, on a décidé d'utiliser la grille élastique dans la construction des MNT à partir des courbes de niveau.

## 2.3 Améliorations de la grille élastique

Les modifications apportées à la grille élastique consistent, d'une part, à rapprocher les caractéristiques géométriques de la fonction  $H$ , (dérivabilité, courbure) de celles de la fonction spline plaque-mince  $S(x,y)$  ; d'autre part à adapter la méthode aux données d'entrée, c'est-à-dire les courbes de niveau et les points cotés morphologiques<sup>7</sup> (sommets, cols et cuvettes).

### 2.3.1 Courbure invariante par rotation du repère

Le critère de courbure minimisé par la méthode spline plaque-mince est isotrope, c'est-à-dire invariant par rotation du repère ; la minimisation de la courbure de la surface sera donc indépendante du repère choisi.

Pour doter la grille élastique d'un critère de courbure isotrope il faut discrétiser l'expression de la courbure moyenne géométrique qui est donnée par 2.5.

#### Approximation discrète de la courbure :

L'expression 2.5 suppose  $H(x,y)$  de classe  $C^2$ . Dans le cas d'une surface continue mais non deux fois dérivable, la courbure au sens mathématique n'existe pas. Néanmoins, on peut chercher à mesurer une courbure au sens d'un défaut de planéité en approximant l'expression  $H_{xx}^2 + 2H_{yy}^2 + H_{xx}^2$  par différences finies. En effet, en appliquant la formule de

---

6. Pour nous  $n = 100$  représente une petite zone.

7. L'insertion des points cotés dans la grille élastique est faite en utilisant l'expression 2.2.

Taylor :

$$\begin{aligned} H(x+h, y+k) &= H(x, y) + hH_x(x, y) + kH_y(x, y) + \frac{h^2}{2}H_{xx}(x, y) + \frac{k^2}{2}H_{yy}(x, y) + \\ &+ hkH_{xy}(x, y) + \frac{h^3}{6}H_{xxx}(x, y) + \frac{h^2k}{2}H_{xxy}(x, y) + \frac{hk^2}{2}H_{xyy}(x, y) + \\ &+ \frac{k^3}{6}H_{yyy}(x, y) + O(\sqrt{h^2 + k^2}^4) \end{aligned}$$

plusieurs fois, on déduit

$$\begin{aligned} h^2 H_{xx}(x, y) + O(h^4) &= H(x-h, y) - 2H(x, y) + H(x+h, y) \\ 4h^2 H_{xy}(x, y) + O(h^4) &= H(x-h, y-h) - H(x-h, y+h) - H(x+h, y-h) + \\ &+ H(x+h, y+h) \\ h^2 H_{yy}(x, y) + O(h^4) &= H(x, y-h) - 2H(x, y) + H(x, y+h) \end{aligned}$$

Donc, pour le maillage  $\mathcal{M}$  de pas  $h$ , on a

$$\begin{aligned} H_{xx}^2 + H_{yy}^2 + 2H_{xy}^2 &= \frac{1}{h^4} \left[ (z_{c-1,l} - z_{c,l} + z_{c+1,l})^2 + (z_{c,l-1} - z_{c,l} + z_{c,l+1})^2 + \right. \\ &\left. + \frac{1}{8} (z_{c-1,l-1} - z_{c-1,l+1} - z_{c+1,l-1} + z_{c+1,l+1})^2 \right] + O(h^2) \end{aligned}$$

Comme les intégrales peuvent s'approcher par des sommes de Riemann, l'expression 2.5 s'approxime par :

$$\begin{aligned} K_h(H) &\simeq \frac{1}{h^2} \left[ \sum_{c=2}^{N-1} \sum_{l=1}^M (z_{c-1,l} - 2z_{c,l} + z_{c+1,l})^2 + \sum_{c=1}^N \sum_{l=2}^{M-1} (z_{c,l-1} - 2z_{c,l} + z_{c,l+1})^2 + \right. \\ &\left. + \frac{1}{8} \sum_{c=2}^{N-1} \sum_{l=2}^{M-1} (z_{c-1,l-1} - z_{c-1,l+1} - z_{c+1,l-1} + z_{c+1,l+1})^2 \right]. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Cette quantité, qui sera aussi utilisée pour mesurer la courbure globale d'une surface  $H$  continue mais non dérivable, est donc invariante par rotation du repère ; par contre, le critère de courbure minimisé par d'Autume ne l'est pas.

### 2.3.2 Modèle bicubique par morceaux

Le modèle de surface utilisé par d'Autume était un modèle bilinéaire par morceaux de classe  $C^0$ . Ce modèle n'est pas utilisable dans les applications des MNT qui font intervenir les dérivées premières de la fonction  $H(x, y)$ . En effet, beaucoup d'applications cartographiques, telles que le calcul des cartes de pente et d'estompement, font intervenir le calcul de la pente et de l'orientation de la pente (Hodgson and Gayle, 1999).

Il faut donc doter la grille élastique d'un modèle de surface de classe  $C^1$ . Après la présentation du modèle bilinéaire utilisé par d'Autume, nous allons détailler le modèle bicubique qui permet de construire une surface  $C^1$ .

### 2.3.2.1 Surface bilinéaire

La surface est définie par (voir Annexe A)

$$H(x,y) = \sum_{c=1}^N \sum_{l=1}^M z_{c,l} Q\left(\frac{x-x_c}{h}\right) Q\left(\frac{y-y_l}{h}\right)$$

où

$$Q(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{si } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |t| > 1 \end{cases}$$

Soient  $c$  et  $l$  deux entiers tels que  $x = x_c + uh$  et  $y = y_l + vh$  pour  $u, v \in [0,1[$ . Alors, l'expression de la surface  $H(x,y)$  dans l'intervalle  $[x_c, x_{c+1}] \times [y_c, y_{c+1}]$  s'écrit

$$H(u,v) = \sum_{i=c}^{c+1} \sum_{j=l}^{l+1} z_{i,j} Q(u+c-i) Q(v+l-j)$$

En notation matricielle cette expression devient

$$H(x,y) = \mathbf{b}(u)^T \mathbf{A}_{cl} \mathbf{b}(v) \quad (2.10)$$

avec

$$\mathbf{A}_{cl} = \begin{bmatrix} z_{c,l} & z_{c+1,l} \\ z_{c,l+1} & z_{c+1,l+1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}(t) = \begin{bmatrix} Q(t) \\ Q(t-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-t \\ t \end{bmatrix}.$$

Si on désigne par  $q_i$  les coefficients d'interpolation suivants

$$\begin{array}{c|cc} \times & Q(v) & Q(v-1) \\ \hline Q(u) & q_1 & q_3 \\ Q(u-1) & q_2 & q_4 \end{array}.$$

on a

$$H(x,y) = q_1 z_{c,l} + q_2 z_{c+1,l} + q_3 z_{c,l+1} + q_4 z_{c+1,l+1}.$$

### 2.3.2.2 Surface bicubique

Pour avoir une continuité  $C^1$  on utilise le modèle de surface bicubique par morceaux défini par (voir Annexe A)

$$H(x,y) = \sum_{c=1}^N \sum_{l=1}^M z_{c,l} U\left(\frac{x-x_c}{h}\right) U\left(\frac{y-y_c}{h}\right) \quad (2.11)$$

où

$$U(t) = \begin{cases} \frac{3}{2}|t|^3 - \frac{5}{2}|t|^2 + 1 & \text{si } 0 \leq |t| \leq 1 \\ -\frac{1}{2}|t|^3 + \frac{5}{2}|t|^2 - 4|t| + 2 & \text{si } 1 \leq |t| \leq 2 \\ 0 & \text{si } |t| \geq 2 \end{cases} \quad (2.12)$$

Soient  $c$  et  $l$  deux entiers tels que  $x = x_c + uh$  et  $y = y_l + vh$  pour  $u, v \in [0,1[$ , la formule précédente peut s'écrire sous la forme

$$H(x,y) = \sum_{i=c-1}^{c+2} \sum_{j=l-1}^{l+2} z_{i,j} U(u+c-i) U(v+l-j)$$

En notation matricielle cette expression devient

$$H(x,y) = \mathbf{b}^T(v) \mathbf{A}(c,l) \mathbf{b}(u) \quad (2.13)$$

où

$$\mathbf{A}(c,l) = \begin{bmatrix} z_{c-1,l-1} & z_{c,l-1} & z_{c+1,l-1} & z_{c+2,l-1} \\ z_{c-1,l} & z_{c,l} & z_{c+1,l} & z_{c+2,l} \\ z_{c-1,l+1} & z_{c,l+1} & z_{c+1,l+1} & z_{c+2,l+1} \\ z_{c-1,l+2} & z_{c,l+2} & z_{c+1,l+2} & z_{c+2,l+2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}(t) = \begin{bmatrix} U(t+1) \\ U(t) \\ U(t-1) \\ U(t-2) \end{bmatrix};$$

ou, en utilisant l'expression 2.12,

$$\mathbf{b}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}t^3 + t^2 - \frac{1}{2}t \\ \frac{3}{2}t^3 - \frac{5}{2}t^2 + 1 \\ -\frac{3}{2}t^3 + 2t^2 + \frac{1}{2}t \\ \frac{1}{2}t^3 - \frac{1}{2}t^2 \end{bmatrix}$$

Désignant par  $u_i$  les coefficients d'interpolation suivants :

$\times$	$U(v+1)$	$U(v)$	$U(v-1)$	$U(v-2)$	(2.14)
$U(u+1)$	$u_1$	$u_5$	$u_9$	$u_{13}$	
$U(u)$	$u_2$	$u_6$	$u_{10}$	$u_{14}$	
$U(u-1)$	$u_3$	$u_7$	$u_{11}$	$u_{15}$	
$U(u-2)$	$u_4$	$u_8$	$u_{12}$	$u_{16}$	

on a

$$H(x,y) = u_1 z_{c-1,l-1} + u_2 z_{c,l-1} + u_3 z_{c+1,l-1} + u_4 z_{c+2,l-1} + \dots + u_{13} z_{c-1,l+2} + u_{14} z_{c,l+2} + u_{15} z_{c+1,l+2} + u_{16} z_{c+2,l+2}$$

Comme la surface est de classe  $C^1$  (voir Annexe A) on peut calculer les premières dérivées de la fonction  $H_x = \frac{\partial H}{\partial x}$  et  $H_y = \frac{\partial H}{\partial y}$ , en un point  $(x,y)$  quelconque :

$$H_x(x,y) = \frac{1}{h} \sum_{c=1}^N \sum_{l=1}^M U'\left(\frac{x-x_c}{h}\right) U\left(\frac{y}{h} - l\right) z_{c,l}$$

$$H_y(x,y) = \frac{1}{h} \sum_{c=1}^N \sum_{l=1}^M U\left(\frac{x-x_c}{h}\right) U'\left(\frac{y-y_l}{h}\right) z_{c,l}$$

où  $U'(t)$  est la fonction impaire ( $U'(-t) = -U'(t)$ ) donnée par

$$U'(t) = \begin{cases} \frac{9}{2}t^2 - 5t & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ -\frac{3}{2}t^2 + 5t - 4 & \text{si } 1 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{si } t \geq 2 \end{cases}$$

En notation matriciel on a

$$H_x(x,y) = \frac{1}{h} \mathbf{b}^T(v) \mathbf{A}(c,l) \mathbf{b}'(u) \quad \text{et} \quad H_y(x,y) = \frac{1}{h} \mathbf{b}'^T(v) \mathbf{A}(c,l) \mathbf{b}(u) \quad (2.15)$$

avec

$$\mathbf{b}'(t) = \begin{bmatrix} U'(t+1) \\ U'(t) \\ U'(t-1) \\ U'(t-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2}t^2 + 2t - \frac{1}{2} \\ \frac{9}{2}t^2 - 5t \\ \frac{1}{2} + 4t - \frac{9}{2}t^2 \\ -t + \frac{3}{2}t^2 \end{bmatrix}$$

Puisque aux noeuds  $(x_{c,l}, y_{c,l})$  on a  $\mathbf{b}(0) = [0, 1, 0, 0]^T$  et  $\mathbf{b}'(0) = [-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0]^T$ , les dérivées de la fonction  $H$  ont une expression simple :

$$H_x(x,y) = \frac{1}{2h} (z_{c+1,l} - z_{c-1,l}) \quad \text{et} \quad H_y(x,y) = \frac{1}{2h} (z_{c,l+1} - z_{c,l-1})$$

### 2.3.3 Contraintes-inégalités sur l'altitude des noeuds

Le fait d'avoir un échantillon formé par des courbes de niveau nous permet d'introduire des contraintes sur l'altitude des noeuds de la grille. En effet, pour chaque noeud il est toujours possible de déterminer les deux courbes de niveau qui l'encadrent (voir figure 2.3). Donc, nous imposons à la surface  $H(x,y)$  de satisfaire en chaque noeud  $m_{c,l} = (x_c, y_l)$  les conditions :

$$Z_1(c,l) \leq H(x_c, y_l) = z_{c,l} \leq Z_2(c,l) \quad (2.16)$$

où  $Z_1(c,l)$ ,  $Z_2(c,l)$  sont les altitudes des deux courbes encadrant le noeud.

## 2.4 Choix des poids

Le choix des valeurs des poids  $w_i$  est un aspect important de la méthode de la grille élastique. En effet, comme la fonction d'ajustement  $H(x,y)$  est définie par la propriété

$$E(H) = \sum_{i=1}^n w_i [H(x_i, y_i) - z_i]^2 + E_{\text{courbure}}(H) \quad \text{minimal}, \quad (2.17)$$

les poids  $w_i$  règlent l'importance qu'on veut accorder à chaque point  $(x_i, y_i, z_i)$  par rapport aux autres, mais aussi l'importance du critère d'ajustement de l'échantillon  $E_{\text{échantillon}}$  par

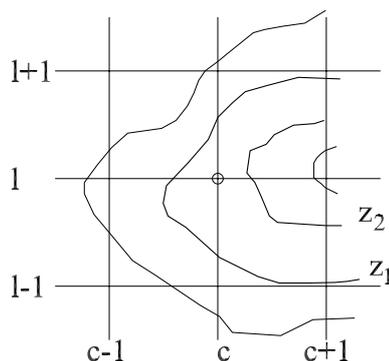


FIG. 2.3 – Contraintes-inégalités sur l'altitude des noeuds « o ».

rapport au critère de courbure  $E_{\text{courbure}}$ . Pour dissocier ces deux rôles il est préférable d'écrire

$$E_h(H) = \lambda \sum_{i=1}^n \mu_i [H(x_i, y_i) - z_i]^2 + E_{\text{courbure}}(H) \text{ avec } \sum_{i=1}^n \mu_i = 1. \quad (2.18)$$

$\lambda$  fixe l'importance du critère  $\sum_i \mu_i (H(x_i, y_i) - z_i)^2$  par rapport au critère  $E_{\text{courbure}}$ .

Remarquons d'abord que dans le cas théorique où chaque point d'échantillon  $\mathcal{P}$  est sélectionné avec soin, de façon à être le plus représentatif possible, sans redondance avec ses voisins, et mesuré par une méthode de précision connue chiffrée par un écart-type  $\sigma_i$ , un poids

$$w_i = \frac{1/\sigma_i^2}{\sum_{j=1}^n 1/\sigma_j^2}$$

est naturel.

### 2.4.1 Poids relatifs

Le problème de répartir les poids relatifs  $w_i$  se pose dans le cas où l'échantillon  $\mathcal{P}$  est constitué par des points prélevés sur des courbes de niveau (éventuellement assortis de points supplémentaires, voir chapitre 3). Le choix le plus simple est bien sûr de donner le même poids  $\mu_i$  à tous les points. Ce choix n'est pas satisfaisant car la répartition des points de l'échantillon peut être hétérogène, en raison de la répartition irrégulière des courbes, et des variations de l'intervalle de prélèvement le long des courbes. Des poids uniformes feraient dévier la fonction d'ajustement  $H$  vers les portions de terrain échantillonnées finement, ce qui est inacceptable, car  $H$  n'a aucune raison d'être affectée par le pas d'échantillonnage. Pour éviter cet inconvénient, il faut donc que les poids  $\mu_i$  soient faibles là où l'échantillon est dense, et forts là où l'échantillon est clairsemé. En d'autres termes un poids  $\mu_i$  doit être faible lorsque le point  $p_i = (x_i, y_i)$  est représentatif d'une région  $A_i$  petite, et fort lorsque le point est représentatif d'une région  $A_i$  plus vaste. Ceci amène à

poser que  $\mu_i$  est une fonction croissante de l'aire  $|A_i|$  de la région  $A_i$  :

$$\mu_i = f(|A_i|).$$

En outre cette fonction  $f$  ne peut être que linéaire, car si on réunit deux régions contiguës  $A_i, A_j$  en une seule  $A_i \cup A_j$ , le poids de la réunion doit être la somme des poids :

$$f(|A_i| + |A_j|) = \mu_i + \mu_j = f(|A_i|) + f(|A_j|).$$

Ainsi

$$\mu_i = \kappa |A_i|$$

et la condition de normalisation  $\sum \mu_i = 1$  impose

$$\kappa = 1 / \sum |A_i|.$$

Il reste à préciser ce qu'est la région  $A_i$  représentée par le point  $p_i$ . Il est naturel de la définir comme celle de l'ensemble des points  $p$  qui sont plus proches de  $p_i$  que des autres points  $p_j$ . On sait que cet ensemble est un polygone  $V_i$ , et que la famille  $\{V_i; i = 1, \dots, n\}$  forme le « diagramme de Voronoï » associé aux points  $p_i$ .

La figure 2.4 montre un extrait d'un diagramme de Voronoï associé à un échantillon de points issu des courbes de niveau. On peut observer que les poids des points «  $\bullet$  » sont répartis en fonction de la densité des courbes de niveau : plus la pente est forte plus les poids sont petits.

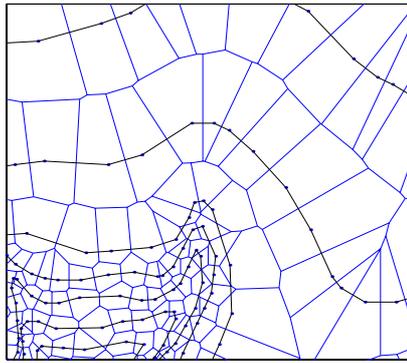


FIG. 2.4 – Choix des poids relatifs  $w_i$  des points des courbes de niveau.

En résumé, un système cohérent de poids  $w_i$  nous semble devoir être défini par :

$$w_i = \lambda \frac{|V_i|}{\sum_{j=1}^n |V_j|} \quad (2.19)$$

où  $|V_i|$  est l'aire du polygone  $V_i$ .

### 2.4.2 Coefficient de lissage

Le paramètre  $\lambda$  ( $\lambda > 0$ ) fixe l'importance relative qu'on veut donner à la régularité de  $H$  (lissage) par rapport à l'ajustement de  $H$  sur les points ; donc on l'appelle coefficient de lissage.

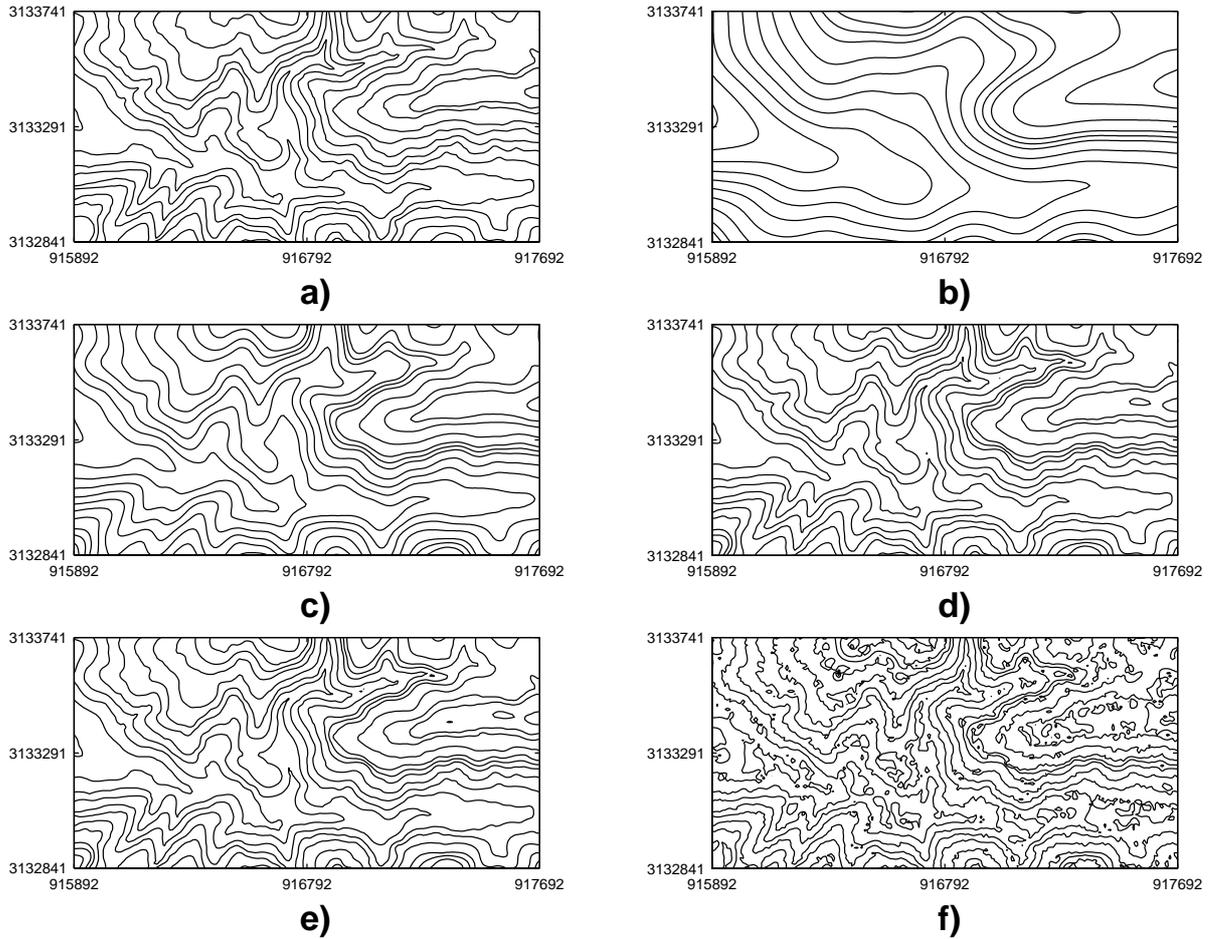


FIG. 2.5 – Influence du paramètre  $\lambda$  dans la grille élastique. a) Courbes de niveau de départ. b-f) Courbes du MNT calculé avec  $\lambda = 10^{-1}, 10, 10^3, 10^5, 10^8$  respectivement.

D'un point de vue théorique, si  $\lambda = 0$  tout le plan est un minimum de  $E_h(H)$  ; si  $\lambda$  est très grand la minimisation de  $E_h(H)$  sera dominé par le critère  $\lambda \sum_i \mu_i (H(x_i, y_i) - z_i)^2$  qui atteint sa valeur minimum lorsque  $z_i = H(x_i, y_i)$ . Dans la pratique le choix de la valeur  $\lambda$  est fait manuellement, par des approximations successives, et de façon à que l'écart entre les courbes initiales et les courbes MNT de mêmes cotes soit le plus faible possible.

La figure 2.5 montre l'influence du paramètre  $\lambda$  dans le lissage de la surface. La figure 2.5-a montre les courbes de niveau initiales sur lesquelles on a ajusté des surfaces correspondant à différentes valeurs de  $\lambda$  (b-f). La comparaison des courbes de niveau des figures 2.5-b à 2.5-e indique qu'on peut ajuster de façon satisfaisante une surface par la grille

élastique sur un large intervalle des valeurs  $\lambda$  (c'est-à-dire  $\lambda \in [10^3, 10^5]$ , correspondant aux figures d et e). Remarquons, cependant, que le choix d'une valeur excessive pour  $\lambda$  conduit à l'apparition de petits sommets et de petites cuvettes gênant la description de la surface.

## 2.5 Minimisation du critère $E(H)$

Le MNT grille élastique, défini par l'altitude  $z_{c,l}$  des noeuds  $m_{c,l}$ , ( $c = 1, N$  ;  $l = 1, M$ ) et par la fonction  $H$ , est obtenu par la minimisation du critère

$$E_h(H) = E_{\text{courbure}}(H) + E_{\text{echantillon}}(H).$$

Dans ce paragraphe nous verrons d'abord dans quelles conditions le problème de minimisation admet toujours une et une seule solution; ensuite nous décrirons l'algorithme utilisé dans la résolution numérique du problème de minimisation.

### 2.5.1 Expression matricielle

L'écriture explicite de  $E_h(H)$  donne

$$\begin{aligned} E_h(H) = & \sum_i w_i \left( \sum_{c,l} z_{cl} V\left(\frac{x_i}{h} - c\right) V\left(\frac{y_i}{h} - l\right) - z_i \right)^2 + \\ & + \frac{1}{h^2} \left( \sum_{c,l} (z_{c-1,l} - 2z_{c,l} + z_{c+1,l})^2 + \sum_{c,l} (z_{c,l-1} - 2z_{c,l} + z_{c,l+1})^2 \right) + \\ & + \frac{1}{8} \sum_{c,l} (z_{c-1,l-1} - z_{c-1,l+1} - z_{c+1,l-1} + z_{c+1,l+1})^2. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Notons par  $\mathbf{z}$  le vecteur des inconnues  $z_{c,l}$  ( $c = 1, \dots, N$ ,  $l = 1, \dots, M$ )

$$\mathbf{z} = [z_{11}, \dots, z_{N1}, z_{12}, \dots, z_{N2}, \dots, z_{1M}, \dots, z_{NM}]^T$$

Soient  $\mathbf{B}_i$ ,  $\mathbf{C}_{cl}$ ,  $\mathbf{D}_{cl}$  et  $\mathbf{F}_{cl}$  des vecteurs tels que

$$\mathbf{B}_i^T \mathbf{z} = \sum_{c,l} z_{cl} V\left(\frac{x_i}{h} - c\right) V\left(\frac{y_i}{h} - l\right) \quad (2.21a)$$

$$\mathbf{C}_{cl}^T \mathbf{z} = z_{c-1,l} - 2z_{c,l} + z_{c+1,l} \quad (2.21b)$$

$$\mathbf{D}_{cl}^T \mathbf{z} = z_{c,l-1} - 2z_{c,l} + z_{c,l+1} \quad (2.21c)$$

$$\mathbf{F}_{cl}^T \mathbf{z} = z_{c-1,l-1} - z_{c-1,l+1} - z_{c+1,l-1} + z_{c+1,l+1} \quad (2.21d)$$





### 2.5.2 Conditions d'existence et d'unicité de la solution

On va maintenant prouver (Julien, 1994) que l'introduction du critère d'élasticité  $E_{\text{courbure}}(H)$  entraîne bien l'unicité de la solution quel que soit l'échantillon. Plus précisément on se propose de montrer qu'une condition suffisante pour que  $E(H)$  admette un minimum et un seul est qu'il y ait dans l'échantillon trois points  $(x_i, y_i, z_i)_{i=1,2,3}$  tels que

$$\det \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix} \neq 0. \quad (2.25)$$

Autrement dit que le plan défini par ces trois points ne soit pas vertical; en pratique cette condition est toujours remplie.

On sait que la fonctionnelle  $J(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^T \mathbf{A} \mathbf{z} - 2\mathbf{b}^T \mathbf{z} + \mathbf{c}$  est minimale lorsque  $\mathbf{A} \mathbf{z} = \mathbf{b}$ . Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait un et un seul  $\mathbf{z}$  est que  $A$  soit définie positive (Ciarlet, 1982). On va montrer que si la condition 2.25 est vérifiée, la matrice  $A$  est définie positive.

D'abord la matrice  $A$  est symétrique car elle est la somme de matrices symétriques; elle est aussi positive puisque

$$\mathbf{z}^T \mathbf{A} \mathbf{z} = \sum_i w_i (\mathbf{B}_i^T \mathbf{z})^2 + \frac{1}{h^2} \left[ \sum_{c,l} (\mathbf{C}_{cl}^T \mathbf{z})^2 + \sum_{c,l} (\mathbf{D}_{cl}^T \mathbf{z})^2 + \frac{1}{8} \sum_{c,l} (\mathbf{F}_{cl}^T \mathbf{z})^2 \right] \geq 0 \quad \forall \mathbf{z} \in \mathbb{R}^{NM}$$

Il faut donc prouver que

$$\mathbf{z}^T \mathbf{A} \mathbf{z} = 0 \Rightarrow \mathbf{z} = \mathbf{0}$$

La condition  $\mathbf{z}^T \mathbf{A} \mathbf{z} = 0$  implique :

$$\mathbf{B}_i^T \mathbf{z} = 0 \quad \forall i \quad ; \quad \mathbf{C}_{cl}^T \mathbf{z} = 0 \quad \forall c, l \quad ; \quad \mathbf{D}_{cl}^T \mathbf{z} = 0 \quad \forall c, l \quad ; \quad \mathbf{F}_{cl}^T \mathbf{z} = 0 \quad \forall c, l$$

Mais si  $\mathbf{C}_{cl}^T \mathbf{z} = 0$ , d'après 2.21b  $z_{1,l} - z_{2,l} - z_{c,l} + z_{c+1,l} = 0$  et  $z_{c+1,l} = cz_{2,l} - (c-1)z_{1,l}$ . Donc,

$$z_{c,l} = z_{1,l} + (c-1)(z_{2,l} - z_{1,l}) \quad \forall c, l$$

De même  $\mathbf{D}_{cl}^T \mathbf{z} = 0$  implique

$$z_{c,l} = z_{c,1} + (l-1)(z_{c,2} - z_{c,1}) \quad \forall c, l.$$

En combinant ces deux dernières équations on trouve

$$\begin{aligned} z_{c,l} = & 4z_{1,1} - 2z_{1,2} - 2z_{2,1} + z_{2,2} + (2z_{2,1} - z_{2,2} - 2z_{1,1} + z_{1,2})c + \\ & + (2z_{1,2} - 2z_{1,1} - z_{2,2} + z_{2,1})l + (z_{2,2} - z_{2,1} - z_{1,2} + z_{1,1})cl \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$z_{c,l} = a_0 + a_1 c + a_2 l + a_3 cl \quad \forall c, l.$$

En utilisant cette équation et en tenant compte de 2.21d on trouve  $\mathbf{F}_{cl}^T \mathbf{z} = 4a_3$ . Mais les conditions  $\mathbf{F}_{cl}^T \mathbf{z} = 0$  impliquent  $a_3 = 0$ , donc  $z_{c,l} = a_0 + a_1 c + a_2 l \quad \forall c, l$ . Ainsi

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_i^T \mathbf{z} &= a_0 \sum_{c,l} V\left(\frac{x_i}{h} - c\right) V\left(\frac{y_i}{h} - l\right) + a_1 \sum_{c,l} c V\left(\frac{x_i}{h} - c\right) V\left(\frac{y_i}{h} - l\right) + \\ &+ a_3 \sum_{c,l} l V\left(\frac{x_i}{h} - c\right) V\left(\frac{y_i}{h} - l\right) \end{aligned}$$

Or, les fonctions  $Q$  et  $U$  sont exactes pour tout polynôme  $P(x)$  de degré  $\leq 1$  (voir annexe A); alors dans le cas de  $V = Q$  ou  $V = U$ , on a

$$P(x) = 1 = \sum_c V\left(\frac{x}{h} - c\right) \text{ et } P(x) = \frac{x}{h} = \sum_c V\left(\frac{x}{h} - c\right) c;$$

d'où

$$\mathbf{B}_i^T \mathbf{z} = a_0 + a_1 \frac{x_i}{h} + a_2 \frac{y_i}{h} = 0 \quad \forall i.$$

En particulier avec les trois points  $(x_i, y_i, z_i)_{i=1,2,3}$  de l'énoncé on obtient le système

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{x_1}{h} & \frac{y_1}{h} \\ 1 & \frac{x_2}{h} & \frac{y_2}{h} \\ 1 & \frac{x_3}{h} & \frac{y_3}{h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Par hypothèse  $(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) \neq 0$ , donc  $a_0 = a_1 = a_2 = 0$ ; d'où

$$\mathbf{z} = \mathbf{0}$$

et donc la matrice  $A$  est définie positive.

### 2.5.3 Algorithme numérique

On a vu que la résolution du problème de minimisation de la fonctionnelle quadratique  $E(z)$  est équivalent à la résolution du système linéaire

$$Az = b \tag{2.26}$$

où  $A$  est une matrice définie positive de dimension  $(NM, NM)$ .

On pourrait penser à utiliser un méthode directe pour la résolution de 2.26. Mais, dans la pratique, même pour un MNT petit, disons  $M = N = 100$ , la matrice  $A$  est déjà très volumineuse. Par conséquent, la mise en oeuvre informatique d'un méthode directe est hors de question car ces méthodes ont l'inconvénient de remplir cette matrice. Or, les calculs effectués dans le paragraphe 2.5.1 nous montrent que la matrice  $A$  est très creuse. On peut donc utiliser une méthode itérative dans la résolution de ce système linéaire.

Parmi les méthodes itératives on a choisi la méthode du gradient conjugué en raison de sa stabilité. En effet, même dans le cas où la matrice  $A$  est très mal conditionnée,

elle donne un résultat très plausible (Baranger, 1991). Cette méthode est définie par l'algorithme suivant :

$$\begin{array}{l} \text{Etant donné un vecteur initial } z_0 \text{ calculer :} \\ \text{et pour } i \geq 1 \end{array} \left\| \begin{array}{l} d_0 = r_0 = A z_0 - b \\ z_1 = z_0 - \frac{r_0^T d_0}{d_0^T A d_0} \cdot d_0 \\ r_i = A z_i - b \\ d_i = r_i + \frac{r_i^T r_i}{r_{i-1}^T r_{i-1}} \cdot d_{i-1} \\ z_{i+1} = z_i - \frac{r_i^T d_i}{d_i^T A d_i} \cdot d_i \end{array} \right.$$

Les tests d'arrêt peuvent porter sur différents critères tels que la valeur de  $E(z)$ , la norme  $\|Az_k - b\|$  ; on a préféré le test sur la norme car, dans la pratique, il est plus robuste que le test sur la valeur de  $E(z)$ .

Dans la théorie on sait que si  $A$  est *symétrique définie positive* l'algorithme converge en  $NM$  itérations au plus. En pratique  $z$  peut être atteint en beaucoup moins de  $NM$  itérations, et d'autant plus vite que la valeur initiale  $z_0$  est proche de  $z$ .

L'expérience montre que la convergence est surtout lente lorsque qu'il y a de vastes zones sans points d'échantillon ; intuitivement, dans ces zones la grille élastique n'est pas soumise à des contraintes extérieures, et met donc du temps à se stabiliser. Dans ces cas, l'introduction d'une grille initiale (c'est-à-dire le vecteur  $z_0$ ), peut accélérer le calcul de la grille élastique.

La construction de cette grille initiale est faite ici par une méthode sommaire, car on gagne peu (quelques itérations) à utiliser une méthode perfectionnée, comme par exemple celle décrite dans (Cheng and Idesawa, 1986), ou celle utilisée à l'IGN (interpolation linéaire sur quatre directions). Pour les essais présentés ici la grille initiale est calculée de

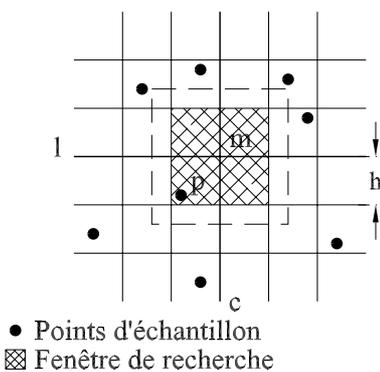


FIG. 2.6 – Construction du vecteur  $z_0$

la façon suivante : pour chaque noeud  $m_{cl}$  de coordonnées maille  $(c_m, l_m)$  son altitude  $z_0$  est définie par

$$z_0(c, l) = \text{moyenne}\{z_p; d_8(m_{cl}, p_{cl}) \leq 2^{n-1}\} \quad \text{avec } d_8 = \max\{|c_m - c_p|, |l_m - l_p|\}$$

c'est-à-dire par la moyenne des altitudes des points  $p_{cl} = (c_p, l_p)$  qui tombent dans une fenêtre de recherche de taille  $n \times n$ , ( $n = 1, \dots, \max\{N, M\}$ ), voir figure 2.6. S'il n'y a

---

pas de points, la taille de cette fenêtre est progressivement doublée deux fois ( $n = n + 1$ ) jusqu'à ce qu'on trouve au moins un point  $p_{cl}$  qui vérifie la relation précédente.

Finalement, il reste à introduire, dans l'algorithme, les contraintes indiquées dans l'équation 2.16. Nous vérifions en fin de calcul que ces contraintes sont satisfaites. En chaque noeud  $(c,l)$  où ces contraintes ne sont pas vérifiées, on crée un nouveau point d'échantillon  $(x_P, y_P, z_P)$  où  $z_1(c,l) \leq z_P \leq z_2(c,l)$ , avec un poids  $w_P$  assez fort pour maintenir la surface sur ce point ; puis on résout la nouvelle équation  $Az = b$ . On répète l'opération jusqu'à ce que la surface satisfasse toutes les contraintes-inégalités.

## Chapitre 3

# Essais de solution au problème des courbes intercalaires

Dans le chapitre 1 nous avons proposé une condition nécessaire et suffisante pour que le modèle numérique soit équivalent au modèle cartographique : cette condition exprime simplement que les courbes de niveau intercalaires du MNT doivent respecter la forme des courbes initiales (c'est-à-dire les courbes originales dont le MNT est issu).

En général, cette condition n'est pas satisfaite par le MNT grille élastique. En effet, on observe un léger amollissement dans la forme des courbes intercalaires, surtout dans les fonds de vallées et dans les zones de crêtes. Cela indique que, sur ces zones, l'échantillon utilisé par la grille élastique n'était pas totalement représentatif de la morphologie du terrain.

La solution au problème des courbes intercalaires, et par conséquent l'élimination de ce type d'artefacts, passe alors nécessairement par « l'enrichissement » de l'échantillon d'informations supplémentaires relatives à la morphologie du terrain. Or, le modèle cartographique, donné par les courbes de niveau et la règle d'interpolation linéaire suivant la ligne de plus grande pente, contient plus d'information que la simple altitude des points des courbes. En fait, comme nous allons le préciser, ce modèle contient des informations sur :

- la direction de l'horizontale (information explicite en chaque point d'une courbe) ;
- les lignes de crête et talweg (information implicite dans le réseau des courbes).

L'enrichissement de l'échantillon sera fait ici par l'addition d'information relative aux directions de l'horizontale et/ou aux lignes caractéristiques du terrain (crêtes et talwegs). D'autres lignes caractéristiques présentent aussi un intérêt morphologique important, par exemple les lignes de rupture de pente. Toutefois, quelques essais non relatés ici semblent montrer que leur extraction à partir des courbes de niveau est un problème complexe qui mériterait d'être étudié plus en détail.

## 3.1 Contraintes sur les directions de l'horizontale

### 3.1.1 Principe

Nous avons vu que les courbes de niveau sont aussi un moyen de figurer des formes du relief. Autrement dit, les formes du relief sont représentées, dans les courbes de niveau, par la direction de l'horizontale. En un point quelconque  $(x,y)$  du modèle cartographique, cette direction est définie par le vecteur unitaire  $\vec{t}$ , tangent en  $(x,y)$  à la courbe de niveau qui passe par ce point. On suppose toujours que le sens de  $\vec{t}$  est tel que le sens de la ligne de plus grande pente ascendante ( $\vec{P}$ ) se déduit de  $\vec{t}$  par une rotation de  $\frac{\pi}{2}$  (autour de  $\vec{N}$ ) dans le sens trigonométrique; c'est-à-dire un observateur qui suit la direction de l'horizontale voit la partie basse du terrain à sa droite (voir figure 3.1).

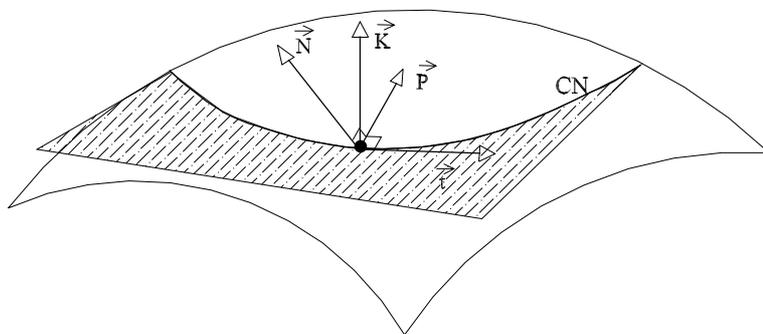


FIG. 3.1 – Définition de la direction de l'horizontale.

Le fait que la forme des courbes intercalaires étaient plus « molles » et donc moins rigides que les courbes normales (voir figure 1.3) nous a suggéré l'idée d'une première solution au problème des courbes intercalaires: forcer la surface à être contrainte, en certains points, aux directions de l'horizontale  $\vec{t}$ .

Considérons un repère cartésien orthonormé  $\{O; \vec{I}, \vec{J}, \vec{K}\}$  et soit

$$\vec{OM}(x,y) = x\vec{I} + y\vec{J} + H(x,y)\vec{K}$$

une représentation vectorielle de la surface numérique  $H(x,y)$ . Notons par  $\vec{t}$  le vecteur unitaire que définit dans le plan  $(O; \vec{I}, \vec{J})$  la direction de l'horizontale

$$\vec{t} = \cos\theta\vec{I} + \sin\theta\vec{J}.$$

avec  $\theta = \widehat{(\vec{I}, \vec{t})}$ .

Sur la surface  $\vec{OM}$  la direction de l'horizontale est définie par le produit vectoriel

$$\vec{T} = \vec{K} \wedge \vec{N}$$

où  $\vec{N}$  est la normale unitaire à la surface, définie par

$$\vec{N} = \frac{-H_x \vec{I} - H_y \vec{J} + \vec{K}}{\sqrt{1 + H_x^2 + H_y^2}} \quad (3.1)$$

avec  $H_x$  et  $H_y$  les dérivées partielles de  $H$ , c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} - H_x &= \frac{1}{h} \sum_{c=1}^N \sum z_{c,l} U'(\frac{x}{h} - c) U(\frac{y}{h} - l); \\ - H_y &= \frac{1}{h} \sum \sum z_{c,l} U(\frac{x}{h} - c) U'(\frac{y}{h} - l); \end{aligned}$$

$h$  est le pas de la grille.

Obliger la surface  $H$  à être contrainte, sur un point  $(x_i, y_i)$ , à une direction  $\vec{t}_i$ , revient à exiger que les vecteurs  $\vec{t}_i$  et  $\vec{T}_i$  soient colinéaires, c'est-à-dire (voir figure 3.1) :

$$\vec{t}_i \wedge (\vec{N}_i \wedge \vec{K}) = 0 \quad (3.2)$$

Remarquons que pour pouvoir définir la direction de l'horizontale en un point  $(x, y)$  quelconque de la surface numérique il faut que  $H(x, y)$  soit de classe  $C^1$  ; dans notre cas, cela oblige donc à choisir le modèle bicubique par morceau (et non le modèle bilinéaire), c'est-à-dire,  $H$  à être définie par l'équation 2.11.

### 3.1.2 Expression des contraintes

L'introduction, dans la méthode de la grille élastique, des contraintes du type de l'équation 3.2 est faite par l'addition d'un nouveau terme  $E_{\text{tangentes}}$  au critère  $E_h(H)$ , donné par l'équation 2.18. Supposons définies les directions de l'horizontale  $\vec{t}_i$  en  $r$  points de coordonnées  $(x_i, y_i)$  ; alors,

$$E_{\text{tangentes}} = \sum_{i=1}^r \nu_i \left[ \vec{t}_i \wedge (\vec{N}_i \wedge \vec{K}) \right]^2$$

où  $\nu_i$  est un poids positif ( $\nu_i > 0$ ) attribué à l'estimation de la tangente  $\vec{t}_i$  au point  $(x_i, y_i)$ .

Compte tenu des propriétés du double produit vectoriel, à savoir

$$\vec{t}_i \wedge (\vec{N}_i \wedge \vec{K}) = -(\vec{t}_i \cdot \vec{N}_i) \vec{K},$$

on obtient

$$E_{\text{tangentes}} = \sum_{i=1}^r \nu_i \left[ \frac{\cos \theta_i H_x(x_i, y_i) + \sin \theta_i H_y(x_i, y_i)}{\sqrt{1 + H_x^2(x_i, y_i) + H_y^2(x_i, y_i)}} \right]^2 \quad (3.3)$$

où  $\theta_i$  est donnée par  $\vec{t}_i = \cos \theta_i \vec{I} + \sin \theta_i \vec{J}$ .

Désignons par

$$\mathbf{B}_{x,i}^T \mathbf{z} = \sum_{c=1}^N \sum_{l=1}^M z_{c,l} U' \left( \frac{x_i}{h} - c \right) U \left( \frac{y_i}{h} - l \right)$$

$$\mathbf{B}_{y,i}^T \mathbf{z} = \sum_{c=1}^N \sum_{l=1}^M z_{c,l} U \left( \frac{x_i}{h} - c \right) U' \left( \frac{y_i}{h} - l \right)$$

on a

$$E_{\text{tangentes}} = \frac{1}{h^2} \sum_{i=1}^r \nu_i \frac{[(\cos \theta_i \mathbf{B}_{x,i}^T + \sin \theta_i \mathbf{B}_{y,i}^T) \mathbf{z}]^2}{1 + \mathbf{z}^T (\mathbf{B}_{x,i} \mathbf{B}_{x,i}^T + \mathbf{B}_{y,i} \mathbf{B}_{y,i}^T) \mathbf{z}}$$

Or, cette expression montre que le terme  $E_{\text{tangentes}}$  est non-quadratique en  $\mathbf{z}$ , l'inconnue<sup>9</sup> du problème de minimisation, car le dénominateur,  $\Delta(x_i, y_i) = 1 + H_x^2(x_i, y_i) + H_y^2(x_i, y_i)$ , est une fonction de  $\mathbf{z}$ .

Une façon d'éviter la linéarisation de  $E_{\text{tangentes}}$  consiste à résoudre le problème de minimisation par des approximations successives, en considérant  $\Delta(x_i, y_i)$  constant à chaque étape. En d'autres termes, on part d'une approximation initiale de  $\Delta(x_i, y_i)$  (par exemple 1,  $\forall i$ ) et on calcule le vecteur  $\mathbf{z}_1$  qui minimise le critère  $E_h(H)$  (voir équation 3.4); ensuite, à partir de cette surface  $\mathbf{z}_1$  on calcule les valeurs  $\Delta(x_i, y_i)$  et on cherche un nouveau  $\mathbf{z}_2$  minimisant  $E_h(H)$ . On répète ces opérations jusqu'à ce que

$$\max_j \{ |\mathbf{z}_k^j - \mathbf{z}_{k-1}^j| \} < \varepsilon$$

où  $k$  désigne l'itération et  $\varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ) est une constante fixée a priori (pour les essais présentés ici  $\varepsilon = 10^{-4}$ ).

Cela revient à considérer, en chaque étape du problème de minimisation, un poids  $\bar{w}_i = \frac{\nu_i}{\Delta(x_i, y_i)}$ , ( $i = 1, \dots, r$ ) et donc à minimiser le critère

$$E_{\text{tangentes}} = \frac{1}{h^2} \sum \bar{w}_i (\mathbf{S}_i^T \mathbf{z})^2$$

où  $\mathbf{S}_i = (\cos \theta_i \mathbf{B}_{x,i}^T + \sin \theta_i \mathbf{B}_{y,i}^T)$ .

Calculons maintenant l'expression matricielle du critère  $E_h(H)$ . Notons par

$$\mathbf{S} = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} \cos \theta_1 \bar{U}'_{x_1} U(\frac{y_1}{h} - 1) + \sin \theta_1 \bar{U}_{x_1} U'(\frac{y_1}{h} - 1) & \cdots & \cos \theta_1 \bar{U}'_{x_1} U(\frac{y_1}{h} - M) + \sin \theta_1 \bar{U}_{x_1} U'(\frac{y_1}{h} - M) \\ \vdots & & \vdots \\ \cos \theta_i \bar{U}'_{x_i} U(\frac{y_i}{h} - 1) + \sin \theta_i \bar{U}_{x_i} U'(\frac{y_i}{h} - 1) & \cdots & \cos \theta_i \bar{U}'_{x_i} U(\frac{y_i}{h} - M) + \sin \theta_i \bar{U}_{x_i} U'(\frac{y_i}{h} - M) \\ \vdots & & \vdots \\ \cos \theta_r \bar{U}'_{x_r} U(\frac{y_r}{h} - 1) + \sin \theta_r \bar{U}_{x_r} U'(\frac{y_r}{h} - 1) & \cdots & \cos \theta_r \bar{U}'_{x_r} U(\frac{y_r}{h} - M) + \sin \theta_r \bar{U}_{x_r} U'(\frac{y_r}{h} - M) \end{bmatrix}$$

9. Le vecteur  $\mathbf{z}$ , de dimension  $NM$ , est formé par les altitudes  $z_{cl}$  des noeuds de la grille.

et

$$\mathbf{W}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\nu_1}{\Delta(x_i, y_i)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{\nu_r}{\Delta(x_i, y_i)} \end{bmatrix}$$

où

$$\overline{U}'_{x_i} = [ U'(\frac{x_i}{h} - 1) \quad \dots \quad U'(\frac{x_i}{h} - N) ] \quad \text{et} \quad \overline{U}_{x_i} = [ U(\frac{x_i}{h} - 1) \quad \dots \quad U(\frac{x_i}{h} - N) ]$$

on a

$$E_h(H) = \mathbf{z}^T \mathbf{A} \mathbf{z} - 2\mathbf{b}^T \mathbf{z} + \mathbf{c} \quad (3.4)$$

avec  $\mathbf{A} = \mathbf{C} + \mathbf{D} + \mathbf{F} + \mathbf{B}^T \mathbf{W}_1 \mathbf{B} + \mathbf{S}^T \mathbf{W}_2 \mathbf{S}$ ,  $\mathbf{b} = \mathbf{B} \mathbf{W}_1 \mathbf{k}$  et  $\mathbf{c} = \mathbf{k}^T \mathbf{W}_1 \mathbf{k}$  ( $\mathbf{W}_1$  est la matrice des poids  $\mathbf{W}$  donnée par l'équation 2.24).

### 3.1.3 Mise en oeuvre

La figure 3.2 illustre la mise en oeuvre de ces calculs dans la méthode de la grille élastique. On a utilisé aussi une surface de synthèse (la même que celle utilisée dans le chapitre 1) car elle nous permet de déterminer l'horizontale en tout point de  $H$ . Le choix le plus simple pour les positions  $(x_i, y_i)$  des directions de l'horizontale consiste à les considérer coïncidentes avec les positions  $(x_{cl}, y_{cl})$  des noeuds d'interpolation de la fonction  $H$ .

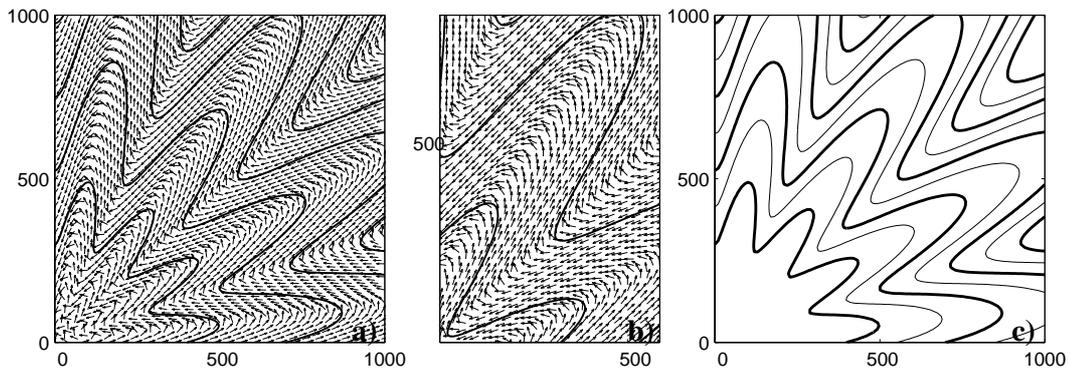


FIG. 3.2 – Une solution au problème des intercalaires. a) Courbes initiales complétées par une grille de directions de l'horizontale; b) Extrait de la figure-a; c) Courbes initiales et intercalaires tracées sur la surface ajustée.

La figure 3.2-a montre les courbes de niveau initiales et un extrait d'une grille des directions de l'horizontale. La figure 3.2-c montre les courbes de niveau du MNT calculé avec ces deux types d'informations : les directions de l'horizontale et les points  $(x, y, z)$  des courbes de niveau ; on voit que les courbes intercalaires sont cohérentes avec les courbes

initiales ; on peut en conclure que l'ajout d'une grille des directions de l'horizontale suffit pour obtenir une surface correcte.

Notons que les directions de l'horizontale pourraient également être utilisées dans la réduction du nombre de points prélevés sur les courbes de niveau. En effet, en chaque point d'une courbe de niveau on pourrait calculer des directions de l'horizontale aux points de plus faible courbure et aux points d'inflexion (changement de concavité), par exemple, et réduire, ainsi, le nombre de points  $(x_i, y_i, z_i)$  nécessaires à la définition de ces formes locales.

### 3.1.4 Interpolation des directions de l'horizontale entre les courbes de niveau

Nous avons indiqué qu'il est possible de définir la direction de l'horizontale en chaque point d'une courbe de niveau. Dans la pratique, comme les courbes de niveau sont des lignes polygonales, la direction de l'horizontale en un point  $(x_i, y_i)$  d'une courbe peut être donnée par :

$$\vec{t}_i = \frac{(x_{i+1} - x_{i-1})\vec{I} + (y_{i+1} - y_{i-1})\vec{J}}{\sqrt{(x_{i+1} - x_{i-1})^2 + (y_{i+1} - y_{i-1})^2}} \quad (3.5)$$

L'objectif de cette approche consiste à interpoler une grille de directions de l'horizontale à partir des directions données aux points des courbes de niveau. En d'autres termes, il s'agit donc de la reconstruction d'un champ bidimensionnel de vecteurs à partir de quelques vecteurs définis aux points des courbes de niveau. La figure 3.3 illustre le problème pour la surface de synthèse : le calcul des vecteurs  $\vec{t}_{c,l}$  aux noeuds (symbolisés par un « o ») de la grille.

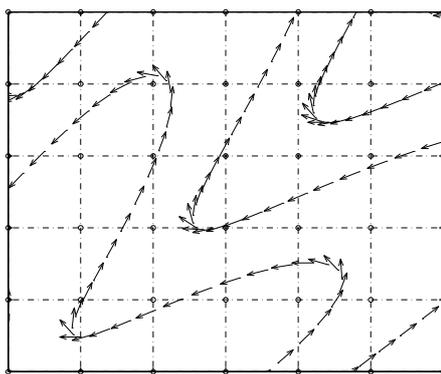


FIG. 3.3 – Interpolation d'une grille de directions de l'horizontale à partir des directions données aux points des courbes de niveau.

La solution la plus simple consiste à considérer que les deux composantes  $(t_x, t_y)$  du vecteur unitaire  $\vec{t}_i$  sont indépendantes l'une de l'autre, c'est-à-dire non-corrélées. Dans ce cas, l'interpolation se divise en deux interpolations, une par composante du vecteur  $\vec{t}$ .

### 3.1.4.1 Recherche des contraintes par grille élastique

L'idée la plus immédiate consiste à interpoler chaque composante du vecteur  $\vec{t}$  par la méthode de la grille élastique.

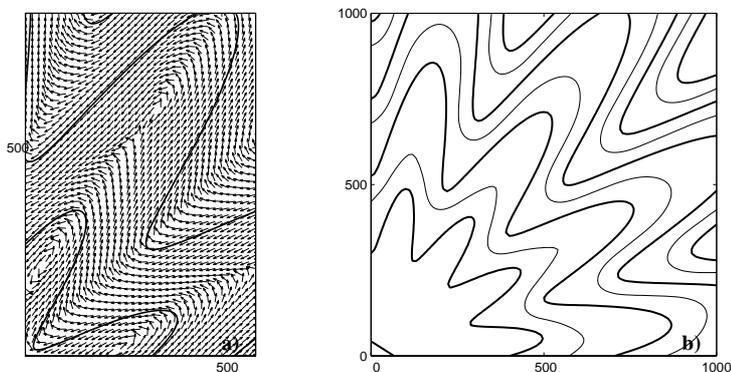


FIG. 3.4 – Effet d'une grille de directions de l'horizontale, interpolée par grille élastique, sur la construction d'un MNT; a) Extrait de la grille de directions interpolée par grille élastique; b) Courbes de niveau du MNT ajusté avec la grille de directions de la figure-a.

La figure 3.4 illustre la mise en oeuvre de cette approche. La figure 3.4-a montre un extrait des courbes de niveau initiales complétées par une grille des directions de l'horizontale, laquelle est interpolée par la méthode de la grille élastique bicubique; les directions  $\vec{t}_{c,l}$  ont été renormalisées. La figure 3.4-b montre les courbes de niveau de la surface ajustée sur les courbes de niveau initiales complétées par la grille de directions de l'horizontale interpolée précédemment; par rapport à la figure 1.3-c on observe une légère amélioration des courbes intercalaires. Cependant, cette amélioration n'est pas encore suffisante pour considérer le MNT comme équivalent aux courbes de niveau.

### 3.1.4.2 Recherche des contraintes à partir d'une triangulation des courbes de niveau

Les résultats obtenus dans la section précédente incitent à poursuivre la recherche sur un autre type d'interpolation des directions de l'horizontale.

D'abord l'interpolation des directions de l'horizontale doit se faire entre deux courbes de niveau consécutives. En effet, compte tenu d'une des propriétés du modèle cartographique, la forme des courbes intercalaires est définie par la règle de l'interpolation (formule 1.1) entre deux courbes consécutives.

Afin d'interpoler les directions de l'horizontale entre deux courbes consécutives il est donc nécessaire de construire une relation topologique entre les points des courbes de niveau. Généralement, cette relation topologique est construite à l'aide d'un critère de distance: plus les points sont proches plus ils doivent être connectés (Schneider, 1996).

Pour les points répartis irrégulièrement, les points des courbes de niveau inclus, la

triangulation de Delaunay (voir Annexe B) donne un réseau de relations topologiques adéquates (Brändli, 1992). Dans le cas spécifique des courbes de niveau, cette triangulation doit être modifiée de façon à éviter les connections entre points « chevauchant » les courbes de niveau. La triangulation contrainte aux courbes de niveau (voir Section 3.2.3.2) donne déjà des relations topologiques adéquates entre les points des courbes et les courbes elles-mêmes.

Une fois que la triangulation contrainte est construite, chaque composante du vecteur  $\vec{t}$  (direction de l'horizontale) est interpolée linéairement dans la surface représenté par les triangles; autrement dit, pour chaque triangle défini par un triplet de points  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ ,  $(x_3, y_3)$  la formule d'interpolation utilisée est (Watson, 1992):

$$H(x, y) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i f(x_i, y_i)$$

où les  $\alpha_i$  sont les coordonnées barycentriques du point  $(x, y)$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{\Delta} ((x_2 y_3 - x_3 y_2) + x(y_2 - y_3) + y(x_3 - x_2)) \\ \alpha_2 &= \frac{1}{\Delta} ((x_3 y_1 - x_1 y_3) + x(y_3 - y_1) + y(x_1 - x_3)) \\ \alpha_3 &= \frac{1}{\Delta} ((x_1 y_2 - x_2 y_1) + x(y_1 - y_2) + y(x_2 - x_1)) \end{aligned}$$

$f(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, 3$  représente les valeurs de la variable d'interpolation aux sommets du triangle et  $\Delta = x_2 y_3 - y_2 x_3 - x_1 y_3 + y_1 x_3 + x_1 y_2 - y_1 x_2$ .

La figure 3.5 illustre la mise en oeuvre de cette approche. La figure 3.5-a montre un extrait des courbes de niveau initiales complétées par une grille de directions de l'horizontale, interpolée à partir d'une triangulation contrainte aux courbes. La 3.5-b montre les courbes de niveau de la surface calculée avec un échantillon prélevé sur les courbes de niveau initiales et complété par la grille de directions de l'horizontale interpolé dans la triangulation; par rapport à la méthode précédente on observe un dégradation de la cohérence des courbes intercalaires.

Les mauvais résultats obtenus dans les deux approches (grille de directions interpolée par la méthode de la grille élastique et grille de directions interpolée à partir d'une triangulation contrainte) nous confirment que les deux composantes du vecteur  $t$  sont fortement corrélées pour être interpolées séparément.

Cependant, une analyse comparée des figures 3.2-b, 3.4-a et 3.5-a nous montre que, dans les régions<sup>10</sup> traversées par des lignes de crête et talweg, l'interpolation des direction de l'horizontale à partir de la triangulation est, en général, plus satisfaisante que l'interpolation par grille élastique. Cette observation nous a suggéré l'idée d'utiliser cette triangulation dans la recherche d'information sur les lignes caractéristiques.

10. Ces régions sont généralement caractérisées par une forme en « V » des courbes de niveau.

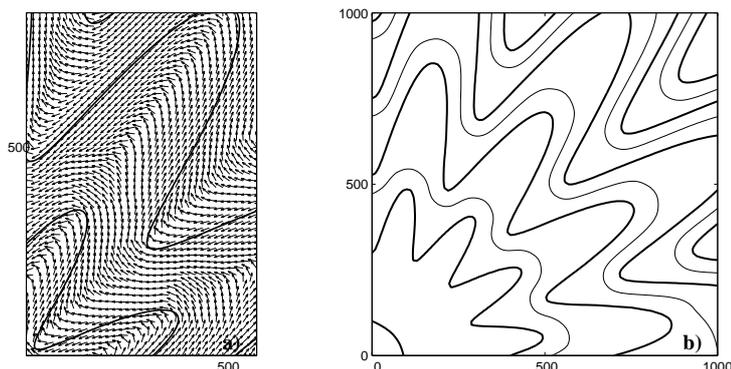


FIG. 3.5 – Effet d’une grille de directions de l’horizontale, interpolé à partir d’une triangulation, sur la construction d’un MNT; a) Extrait de la grille de directions interpolée linéairement par une triangulation contrainte aux courbes; b) Courbes de niveau du MNT interpolé avec la grille de la figure-a.

## 3.2 Contraintes sur les lignes de crête et de talweg

### 3.2.1 Principe

On a observé au chapitre 1 qu’une condition nécessaire pour résoudre le problème des courbes intercalaires devait être de contraindre la surface à l’aide d’informations supplémentaires.

L’idée suivante est de contraindre la surface en adjoignant à l’échantillon de nouveaux points, situés là où le problème se manifeste, c’est-à-dire à proximité des crêtes et des talwegs; les altitudes de ces points doivent bien sûr respecter la condition de pente régulière entre les courbes de niveau.

### 3.2.2 Expression des contraintes

Dans la méthode de la grille élastique, la façon la plus simple d’insérer l’information relative aux lignes de crête et talweg est de prélever un autre échantillon de points  $(x_i, y_i, z_i)$ ,  $i = 1, \dots, s$  sur ces lignes et de l’introduire dans le terme  $E_{\text{échantillon}}$ ; ceci revient donc à minimiser la quantité

$$E_{\text{échantillon}}(H) = \sum_{i=1}^{n+s} \bar{w}_i [H(x_i, y_i) - z_i]^2$$

où les  $\bar{w}_i$  sont des poids positifs ( $\bar{w}_i > 0$ ) associés aux points  $(x_i, y_i, z_i)$ . Ces poids sont calculés de la même façon<sup>11</sup> que les poids  $w_i$ , c’est-à-dire, en utilisant l’expression 2.19.

11. On peut aussi affecter les poids  $\bar{w}_i$  ( $i = n + 1, \dots, s$ ) des points relatifs aux lignes caractéristiques d’un coefficient  $k$  pour tenir compte de l’imprécision de ces points par rapport aux points des courbes de niveau.

L'expérience confirme le bien-fondé de cette idée, comme le montre la figure 3.6. L'exemple est la surface de synthèse vue à la figure 1.3. La figure 3.6-a montre les courbes initiales complétées par les lignes de crêtes et de talwegs. La figure 3.6-b montre l'échantillon prélevé. La figure 3.6-c montre les courbes de niveau tracées sur la surface ajustée, cette fois avec les courbes intercalaires cohérentes avec les courbes initiales. On voit que dans ce cas, l'ajout de points prélevés sur les lignes de crêtes et de talwegs suffit pour obtenir une surface correcte.

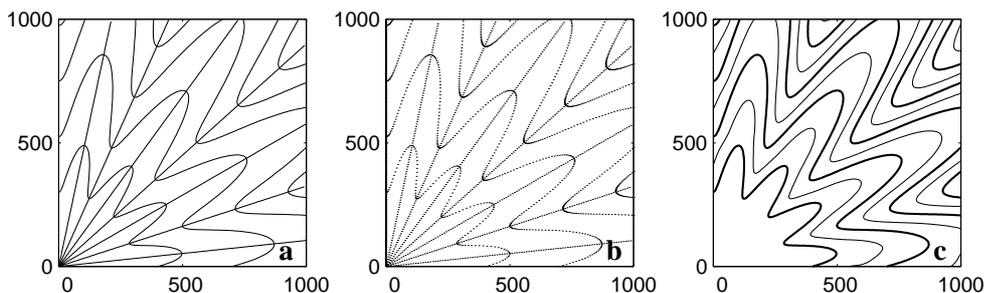


FIG. 3.6 – Une solution au problème des intercalaires. a) Courbes initiales complétées par les lignes de crête et thalweg; b) Echantillon prélevé; c) Courbes initiales (gras) et intercalaires tracées sur la surface ajustée.

Il faut observer qu'au lieu d'introduire ces informations supplémentaires dans le critère  $E_{\text{échantillon}}$ , on pourrait chercher à les introduire dans le critère  $E_{\text{courbure}}$ , par exemple en minimisant la courbure le long de ces lignes; une tentative dans ce sens est décrite par exemple dans (Bignone and Nonin, 1995): le critère  $E_{\text{courbure}}$  est enrichi de manière à être plus réaliste, mais son étude mathématique devient plus complexe.

Nous préférons nous en tenir à la première idée parce que son efficacité est vérifiée (c.f. figure 3.6) et qu'elle est applicable immédiatement sans modification de notre méthode. Bien entendu la question se pose maintenant d'obtenir les nouveaux points, et pour cela de trouver les lignes de crêtes et de talwegs, sans autre information que les courbes de niveau elles-mêmes; mais cela est un problème pour lequel des solutions ont déjà été proposées.

### 3.2.3 Recherche automatique des lignes de crête et de thalweg dans les courbes de niveau

Selon (Carré, 1971b) les *lignes caractéristiques* sont les lignes sur lesquelles s'inversent les pentes; elles définissent l'ossature générale des formes du relief sur laquelle s'appuient les courbes de niveau et sont constituées essentiellement de lignes de talweg, de crête et de changement de pente. Nous nous intéressons uniquement aux lignes de crête et de talweg.

Dans le modèle cartographique, la ligne de talweg est, généralement, bissectrice de l'angle formé par les courbes de niveau. La ligne de crête, ou encore ligne de partage des eaux, est d'autant plus sinueuse dans le sens horizontal que la pente des versants est plus faible. Elle est habituellement moins bien définie que la ligne de talweg.

### 3.2.3.1 L'état de l'art

La possibilité de retrouver les lignes de crêtes et de talwegs dans les courbes de niveau ne doit pas surprendre puisque, bien que non explicites, elles y sont présentes : ces lignes sont sensiblement des lieux où la surface est plus courbée qu'ailleurs ; elles correspondent sur une carte à des lignes virtuelles, reliant transversalement d'une courbe à l'autre des points de courbure maximale ou de rebroussement. Parmi les méthodes publiées de recherche automatique de ces lignes, on peut distinguer trois catégories :

#### Méthodes cherchant à relier les points de courbure maximale

Les points de courbure maximale sont reliés d'une courbe à l'autre (Brandli and Schneider, 1994) ; cependant deux courbes successives ne peuvent être reliées que par des segments, et par suite la liaison n'est possible (sans intersecter une des courbes) qui si la crête ou la vallée est sensiblement rectiligne ; ces méthodes échouent donc en cas de crêtes ou vallées sinueuses.

#### Méthodes basées sur une estimation de la direction de la pente dans une triangulation

Ces méthodes utilisent une surface auxiliaire, définie par une triangulation contrainte, pour interpoler la direction de la pente entre les courbes de niveau. Dans (Aumann et al., 1991), les lignes caractéristiques (crêtes et talwegs) sont construites point par point en suivant une ligne de plus grande pente estimée ; l'inconvénient est que la pente est difficile à estimer dans ces zones de la triangulation où précisément les triangles sont horizontaux (voir Section 3.2.3.2).

#### Méthodes utilisant les axes médians

Ces méthodes utilisent les axes médians (cf. ci-dessous) des régions inter-courbes d'une image maillée des courbes de niveau (Tang, 1992) ; les crêtes et les talwegs correspondent aux parties des axes médians situées entre deux branches d'une même courbe ; cette technique a l'inconvénient de nécessiter une haute résolution pour donner des résultats acceptables.

### 3.2.3.2 Notre méthode : basée à la fois sur une triangulation et sur la notion des axes médians

Le principe de la méthode repose sur l'observation qu'une triangulation Delaunay conforme<sup>12</sup> aux courbes de niveau (voir Annexe B) fait apparaître des triangles horizontaux dans les régions traversées par des lignes de crête et talweg. En effet, la triangulation Delaunay est caractérisée par la condition que le cercle circonscrit à un triangle ne contient aucun autre sommet de triangle. Examinons alors sur la figure 3.7 ce qui se passe sur une crête ou dans un talweg. On voit qu'un triangle tel que  $ABD$  reliant deux courbes différentes est impossible car le cercle  $ABD$  contient d'autres points que  $A, B, D$  ; au contraire le triangle horizontal  $ABC$  est un triangle vraisemblable. L'approche consiste donc à re-

---

12. Cette observation est aussi valable pour la triangulation contrainte.

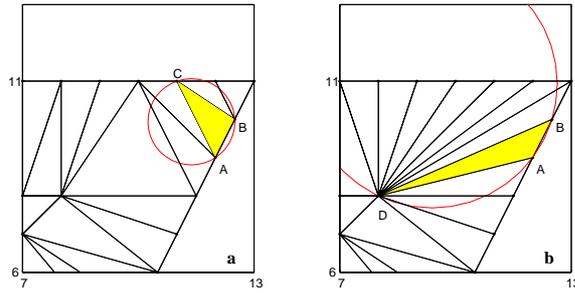


FIG. 3.7 – Localisation des crêtes et talwegs. a) Le triangle horizontal  $ABC$  fait partie de la triangulation de Delaunay; b)  $ABD$  n'est pas un triangle possible de la triangulation de Delaunay.

chercher des morceaux de lignes de crête et de talweg situés entre deux courbes de niveau consécutives. La recherche se fait en 4 étapes successives :

- triangulation contrainte aux courbes de niveau,
- délimitation des régions critiques par assemblage des triangles horizontaux,
- tracé planimétrique des lignes de contrainte,
- calcul des altitudes des points appartenant aux lignes de contrainte.

### i. Triangulation

L'objectif de la triangulation est d'établir des relations topologiques entre les points des courbes de niveau. Plus précisément, pour chaque point d'une courbe de niveau la triangulation ne doit relier ce point qu'aux deux points voisins de la même courbe ou à des points situés sur une courbe « voisine ». Cette propriété est essentielle pour garantir que la recherche des lignes caractéristiques est faite toujours entre deux courbes de niveau consécutives.

En général, une triangulation Delaunay de l'ensemble  $\mathcal{P}$  des points qui forment les courbes de niveau ne garantit pas que les arêtes de la triangulation ne relient des points situés sur deux courbes non-consécutives.

Une première méthode pour éviter que les connections entre les points ne « traversent » les courbes de niveau consiste à prendre un pas d'échantillonnage  $\delta$  le long de la courbe suffisamment petit (voir figure 3.8). En fait, sur les points  $A, B, C, D$  on peut construire deux paires de triangles :  $(ABC, ABD)$  ou  $(ACD, BCD)$  ; pour empêcher la triangulation de choisir les triangles  $(ACD, BCD)$  qui chevauchent trois courbes, il faut faire en sorte que  $D$  soit extérieur au cercle  $ABC$ , c'est-à-dire que  $e < d_2$  ; comme  $e \leq \frac{\delta^2}{4d_1}$ , ( $\delta = \overline{AB}$ ) il suffit de choisir

$$\delta < 2\sqrt{d_1 d_2}$$

où  $d_1$  et  $d_2$  sont les distances horizontales entre courbes.

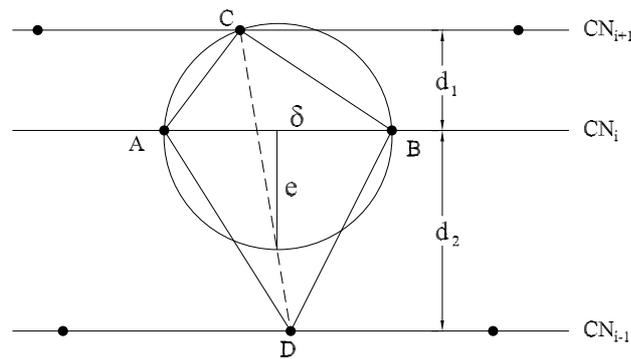


FIG. 3.8 – *Densification de l'échantillon de points des courbes de niveau.*

Dans les terrains caractérisés par de fortes pentes locales ( $d_1$  et  $d_2$  petits) cette méthode a l'inconvénient de densifier inutilement les courbes de niveau des parties plus plates du terrain et donc d'augmenter exagérément le nombre de triangles, ce qui ralentit beaucoup les étapes suivantes de la recherche des lignes caractéristiques.

La deuxième méthode consiste à trianguler les courbes de niveau par une triangulation conforme (voir Annexe B). Dans ce cas, les contraintes sont définies par les segments des lignes polygonales représentant les courbes de niveau. Cette méthode est similaire à la méthode précédente à l'exception que la densification de l'échantillon de points se fait uniquement sur les segments qui ne sont pas représentés dans la triangulation.

La troisième méthode consiste à trianguler les courbes de niveau par une triangulation contrainte (voir Annexe B). Dans ce cas, les sommets de la triangulation sont précisément les points des courbes de niveau initiales (il n'y a pas de densification de l'échantillon) et la triangulation est formée exclusivement par les segments des courbes de niveau et par des segments reliant deux points d'une même courbe ou des courbes voisines (consécutives).

Dans la pratique, le nombre de segments des courbes de niveau qui ne sont pas respectés par la triangulation de Delaunay des points des courbes est très réduit ; les triangulations contrainte et conforme sont donc très similaires et le nombre de points insérés par la triangulation conforme est aussi très réduit.

Néanmoins, dans les essais réalisés dans ce travail, on a préféré choisir la deuxième méthode car elle conduit toujours à une triangulation de Delaunay.

## ii. Délimitation des régions critiques

La délimitation des régions critiques, c'est-à-dire les régions traversées par des lignes de crête et de talweg, fait intervenir une surface auxiliaire, définie par la triangulation de Delaunay calculée dans l'étape précédente.

On sait que, entre deux courbes de niveau consécutives, les régions critiques sont caractérisées par la présence des triangles horizontaux. Donc, l'assemblage de triangles horizontaux contigus définit le contour  $C$  de la région critique comprise entre deux courbes

de niveau consécutives. Ce contour est formé nécessairement par des segments de la courbe de niveau qui bordent les triangles horizontaux.

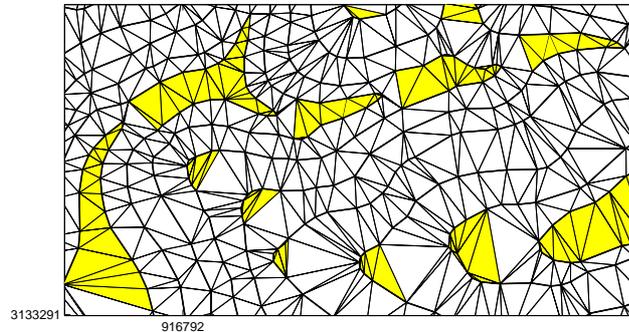


FIG. 3.9 – Détection des régions traversées par les lignes de crête et de talweg (régions critiques).

La figure 3.9 montre les régions critiques détectées par cet approche. On voit bien que les régions détectées sont, en effet, traversées par des lignes de talweg et par des lignes de crête.

### iii. Tracé des lignes de contrainte

Nous avons admis que, d'une manière générale, les lignes de talweg et de crête sont approximativement bissectrices de l'angle formé par les courbes de niveau. Le but de cette étape est de chercher l'axe médian de chaque région polygonale critique. L'axe médian d'une région limitée par un contour fermé  $C$  est l'ensemble des points  $s$  intérieurs à  $C$  tels que la distance de  $s$  à  $C$  soit atteinte pour au moins deux points de  $C$  ; cet axe est en général une courbe « à embranchements » (ou « arbre »). L'axe médian, une fois trouvé, est adopté comme ligne de crête ou de talweg.

Nous n'avons pas besoin pour notre application de trouver l'axe médian précis. Nous nous contentons de l'estimer par la ligne polygonale joignant les milieux des côtés communs à deux triangles. Cette ligne est complétée à chaque extrémité par le segment qui la joint au sommet opposé du triangle sur lequel elle débouche. Nous considérons uniquement les lignes médianes reliant deux courbes de niveau consécutives, c'est-à-dire, d'altitudes  $ne$  et  $(n + 1)e$ .

### iv. Calcul des altitudes

Afin d'insérer les lignes de contrainte dans la grille élastique, il reste à affecter des altitudes aux points des lignes médianes. Comme chaque ligne médiane, calculée dans l'étape précédente, relie toujours deux courbes de niveau consécutives, les altitudes peuvent être interpolées linéairement en fonction de l'abscisse curviligne.

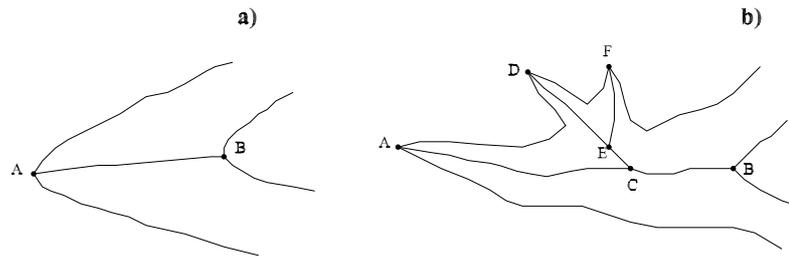


FIG. 3.10 – Calcul des altitudes des points des lignes de contrainte.

Deux cas peuvent se présenter (voir figure 3.10) :

- la ligne médiane est composée par une ligne simple ;
- la ligne médiane est composée par un arbre de lignes ;

Le premier cas est le cas élémentaire et ne pose aucun problème particulier. Le deuxième cas peut être considéré comme une composition hiérarchique des cas élémentaires. Pour définir cette hiérarchie on a choisi la longueur de la ligne : plus la ligne est longue plus elle est importante du point de vue morphologique (voir figure 3.10-b). On commence donc par interpoler les altitudes sur la ligne plus longue (ligne  $AB$ ) ; ensuite les branches secondaires de l'arbre sont hiérarchisées et les altitudes interpolées (ligne  $CD$ ) ; ces opérations sont répétées pour toutes les autres branches de l'arbre (ligne  $EF$ ).

La figure 3.11 illustre l'enchaînement des opérations décrites dans cette section, pour la surface de synthèse. La figure 3.11-a montre un extrait de la triangulation de Delaunay contrainte aux courbes de niveau (triangulation conforme) ; nous construisons cette triangulation par la méthode décrite dans (Shewchuk, 1996). La figure 3.11-b montre un détail d'un axe médian estimé (ligne de contrainte), tracé en trait plein, avec l'axe médian vrai en tireté. La figure 3.11-c est une vue générale des courbes de niveau et des axes médians estimés ; on voit que ces axes médians constituent de bonnes approximations des lignes de crêtes et de talwegs. La figure 3.11-d montre les courbes de niveau de la surface contrainte par ces lignes, avec des intercalaires correctes.

#### Remarque :

Nous avons supposé que les lignes de crête et de talweg sont, en général, bissectrices de l'angle formé par les courbes de niveau. Or, cette condition n'est pas satisfaite dans les cas des crêtes et talwegs dissymétriques ; donc l'estimation d'une crête ou talweg dissymétrique en utilisant notre approche va être biaisée, comme le montre la figure 3.12. Pour tenir compte de la pente de chaque flanc une solution possible consisterait, peut être à substituer à la ligne polygonale joignant les milieux des arêtes des triangles, une ligne qui joigne les points situés, dans ces arêtes, à une distance proportionnelle à la pente de chaque flanc. Toutefois la détermination de ces pentes amont n'est pas complètement triviale et n'a pas pu être mise en oeuvre ici. Malgré tout, l'hypothèse de symétrie s'avère réaliste dans un grand nombre de cas et la résolution du problème sur cette hypothèse garde un intérêt certain.

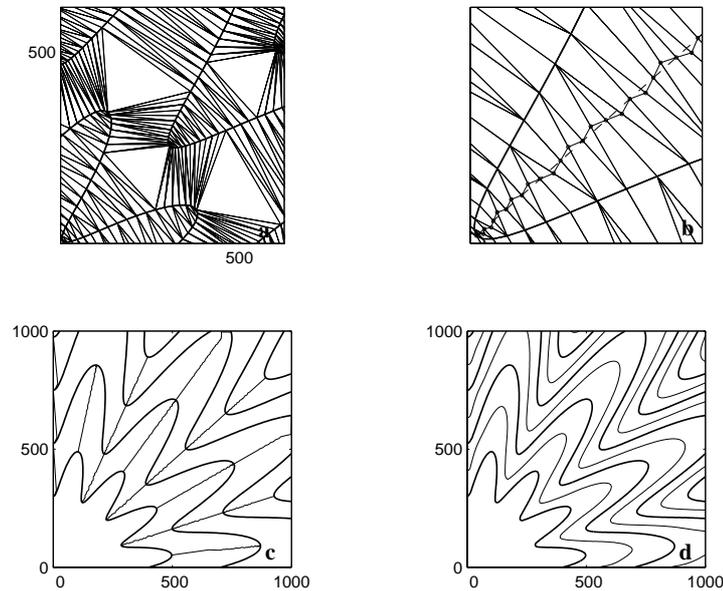


FIG. 3.11 – Recherche des lignes de contrainte dans les CN: a) Triangulation conforme aux CN; b) Recherche d'une ligne de contrainte dans les triangles horizontaux; c) CN et lignes de contrainte issues de l'approche; d) Courbes initiales (gras) et intercalaires dérivées du MNT grille élastique.

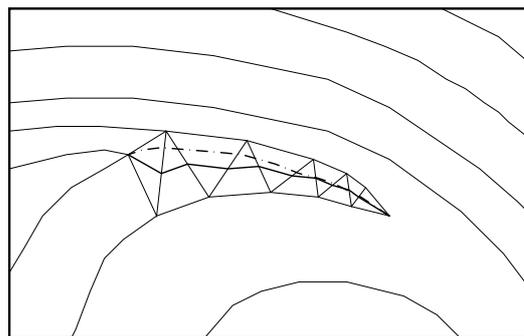


FIG. 3.12 – Estimation d'une ligne de crête dissymétrique: en utilisant notre méthode et manuellement (tireté) en tenant compte de la pente de chaque flanc.

## 3.3 Applications à des terrains réels

Parmi les différents essais réalisés pendant cette thèse les deux essais suivants sont, à notre avis, représentatifs de l'importance des lignes caractéristiques dans la construction des MNT à partir des courbes de niveau. Rappelons que l'objectif de cette construction est de créer des modèles numériques équivalents aux modèles cartographiques dont ils sont issus.

Dans les deux exemples suivants les courbes de niveau proviennent de la Base de Données Topographique<sup>13</sup> de l'IGN (BDTopo); elles ont été obtenues par restitution photogrammétrique sur des photographies aériennes à l'échelle 1 : 30 000.

Vu les mauvais résultats obtenus par les contraintes sur les directions de l'horizontale, on a étudié seulement l'effet des contraintes sur les lignes de crête et de talweg.

Afin d'éliminer l'influence du pas du MNT dans la construction de l'équivalence on a considéré une valeur suffisamment petite; dans les deux exemples le pas est de l'ordre de l'équidistance des courbes de niveau. En outre, dans les calculs du MNT, le seul paramètre qui doit être contrôlé par l'opérateur est le coefficient de lissage du MNT (paramètre  $\lambda$  de l'équation 2.18). Néanmoins, pour ces essais la valeur  $\lambda = 6000$  (voir Section 2.4.2) s'avère adéquate dans la construction des différents MNT; autrement dit, les courbes de niveau tracées sur le MNT sont, en général, superposables aux courbes de niveau initiales.

### 3.3.1 Exemple 1

La zone représentée dans cet exemple est située dans la région du Havre et couvre une surface d'environ 10.2 km<sup>2</sup>. Elle est caractérisée par un relief faible mais très ondulé, comme le montre bien l'aspect sinusoïdal des courbes de niveau. L'équidistance des courbes est de 5m.

La figure 3.13-a reproduit les courbes de niveau initiales obtenues par restitution photogrammétrique. On a prélevé sur les courbes un échantillon représentatif de points, et ajusté sur cet échantillon une surface par la méthode de la grille élastique. La figure 3.13-b représente les courbes de niveau d'équidistance 1m de la surface ajustée, avec des intercalaires trop tendues et qui n'épousent pas les courbes initiales; ces intercalaires traduisent des pentes irrégulières entre les courbes initiales et contredisent donc le principe du figuré en courbes de niveau. La figure 3.13-c montre les « lignes de contrainte » obtenues par l'intermédiaire d'une triangulation conforme aux courbes initiales (certaines de ces lignes approximent les lignes de crête et talweg). Sur ces lignes de contrainte, on a prélevé un échantillon complémentaire de points, puis ajusté à nouveau une surface sur l'échantillon total, dont la figure 3.13-d représente les courbes de niveau. Les courbes intercalaires épousent cette fois parfaitement les courbes initiales, à tel point qu'elles deviennent indiscernables.

---

13. La BDTopo<sup>®</sup> est une base de données topographiques de précision métrique et correspondant au contenu de la carte classique au 1 : 25 000.

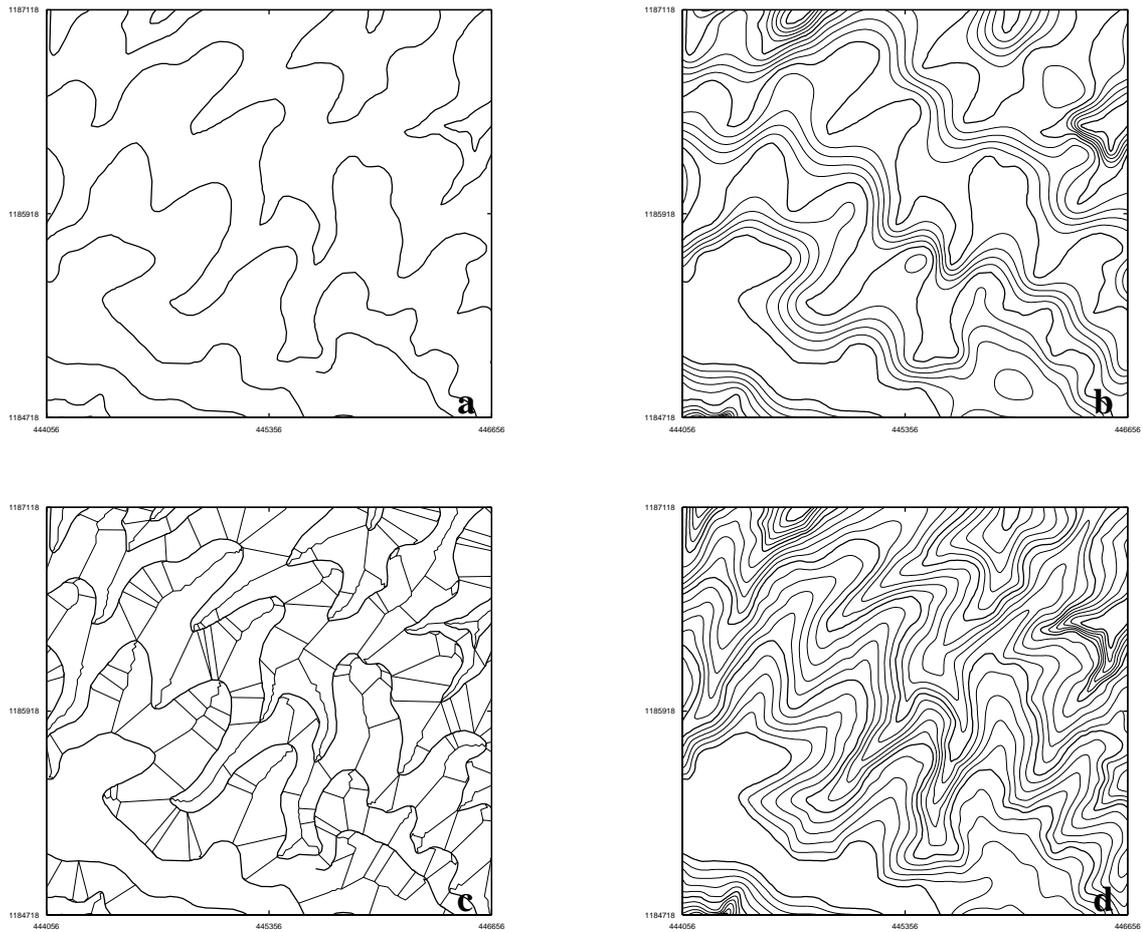


FIG. 3.13 – Effet des lignes de contrainte sur la construction d'un MNT par grille élastique : a) CN initiales ; b) CN du MNT sans lignes de contrainte ; c) CN initiales complétées par les lignes de contrainte ; d) CN du MNT avec lignes de contrainte.

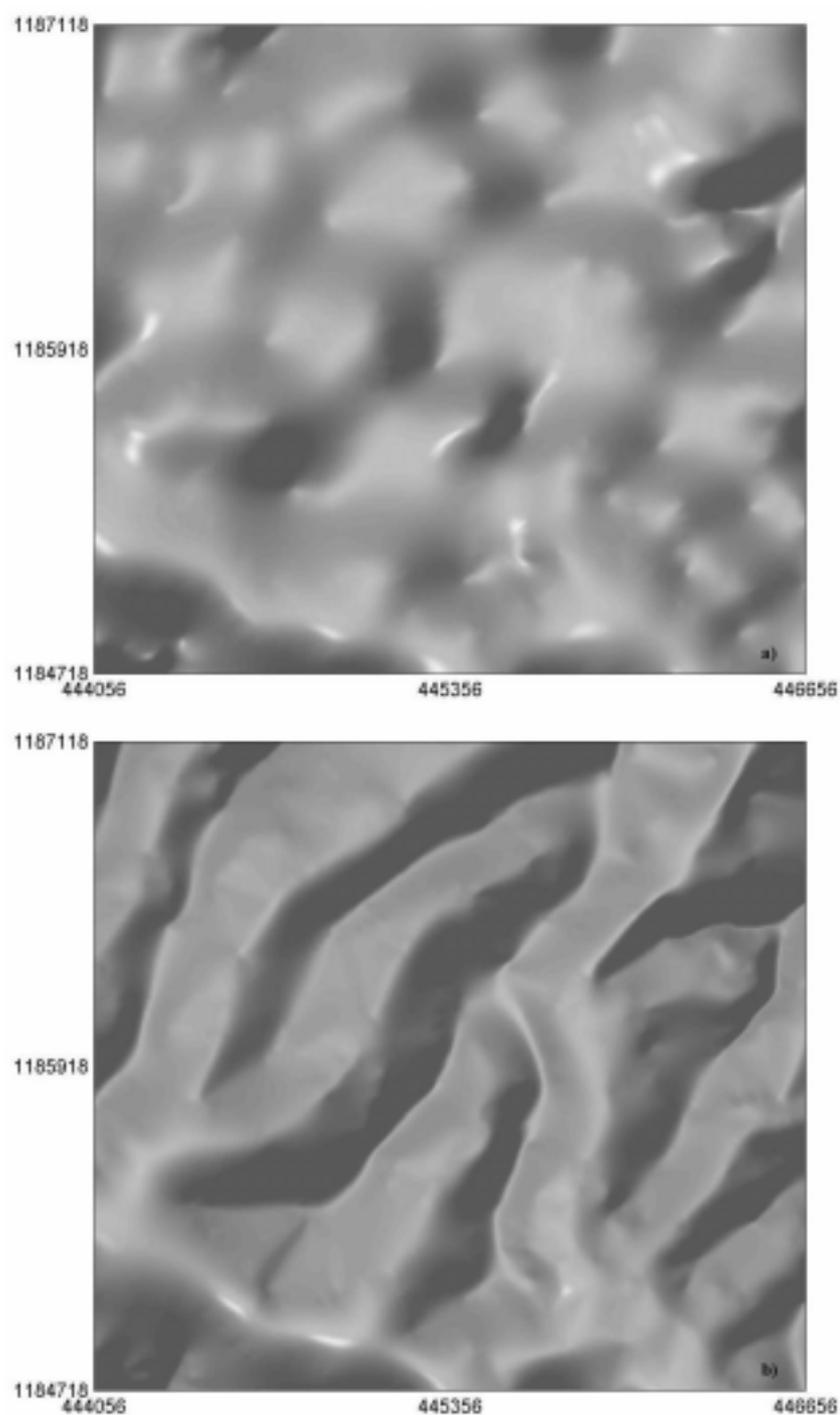


FIG. 3.14 – Visualisation des MNT par ombrage. a) MNT calculé sans lignes de contrainte ; b) MNT calculé avec les lignes de contrainte

La réduction des artefacts par l'introduction des lignes de contrainte peut être bien observée par un ombrage du MNT. En fait, la figure 3.14-a montre l'ombrage du MNT calculé sans lignes de contrainte; on voit bien que le modèle numérique est affecté par des nombreux artefacts représentés essentiellement sous la forme de petites cuvettes et sommets. Par contre dans la figure 3.14-b, qui représente l'ombrage du MNT calculé sans lignes de contraintes, montre que la grande majorité des artefacts ont été éliminés.

### 3.3.2 Exemple 2

Cette zone, située aussi dans la région du Havre, couvre une surface de  $1.6 \text{ km}^2$ . Elle a été choisie en raison de son talweg très sinueux et complexe. L'équidistance des courbes est de  $10m$ .

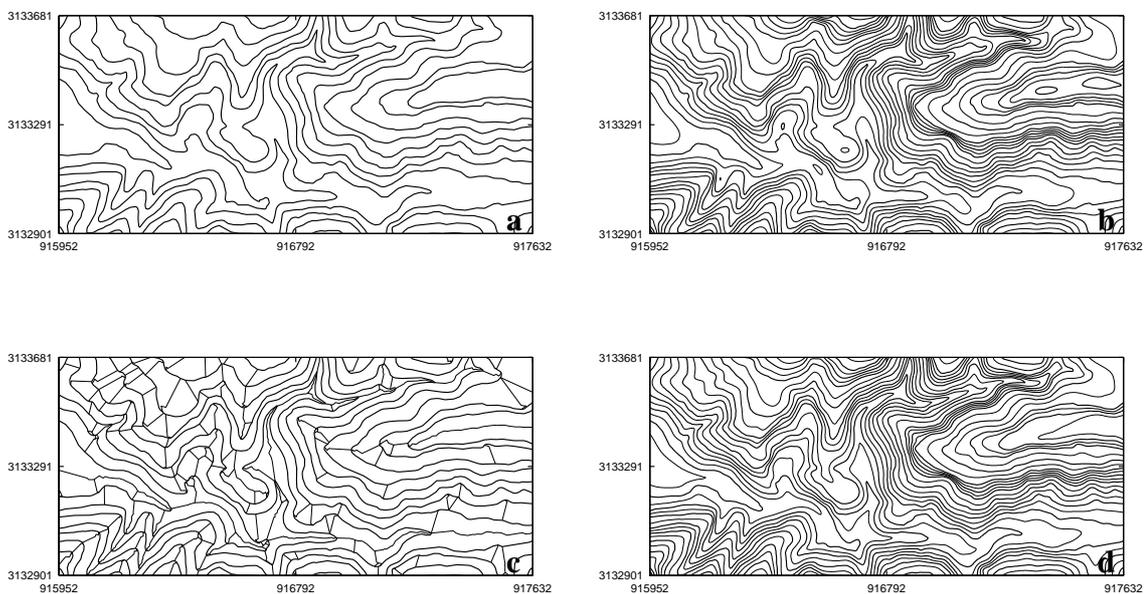


FIG. 3.15 – *Effet des lignes de contrainte sur la construction d'un MNT par grille élastique : a) CN initiales ; b) CN du MNT sans lignes de contrainte ; c) CN initiales complétées par les lignes de contrainte ; d) CN du MNT avec lignes de contrainte.*

La figure 3.15-a montre les courbes de niveau initiales sur lesquelles on a prélevé un échantillon représentatif de points et ajusté une surface. La figure 3.15-b représente les courbes de niveau d'équidistance  $5m$  de la surface ajustée; on peut observer que les morceaux des courbes intercalaires situés dans les parties plus régulières du terrain respectent, en général, les courbes initiales; cependant, les morceaux des courbes intercalaires situés dans le talweg sont trop tendues et n'épousent pas les courbes initiales. La figure 3.15-c montre les « lignes de contrainte » obtenues par l'intermédiaire d'une triangulation conforme aux courbes initiales; on observe principalement que la ligne de talweg est correctement représenté par les lignes de contrainte calculées dans la triangulation. Sur ces

lignes de contrainte, on a prélevé un échantillon complémentaire de points, puis ajusté sur l'échantillon total à nouveau une surface, dont la figure 3.15-d représente les courbes de niveau. On observe maintenant que les morceaux des courbes intercalaires situés dans la zone du talweg respectent mieux les courbes initiales.

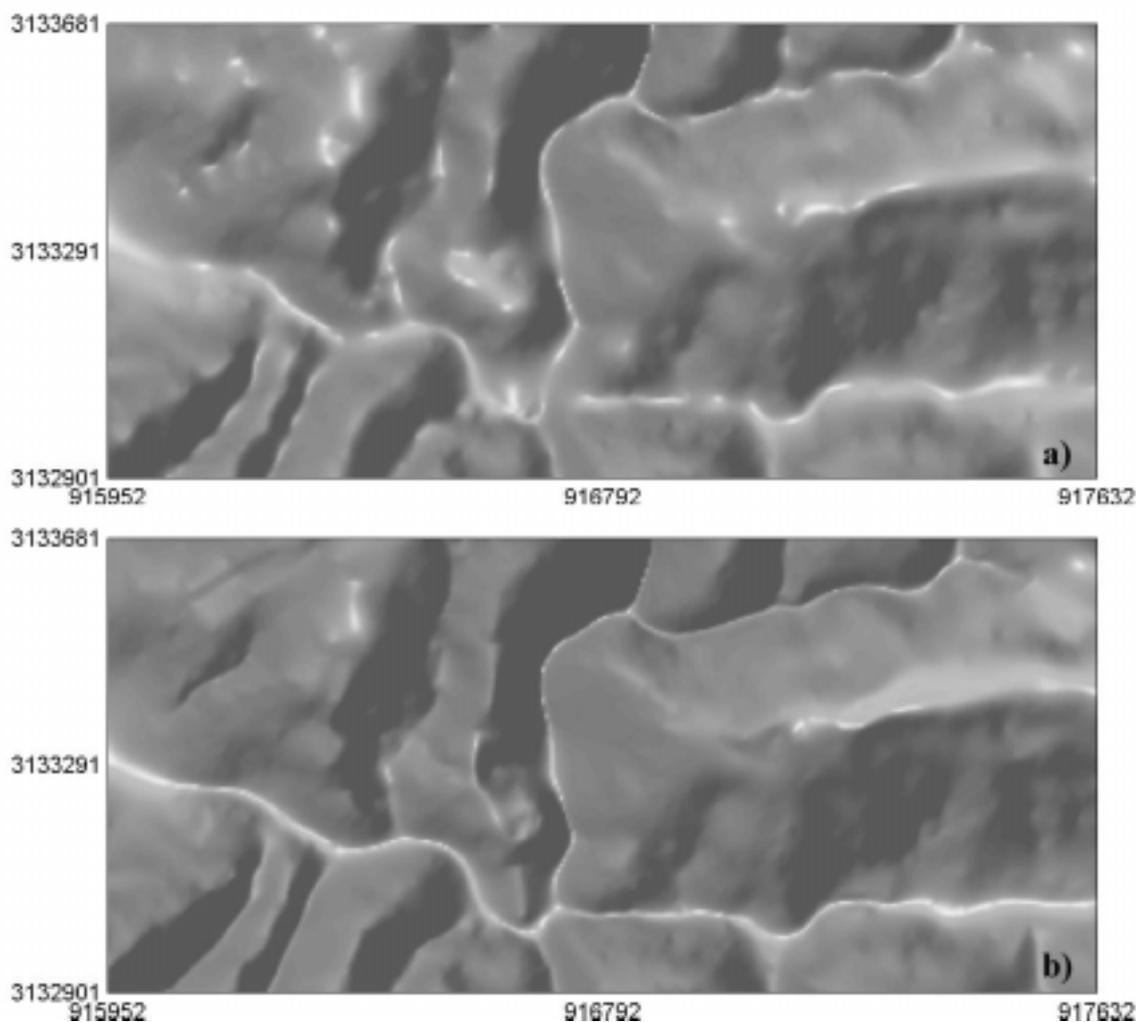


FIG. 3.16 – Visualisation des MNT par ombrage. a) MNT calculé sans lignes de contrainte ; b) MNT calculé avec les lignes de contrainte

L'effet des lignes de contraintes sur les lignes de crête et de talweg peut être observé dans l'ombrage du MNT. La figure 3.16-b montre la surface ajustée sans ligne de contrainte (mnt\_a) et la figure 3.16-b la surface ajustée avec les lignes de contrainte (mnt\_b). D'abord, on peut observer que la ligne de talweg est plus précise dans le mnt\_b que dans le mnt\_a ; en fait, dans le mnt\_a la ligne de talweg est affectée de nombreux artefacts que empêchent un écoulement normal des eaux. Finalement, on peut aussi remarquer que les lignes de crête principales sont mieux définies dans le mnt\_b que dans le mnt\_a.

## 3.4 Une autre utilisation des directions de l'horizontale

### Cotation automatique des courbes de niveau :

Un autre axe de recherche qui intéresse le laboratoire MATIS est la numérisation automatique des planches de courbes de niveau à partir des cartes scannées.

Ce type d'application nécessite deux niveaux d'analyse : une analyse de bas niveau, qui consiste à extraire de la carte scannée et à vectoriser les thèmes concernant l'altimétrie, dont les courbes de niveau et les points cotés, et une analyse de haut niveau, où il s'agit principalement d'affecter une altitude aux courbes de niveau. Cette phase d'interprétation automatique des courbes de niveau s'avère extrêmement délicate, en raison des nombreuses interruptions du tracé des courbes de niveau (dues à la superposition des thèmes de la carte), et la présence de bruit. (Dupont et al., 1999) propose de baser l'interprétation des courbes de niveau sur la connaissance *a priori* du sens de la pente, afin de privilégier un sens de propagation de l'information altimétrique, et de maintenir une cohérence globale du résultat.

La façon la plus simple d'estimer le sens de la pente est d'utiliser un modèle numérique de terrain, calculé à partir des points cotés et des courbes maîtresses cotées qui ont été extraites de la carte lors de l'analyse de bas niveau. Le problème est que cet échantillon de points  $(x_i, y_i, z_i)$  n'est pas suffisamment dense pour obtenir un MNT précis. Il est donc nécessaire d'introduire dans le processus de création du MNT des informations concernant les courbes non-cotées.

Or, les directions de l'horizontale permettent de prendre en compte dans le calcul du MNT l'information sur les courbes non-cotées. En effet, pour ces courbes on peut calculer, par l'expression 3.5, des directions  $\vec{t}_i$  et les introduire dans la grille élastique.

La figure 3.17 illustre l'introduction des directions de l'horizontale dans la construction du MNT par la méthode de la grille élastique.

La figure 3.17-a montre les courbes de niveau et points dont on connaît l'altitude. A partir de cette information on a prélevé un échantillon de points  $(x_i, y_i, z_i)$ . La figure 3.17-b montre les courbes de niveau non-cotées. Sur ces courbes on a prélevé un échantillon complémentaire de directions de l'horizontale  $\vec{t}_j$ . La figure 3.17-c montre les courbes de niveau du MNT calculé en considérant uniquement l'échantillon des points. La figure 3.17-d montre les courbes de niveau du MNT calculé avec l'échantillon de points et l'échantillon de directions de l'horizontale. On voit bien que la surface ajustée avec l'échantillon de points et les directions de l'horizontale est moins éloignée formes des courbes non-cotées que la surface ajustée uniquement avec l'échantillon de points.

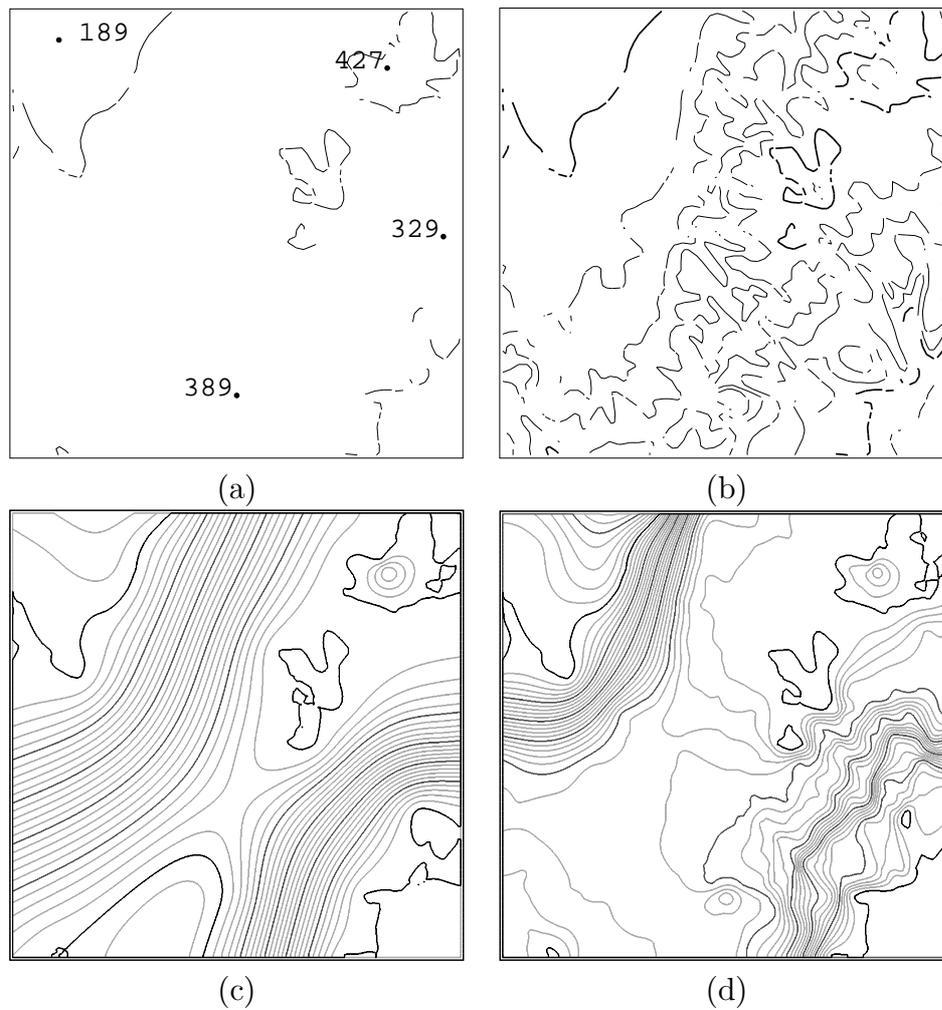


FIG. 3.17 – Construction d'un MNT en utilisant des courbes cotées et non-cotées : a) courbes de niveau maitresses cotées et points cotés ; b) courbes de niveau non-cotées ; c) courbes de niveau du MNT calculé avec l'information de la figure-a ; d) courbes de niveau du MNT calculé avec l'information des figures a et b.

# Chapitre 4

## Evaluation numérique de l'équivalence

L'objectif de cette évaluation est de savoir si le modelé ou encore le rendu du terrain donné par le « mode d'emploi » des courbes de niveau, c'est-à-dire par une interpolation linéaire suivant la ligne de plus grande pente entre deux courbes de niveau consécutives, est « respecté » par le modèle numérique, c'est-à-dire le MNT.

A priori un contrôle exprimé par exemple sous la forme d'une erreur moyenne quadratique altimétrique, est nécessairement limité aux points des courbes de niveau. Cependant, ce contrôle n'est pas suffisant pour chiffrer l'équivalence, car en général le problème de garder, dans le modèle numérique, les courbes de niveau de départ ne se pose pas. En effet, ceci est confirmé par les MNT des deux exemples du chapitre 3; bien que pour tous ces MNT l'*emq* altimétrique (voir eq. 4.2) sur les points des courbes de niveau soit très proche de  $0.0m$ , les MNT calculés sans les lignes de contrainte ne sont pas équivalents aux modèles cartographiques dont ils sont issus, puisque ces MNT ne respectent pas les courbes de niveau intercalaires. En outre, le fait d'avoir, d'une part un ensemble d'éléments linéaires (les courbes de niveau) et d'autre part une surface, limite le choix des mesures possibles de l'évaluation de cette équivalence aux paramètres qui peuvent caractériser les éléments linéaires (par exemple, la longueur, la courbure).

Notons, enfin, que dans cette thèse on ne s'intéresse pas au problème de l'évaluation de la qualité des courbes de niveau dans leur rôle de moyen de représentation des formes du relief. On considère plutôt que les courbes de niveau ne comportent pas d'erreurs et qu'elles constituent une représentation satisfaisante de la surface topographique.

### 4.1 L'état de l'art sur les qualités des MNT

Bien que l'évaluation de l'équivalence entre un modèle cartographique et un modèle numérique soit un cas particulier de l'évaluation des qualités générales des MNT il nous semble important de faire le point sur les recherches effectuées dans ce domaine.

Selon la norme internationale ISO 8402, la qualité est *l'ensemble des caractéristiques d'un produit qui lui confèrent l'aptitude à satisfaire des besoins exprimés ou implicites*.

Dans les MNT une des caractéristiques (ou par abus de langage, une des qualités) qui nous intéressent davantage est son exactitude géométrique. Cette caractéristique est évaluée par l'écart entre une « position » dans le MNT et la « position correspondante » dans la référence. Ainsi, on distingue l'exactitude altimétrique qui se rapporte à l'estimation de la distance verticale entre le MNT, et la référence et l'exactitude des formes qui qualifie le MNT dans son rôle de représentation des formes du relief.

### 4.1.1 Exactitude altimétrique

La grande majorité des travaux publiés sur la qualité des modèles numériques de terrain abordent le problème de l'évaluation des écarts altimétriques entre la surface définie par le MNT ( $H_{\text{mnt}}$ ) et une surface de référence ( $H_{\text{reference}}$ ).

La surface de référence est souvent réduite à quelques points de contrôle et l'exactitude altimétrique est généralement estimée par quelques mesures statistiques. Plus précisément, pour  $n$  points de coordonnées  $(x_i, y_i)$  on mesure les écarts  $dz_i$

$$dz_i = H_{\text{mnt}}(x_i, y_i) - H_{\text{reference}}(x_i, y_i), \quad i = 1, \dots, n$$

et on calcule :

- la moyenne arithmétique

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n dz_i \quad (4.1)$$

- l'erreur moyenne quadratique

$$emq = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (dz_i)^2} \quad (4.2)$$

- l'écart-type<sup>14</sup>

$$\sigma_z = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (dz_i - \mu)^2} \quad (4.3)$$

- les erreurs minimale et maximale

$$E_{\text{max}} = \max\{dz_i, i = 1, \dots, n\} \quad E_{\text{min}} = \min\{dz_i, i = 1, \dots, n\} \quad (4.4)$$

---

14. Remarquons que si les  $dz_i$  ont une distribution centrée :  $\sigma_z = emq$ .

Pour avoir une bonne exactitude altimétrique on exige en effet que l'histogramme des  $dz_i$  soit centré et étroit, c'est-à-dire que la moyenne arithmétique soit nulle et les écarts  $dz_i$  ne soient pas trop élevés en moyenne quadratique et n'atteignent jamais de valeur trop élevée.

Dans le cas où le MNT est interpolé à partir des courbes de niveau certains auteurs (Ackermann, 1980; Li, 1990; Kraus, 1994; Tahiri, 1997) proposent des modèles théoriques de prédiction de l'écart-type. De manière générale ils utilisent des expressions équivalentes à la formule empirique de Koppe

$$\sigma_z = a + b \tan \alpha \quad (4.5)$$

pour exprimer la précision altimétrique des MNT issus de courbes de niveau. Dans cette expression  $\tan \alpha$  représente la pente moyenne du terrain;  $a$  et  $b$  sont des constantes:  $b$  représente l'influence de la pente sur la précision altimétrique; et  $a$  est la composante verticale de la précision altimétrique qui est indépendante de la pente. Par exemple, (Maling, 1989) propose pour l'échelle 1 : 25 000 et pour l'équidistance 10m l'expression (en mètres)

$$\sigma_z = 1.0 + 7.0 \tan \alpha.$$

et donc une dépendance entre la précision, l'échelle et l'équidistance. Dans le même contexte (Kraus, 1994) utilise l'expression  $\sigma_z = 0.4 + 5.0 \tan \alpha$  pour décrire la qualité altimétrique des MNT qui dérivent des courbes de niveau des cartes topographiques au 1 : 5 000.

### 4.1.2 Exactitude des formes de terrain

Les critères de qualité énoncés précédemment, dont le contrôle est simple à concevoir et à mettre en oeuvre, ne permettent pas d'évaluer l'aptitude du MNT à représenter fidèlement les formes du relief.

Ainsi, certains auteurs proposent des mesures, outre l'*emq*, permettant d'exprimer d'autres caractéristiques qui devront être satisfaites par les MNT. Par exemple :

- (Baudot, 1990; Bolstad and Stowe, 1994; Giles and Franklin, 1996) utilisent la pente et l'orientation de la pente pour évaluer les qualités des MNT. Ces deux quantités, calculées en des positions<sup>15</sup>  $(x,y)$  du MNT sont comparées aux mêmes quantités calculées sur le terrain réel ou sur un modèle cartographique plus détaillé (c'est-à-dire, des courbes de niveau à une échelle plus grande). Ensuite, en utilisant des indices statistiques similaires à ceux décrits précédemment ils indiquent une estimation des qualités du MNT en matière de pente et d'orientation de la pente.
- (Polidori, 1991; Brown and Bara, 1994) utilisent la dimension fractale pour détecter la présence d'artefacts dans les MNT. En partant de l'hypothèse de l'isotropie du

---

<sup>15</sup> Dans la plupart des cas la pente et l'orientation de la pente sont calculées aux noeuds de la grille MNT.

terrain sur de courtes distances, Polidori étudie la présence d'anisotropies sur les altitudes en comparant la dimension fractale  $D$

$$D = 3 - m \quad (4.6)$$

dans les 4 directions principales (N-S, O-E, NO-SE, NE-SO) de la grille ; le paramètre  $m$  est lié à la fonction variogramme  $\gamma(d)$  par l'équation<sup>16</sup>

$$\gamma(d) = Ad^m \quad (4.7)$$

où l'équation du variogramme dans la direction O-E, par exemple, est donnée par

$$\gamma_{\text{O-E}}(d) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (z(x_i, y_i) - z(x_i + d, y_i))^2 \quad (4.8)$$

Dans ces expressions  $A$  est une constante,  $n$  est le nombre de points utilisés,  $z(x_i, y_i)$  est l'altitude du point  $i$  et  $z(x_i + d, y_i)$  est l'altitude du point situé, dans la direction O-E, à une distance  $d$  du point  $i$ . Dans la même ordre d'idées, Brown étudie la dimension fractale et la forme de la fonction  $\frac{1}{2}\gamma(d)$  (semi-variogramme) des fonctions dérivées de l'altitude (pente et courbure) pour détecter la présence d'artefacts (anisotropie) sur les surfaces dérivées.

- L'ombrage des MNT est une technique très répandue pour détecter visuellement les artefacts dus aux défauts de la fonction d'interpolation. En particulier (Wood and Fisher, 1993) utilisent des techniques d'ombrage sur les dérivées de l'altitude (pente et courbure) pour mettre en évidence la présence d'autres types d'artefacts qui échappent aux ombrages de l'altitude. La figure 4.1 illustre les ombrages de l'altitude  $H(x, y)$ , de la pente  $p = \sqrt{H_x^2 + H_y^2}$  et de la courbure  $k = H_{xx}^2 + 2H_{xy}^2 + H_{yy}^2$  de deux surfaces numériques représentant la même zone : un MNT obtenu par corrélation d'images et un MNT obtenu par la grille élastique à partir des courbes de niveau. La comparaison des différents ombrages nous montre que la pente et encore plus la courbure, sont beaucoup plus sensibles au « bruit » que l'altitude.
- (Carrara et al., 1997) utilise un critère très simple, l'histogramme des altitudes relatives<sup>17</sup>, pour vérifier si la fonction altitude d'un MNT issu des courbes de niveau, varie linéairement entre deux courbes consécutives. Le MNT est discrétisé selon une maille rectangulaire de pas très fin ; l'altitude de chaque noeud est regroupée dans une des  $n$  classes (par exemple 10) de valeurs correspondants à la partition de l'intervalle des altitudes entre deux courbes de niveau consécutives qu'encadrent le noeud. En d'autres termes, si les cotes de deux courbes sont 20 et 30 les 10 classes ont pour limites : 20-21, 21-22, ..., 29-30. Alors, si l'interpolation préserve la linéarité des altitudes entre deux courbes de niveau consécutives la forme de l'histogramme des altitudes relatives doit être rectangulaire. Par exemple, la figure 4.2 montre les histogrammes des altitudes relatives correspondantes aux deux MNT

16. Dans la pratique le paramètre  $m$  est estimé par la pente de la droite de moindres carré du graphe de la fonction  $\gamma(d)$ , reportée dans un système de coordonnées bilogarithmiques.

17. L'altitude relative d'un point est l'altitude du point par rapport à la courbe de niveau immédiatement inférieure.

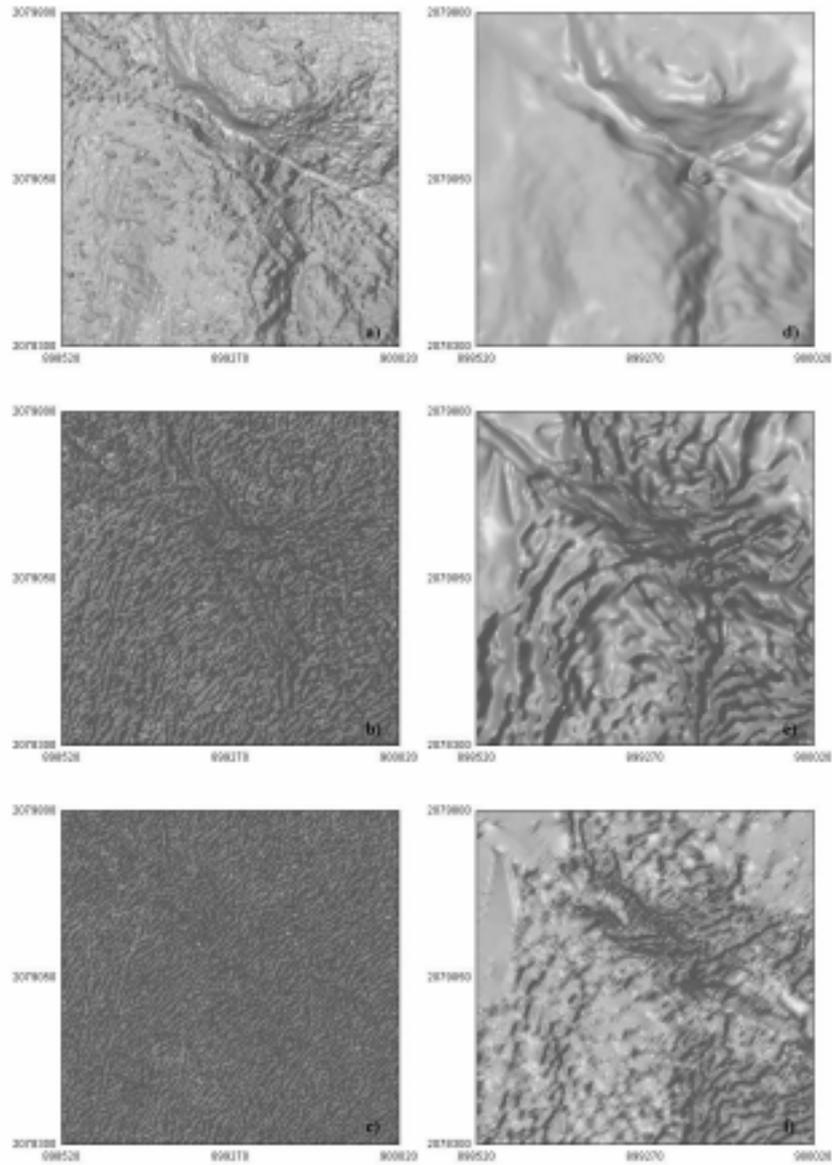


FIG. 4.1 – Visualisation de la qualité d'un MNT par ombrage de l'altitude (figures a et d) et de ses dérivées : pente (figures b et e) et courbure (figures c et e) ; Figures a) à c) ombrage d'un MNT issu de corrélation ; Figures d) à f) ombrage d'un MNT issu des courbes de niveau.

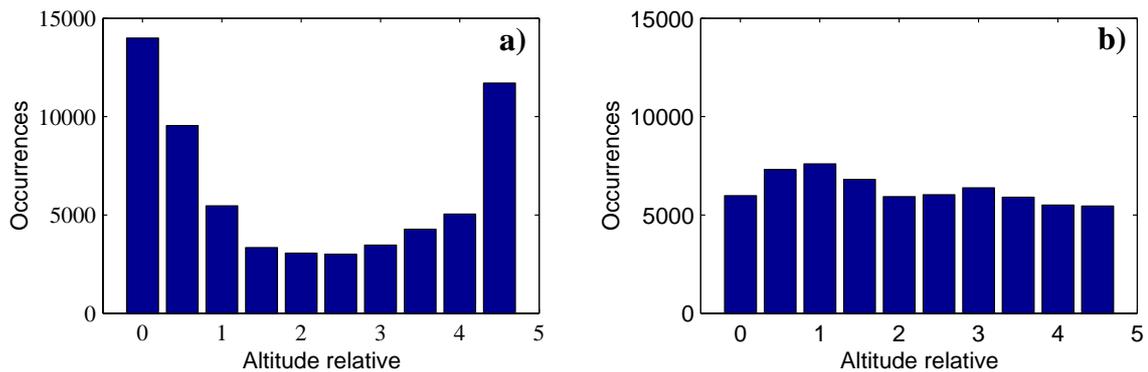


FIG. 4.2 – Altitudes relatives distribuées en 10 classes d'amplitude de 0.5m : a) MNT calculé sans lignes de contrainte ; b) MNT calculé avec des lignes de contrainte

de l'exemple 2 du chapitre 3. L'équidistance des courbes de niveau d'origine était de 5m. L'histogramme 4.2-a est relatif à la surface incorrecte, c'est-à-dire la surface calculée sans les lignes de contrainte ; la forme en « U » de l'histogramme révèle l'existence d'une distribution non uniforme des altitudes entre les courbes de niveau. L'histogramme 4.2-b est relatif à la surface correcte, c'est-à-dire calculée avec les lignes de contrainte ; on voit que la forme de l'histogramme est presque rectangulaire, comme il est logique de s'y attendre.

- (Kraus, 1994) propose d'évaluer la précision (écart-type) planimétrique d'un MNT par la formule

$$\sigma_{xy} = b + a \tan \alpha \quad (4.9)$$

où  $a$  et  $b$  sont les paramètres qui interviennent dans l'équation 4.5.

A l'exception des histogrammes des altitudes relatives, ces mesures nous semblent peu appropriées pour l'évaluation de l'équivalence des formes entre le modèle cartographique et le modèle numérique.

D'abord, la pente est pratiquement impossible à évaluer par comparaison à une référence, essentiellement parce que la pente est très difficile à définir sur le terrain (elle n'a de sens que par rapport à une échelle donnée), mais aussi parce que son calcul est très difficile à automatiser sur les courbes de niveau.

Deuxièmement, l'évaluation par la dimension fractale ne permet pas de comparer le modèle cartographique au modèle numérique car la dimension fractale de la surface représentée par les courbes de niveau est inconnue. D'autre part la différence entre deux valeurs de la dimension fractale est très difficile à interpréter. En d'autres termes, que représente une différence de 0.01 de la dimension fractale ( $D$ ) entre deux représentations numériques d'un même terrain ?

Donc, il nous faut sans doute essayer de trouver d'autres mesures qui peuvent chiffrer l'équivalence de forme entre une représentation du terrain par des courbes de niveau et un modèle numérique.

## 4.2 Proposition des mesures d'évaluation de l'équivalence

Pour comparer une surface numérique à une surface représentée par des courbes de niveau, une approche possible consiste à extraire des courbes de niveau de la surface numérique et à comparer les deux jeux de courbes.

Si l'on souhaite que les courbes de niveau issues de la surface numérique aient une apparence similaire à celle des courbes initiales, il est nécessaire chiffrer le degré de régularité qu'elles doivent présenter.

Tenant compte de l'aspect des courbes de niveau des figures 3.13-b et 3.13-d (ou 1.3-c 1.3-d), deux indices apparaissent susceptibles de mesurer la régularité de courbes polygonales du plan représentant des courbes de niveau :

- la longueur,
- la courbure moyenne.

### 4.2.1 Longueur des courbes de niveau

Soit  $A = A_0, A_1, \dots, A_n = B$  une ligne polygonale représentant une courbe de niveau ; désignons par  $l_i$  la longueur du segment  $A_{i-1}A_i$  ; la longueur de la courbe de niveau est mesurée par

$$L(A, B) = \sum_{i=1}^n l_i$$

Remarquons que ce critère ne dépend pas des points choisis pour échantillonner la courbe, c'est-à-dire que la longueur ne change pas si on rajoute des points sur un segment.

### 4.2.2 Courbure moyenne des courbes de niveau

#### 4.2.2.1 Courbure d'une courbe plane

Soit  $\mathbf{m}$  une courbe définie dans le plan et paramétrée par l'abscisse curviligne  $s$

$$\mathbf{m}(s) = (x(s), y(s)) \quad \text{pour } s \in J = [c, d] \subset \mathbb{R} \quad (4.10)$$

où  $x(s)$  et  $y(s)$  sont des fonctions de classe  $C^2$  et  $\|\mathbf{m}'(s)\| = 1$ .

Notons par  $\mathbf{t}(s)$  et  $\mathbf{n}(s)$  respectivement, les vecteurs tangent et normal à courbe  $\mathbf{m}$  en  $s$  (voir figure 4.3) ; il existe une fonction continûment dérivable  $\alpha(s)$  telle que

$$\mathbf{t}(s) = (\cos \alpha(s), \sin \alpha(s)) \quad ; \quad \mathbf{n}(s) = (-\sin \alpha(s), \cos \alpha(s)) \quad (4.11)$$

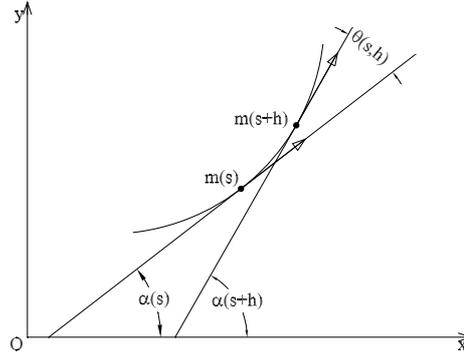


FIG. 4.3 – Courbure d'une courbe plane.

La courbure de la courbe  $\mathbf{m}$  en  $s$  est définie par

$$k(s) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha(s+h) - \alpha(s)}{h} = \alpha'(s) \quad (4.12)$$

Compte tenu de 4.11 et 4.12 et en supposant  $\alpha'(s) > 0$  ( $\alpha$  croissante) la courbure est aussi donnée par

$$k(s) = \|\mathbf{t}'(s)\| \quad (4.13)$$

Intuitivement la courbure mesure le défaut de rectitude de la courbe dans le voisinage de  $s$ : plus la courbure est forte plus la courbe tourne vite.

Supposons maintenant que la courbe  $\mathbf{m}$  est paramétrée par une variable  $t$  quelconque, c'est-à-dire

$$\mathbf{m}(t) = (x(t), y(t)) \quad \text{pour } t \in I = [a, b] \subset \mathbb{R} \quad (4.14)$$

où  $x(t)$  et  $y(t)$  sont des fonctions de classe  $C^2$  et  $\mathbf{m}'(t) = (x'(t), y'(t)) \neq 0, \forall t \in I$ . Dans ce cas, la courbure est donnée par

$$k(t) = \frac{\alpha'(t)}{s'(t)} \quad (4.15)$$

où  $s$  est une abscisse curviligne sur  $\mathbf{m}$ ,  $s(t) : I \rightarrow J = [c = s(a), d = s(b)]$ , définie par  $s(t) = \int_a^t \|\mathbf{m}'(u)\| du$ .

En effet, soit  $\bar{\mathbf{m}}$  une reparamétrisation de  $\mathbf{m}$  par l'abscisse curviligne  $s$

$$\mathbf{m}(t) = \bar{\mathbf{m}}(s(t)) \quad \forall t \in I.$$

Désignons par  $\bar{\mathbf{t}}, \bar{\mathbf{n}}, \bar{\mathbf{k}}$  respectivement la tangente, la normale et la courbure de  $\bar{\mathbf{m}}$  en un point  $s(t)$ . Par définition  $\mathbf{t}(t) = \bar{\mathbf{t}}(s(t))$ ; en utilisant la dérivée de la fonction composée, on a

$$\mathbf{t}'(t) = \bar{\mathbf{t}}'(s) \frac{ds}{dt}$$

Compte tenu de 4.13  $\bar{\mathbf{t}}'(s) = \bar{k}(s)\bar{\mathbf{n}}(s) = k\mathbf{n}$  par définition de  $\mathbf{n}$  et  $k$ . Alors

$$\mathbf{t}' = ks'\mathbf{n}$$

D'autre part il existe une fonction continûment dérivable  $a(t)$  telle que

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\mathbf{m}(t)}{\|\mathbf{m}(t)\|} = (\cos \alpha(t), \sin \alpha(t)) \quad \forall t \in I.$$

Donc,  $\mathbf{t}'(t) = \alpha'(t)(-\sin \alpha(t), \cos \alpha(t)) = \alpha'(t)\mathbf{n}$  et par conséquent  $\alpha'(t) = k(t)s'(t)$ .

#### 4.2.2.2 Courbure moyenne

**Proposition de définition :** nous définissons la courbure moyenne d'un arc  $\widehat{CD}$  d'une courbe  $\mathbf{m}$  paramétrée par l'abscisse curviligne  $s$  par

$$K_m = \frac{1}{l(\widehat{CD})} \int_c^d |k(s)| ds$$

où  $l(\widehat{CD}) = s(d) - s(c) = d - c$  désigne la longueur de l'arc compris entre  $C = s(c)$  et  $D = s(d)$ .

Si la courbe  $\mathbf{m}$  est donnée sous la forme paramétrique 4.14 la courbure moyenne du tronçon compris entre les points  $A = \mathbf{m}(a) = \mathbf{m}(s^{-1}(c))$  et  $B = \mathbf{m}(b) = \mathbf{m}(s^{-1}(d))$  est donnée par

$$K(A,B) = \frac{1}{s(b) - s(a)} \int_a^b |\alpha'(t)| dt \quad (4.16)$$

En effet, pour vérifier cette relation il suffit de voir que  $k(s) = k(t)s'(t) = \alpha'(t)$ .

Notons d'abord que cette grandeur ne dépend pas du paramétrage choisi, car en faisant un changement de paramétrage  $u \rightarrow \varphi(u) = t$  avec  $\varphi : [e, f] \rightarrow [a, b]$  une fonction bijective, dérivable ( $\varphi' > 0$ ), où  $e = \varphi^{-1}(a)$  et  $f = \varphi^{-1}(b)$ , on a

$$K(A,B) = \frac{1}{s(b) - s(a)} \int_a^b |\alpha'(t)| dt = \frac{1}{s \circ \varphi(f) - s \circ \varphi(e)} \int_e^f |\alpha'(\varphi(u))| \varphi'(u) du$$

d'où, en notant par  $\bar{s} = s \circ \varphi$  et  $\bar{\alpha} = \alpha \circ \varphi$  :

$$K(A; B) = \frac{1}{\bar{s}(f) - \bar{s}(e)} \int_e^f |\bar{\alpha}'(u)| du$$

#### Remarque :

La définition de la courbure moyenne par l'expression

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b |k(t)| dt$$

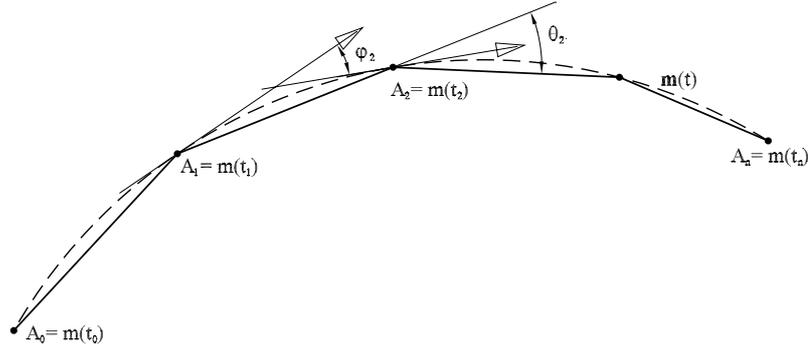


FIG. 4.4 – Courbure moyenne d'une ligne polygonale inscrite dans une courbe plane.

serait un mauvais choix, car elle dépend en général du paramétrage choisi. En effet, soit  $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$  une fonction bijective dérivable ( $\varphi' > 0$ ) correspondant à un changement de paramétrage  $u \rightarrow \varphi(u) = t$ , avec  $c = \varphi^{-1}(a)$  et  $d = \varphi^{-1}(b)$ ; on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-a} \int_a^b |k(t)| dt &= \frac{1}{b-a} \int_c^d |k(\varphi(u))| \varphi'(u) du = \frac{1}{b-a} \int_c^d |k(\varphi(u))| \varphi'(u) du \\ &\neq \frac{1}{d-c} \int_c^d |\bar{k}(u)| du \end{aligned}$$

lorsque  $|\bar{k}(u)| \neq \text{constante}$ <sup>18</sup>.

#### 4.2.2.3 Courbure moyenne d'une ligne polygonale

Soit  $\mathbf{m}(t)$ ,  $t \in [a, b]$  une courbe deux fois continûment dérivable et  $\mathbf{t}(t) = (\cos \alpha(t), \sin \alpha(t))$  sa tangente ( $\alpha$  dérivable).

Considérons maintenant une partition de l'intervalle  $[a, b]$

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$$

Cette partition définit la ligne polygonale (voir figure 4.4)

$$A = A_0 = m(t_0) ; A_1 = m(t_1) ; A_2 = m(t_2) ; \dots ; A_n = m(t_n)$$

inscrite dans la courbe. Soit  $\theta_i$  ( $0 \leq \theta_i \leq \pi$ ) l'angle des segments  $A_{i-1}A_i$  et  $A_iA_{i+1}$

$$\theta_i = \arccos\left(\frac{\overrightarrow{A_{i-1}A_i}}{l_i} \cdot \frac{\overrightarrow{A_iA_{i+1}}}{l_{i+1}}\right) \quad \text{avec } l_i = \left\| \overrightarrow{A_{i-1}A_i} \right\|$$

**Proposition de définition :** nous définissons la courbure moyenne de la ligne polygonale par

$$C(A, B) = \frac{\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_{n-1} + \theta_n}{l_1 + l_2 + \dots + l_n} \quad ([ \text{ ] pour une courbe fermée}) \quad (4.17)$$

18. La remarque est donc sans objet pour un cercle ou une droite, pour lesquels  $k(u) = \frac{1}{r}$  ou  $k(u) = 0$ .

Désignons par  $h$  le pas de la partition

$$h = \max_{0 \leq i \leq n-1} (t_{i+1} - t_i)$$

et par  $\varphi_i$  l'angle des tangentes

$$\varphi_i = |\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})|.$$

On peut écrire

$$\varphi_i = (t_i - t_{i-1}) |\alpha'(u_i)| \quad \text{avec } t_{i-1} < u_i < t_i.$$

Lorsque  $h \rightarrow 0$ , la quantité

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_{n-1} = (t_1 - t_0) |\alpha'(u_1)| + \dots + (t_n - t_{n-1}) |\alpha'(u_n)| \rightarrow \int_a^b |\alpha'(t)| dt$$

Mais comme  $\frac{\overrightarrow{A_{i-1}A_i}}{l_i} \rightarrow \mathbf{t}(t_{k-1})$

$$\theta_i \rightarrow \varphi_i$$

D'autre part lorsque  $h \rightarrow 0$ , la somme

$$l_1 + l_2 + \dots + l_n \rightarrow s(b) - s(a)$$

Donc, la quantité

$$\frac{\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_{n-1}}{l_1 + l_2 + \dots + l_n} \rightarrow \frac{1}{s(b) - s(a)} \int_a^b |\alpha'(t)| dt = K(A,B)$$

ce qui confirme la cohérence de la définition de la courbure moyenne pour une ligne polygonale.

#### 4.2.2.4 Courbure moyenne des plusieurs lignes polygonales continues disjointes

Considérons maintenant une ligne polygonale  $A,D$  composée par deux lignes polygonales  $(A,B)$  et  $(C,D)$  continues disjointes; notons par  $C(A,B)$  et  $C(C,D)$  les courbures moyennes de  $(A,B)$  et  $(C,D)$ , respectivement (voir figure 4.5).

Soit

$$C(A,B) = \frac{\sum \theta_i}{\sum l_i} \quad \text{et} \quad C(C,D) = \frac{\sum \theta'_i}{\sum l'_i}$$

La courbure moyenne de réunion des deux lignes polygonales  $(A,B)$  et  $(C,D)$  est définie par :

$$C((A,B) \cup (C,D)) = \frac{\sum \theta_i + \sum \theta'_i}{\sum l_i + \sum l'_i}$$

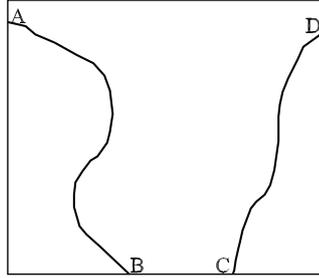


FIG. 4.5 – Courbure d'une ligne polygonale composée des plusieurs lignes polygonales continues disjointes.

Donc, en notant par  $L(A,B) = \sum l_i$  et par  $L(C,D) = \sum l'_i$  on a

$$C((A,B) \cup (C,D)) = \frac{L(A,B)C(A,B) + L(C,D)C(C,D)}{L(A,B) + L(C,D)}$$

**Remarque :** cette définition est nécessaire plus tard (voir Section 4.3.3) pour la construction du graphe de la fonction courbure moyenne des courbes de niveau.

### 4.3 Evaluation de la cohérence entre courbes initiales et intercalaires

On peut dire que, d'une manière générale, un MNT issu d'une représentation du relief par courbes de niveau est conforme à cette représentation si et seulement si :

- les courbes de niveau d'origine et celles de mêmes altitudes dérivées du MNT sont superposables,
- les courbes intercalaires dérivées du MNT « respectent » les courbes normales.

En effet, la première condition nous assure que sur les courbes de niveau il n'y a pas de biais en  $z$  entre les modèles cartographique et numérique ; autrement dit, que le MNT conserve bien les courbes de niveau dont il est issu. La deuxième condition nous assure que le modelé du terrain donné par la surface numérique est très proche du modelé représenté par les courbes de niveau ; ce qui revient à dire que l'interpolateur préserve la régularité de la pente entre deux courbes de niveau initiales consécutives.

#### 4.3.1 En utilisant l'aller-retour CN-MNT

Une façon simple de vérifier si la méthode d'interpolation préserve la cohérence entre les courbes initiales (ou normales) et les courbes intercalaires, c'est-à-dire la régularité de

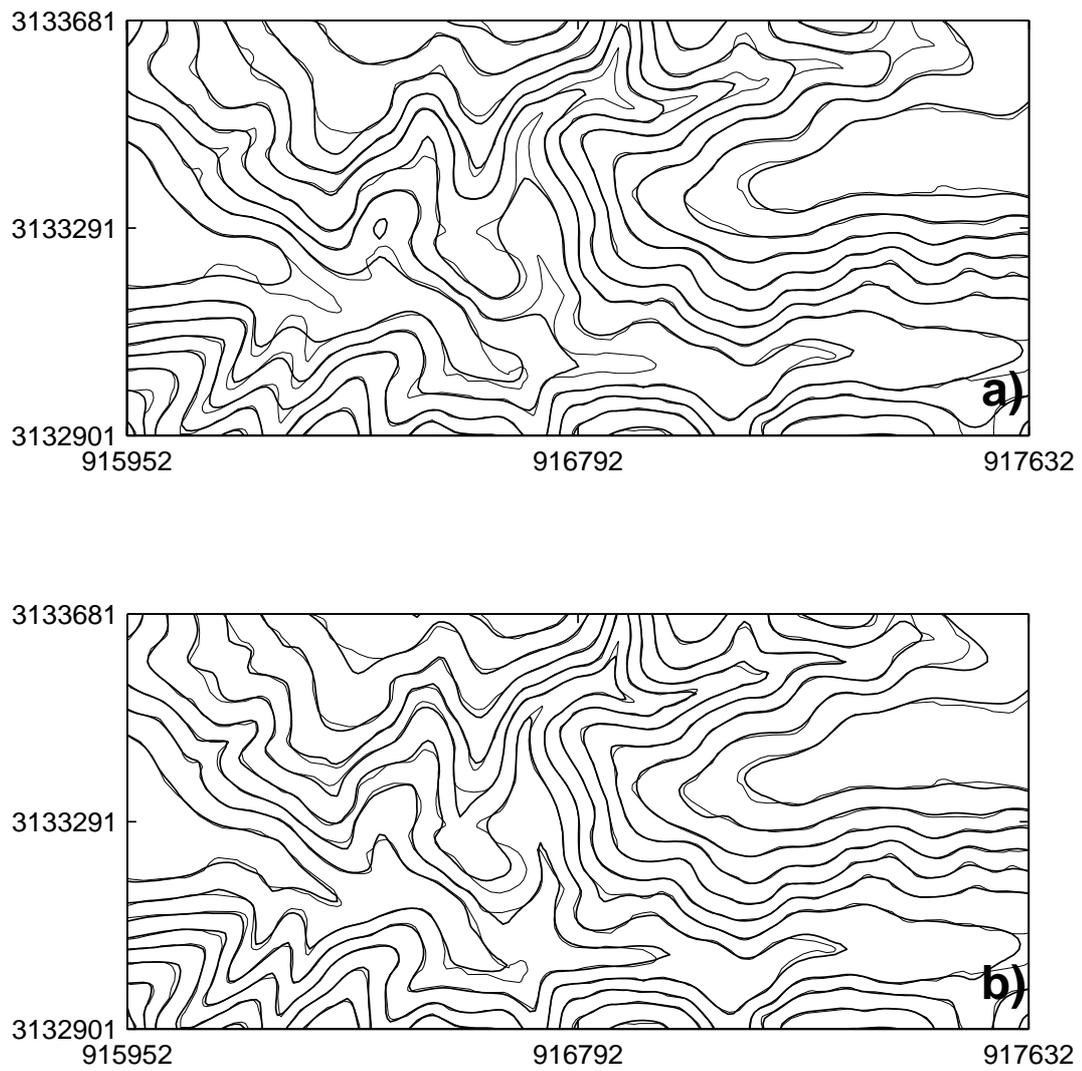


FIG. 4.6 – Aptitude de la grille élastique à préserver le modèle cartographique: a) aller-retour sans les lignes de contrainte; b) aller-retour avec les lignes de contrainte.

la pente entre les courbes initiales, consiste à effectuer un aller-retour  $CN \Leftrightarrow MNT$  : en partant des courbes de niveau initiales ( $CN_i$ ) de cotes  $(0, e, 2e, \dots, ne)$  on interpole par grille élastique le MNT et on dérive les courbes de niveau intercalaires de cotes  $(\frac{1}{2}e, \frac{3}{2}e, \dots, \frac{2n-1}{2}e)$ ; ensuite, à partir de ce jeu de courbes on calcule un nouveau MNT et on dérive les courbes de niveau finales ( $CN_f$ ) de mêmes cotes que les courbes de départ. La comparaison visuelle de ces deux jeux de courbes ( $CN_i$  et  $CN_f$ ) nous donne « l'aptitude » de la méthode d'interpolation à conserver la régularité de la pente entre deux courbes de niveau consécutives : plus l'écart entre les deux planches de courbes est petit, plus la méthode d'interpolation respecte le modèle cartographique et donc la cohérence entre les courbes initiales et les courbes intercalaires.

La figure 4.6 illustre la mise en oeuvre du calcul d'un aller-retour pour un terrain réel. La comparaison entre les courbes initiales ( $CN_i$ ) et finales ( $CN_f$ ) est faite par superposition, dans la même planche, des deux jeux de courbes. La figure 4.6-a) montre l'aller-retour en utilisant, dans le calcul du MNT, la méthode de la grille élastique sans les lignes de contrainte ; on constate principalement que dans le talweg les courbes finales (en gras) sont très éloignées des courbes initiales ; donc dans ces régions la grille élastique ne respecte pas la régularité de la pente du modèle cartographique. La figure 4.6-b) montre l'aller-retour mais en utilisant cette fois-ci la grille élastique avec les lignes de contrainte implicites dans les courbes de niveau ; l'écart entre les courbes finales (en gras) et les courbes initiales est maintenant plus petit, ce qui montre que, dans ces conditions, la grille élastique respecte mieux le modèle cartographique.

### 4.3.2 En utilisant la longueur

Le principe consiste à vérifier si la longueur des courbes de niveau calculées sur le MNT varie linéairement avec l'altitude. En effet, le terrain peut être assimilé, localement, à un morceau de cône sur lequel la longueur de chaque fragment<sup>19</sup> de courbe de niveau de cote  $z$  varie linéairement avec l'altitude  $z$  (voir figure 4.7).

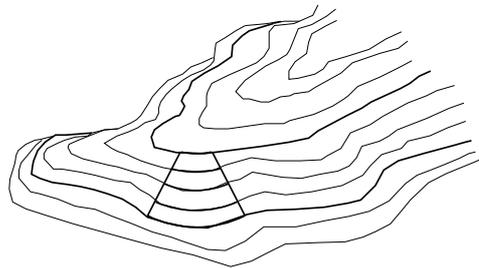


FIG. 4.7 – *Portion de cône approximant le terrain.*

---

19. Un fragment d'une courbe de niveau de cote  $z$  est défini par l'intersection de cette petite surface conique avec le plan horizontal de cote  $z$

### 4.3.2.1 Analyse des courbes initiales

Si les courbes de niveau d'origine et celles dérivées du MNT sont superposables, leur longueur doit être du même ordre de grandeur. En effet, le graphe de la figure 4.8 montre que pour la surface de l'exemple 1 du chapitre 3 les longueurs des courbes de niveau sont tout à fait comparables pour les deux MNT : le MNT calculé sans ligne de contrainte (mnt\_a) et le MNT calculé avec les lignes de contrainte (mnt\_b).

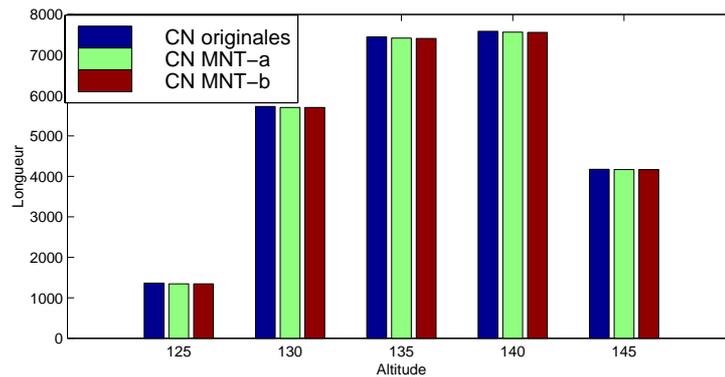


FIG. 4.8 – Comparaison des longueurs des courbes de niveau; le MNT\_a est le MNT calculé sans lignes de contrainte et le MNT\_b est le MNT calculé avec les lignes de contrainte

### 4.3.2.2 Analyse des courbes intercalaires

Afin de vérifier si les courbes intercalaires dérivées du MNT respectent les courbes normales, nous allons analyser les graphes des longueurs des courbes intercalaires.

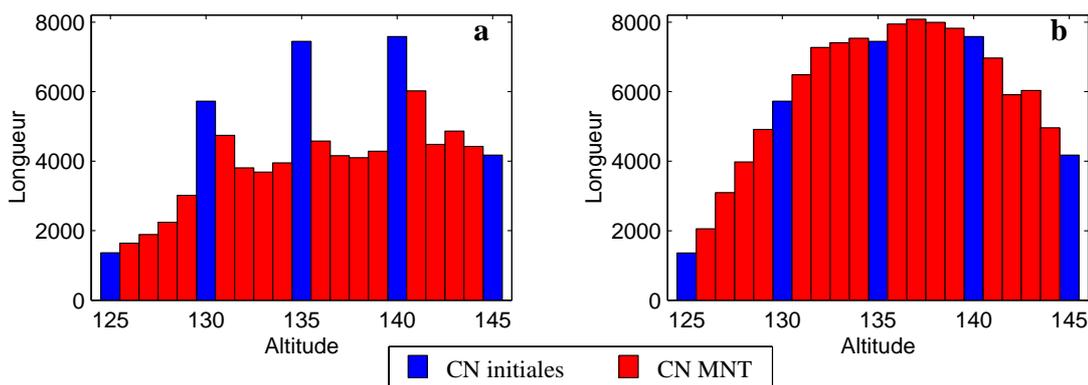


FIG. 4.9 – Evaluation de la cohérence entre courbes initiales et intercalaires (equidistance 1m): a) Longueur des CN du MNT calculé sans lignes de contrainte; b) Longueur des CN du MNT calculé avec les lignes de contrainte.

La figure 4.9 montre des graphes de la longueur des courbes intercalaires (d'équidistance  $1m$ ) dérivées de la surface de l'exemple 1 du chapitre 3. Le graphe 4.9-a est relatif à la surface incorrecte, c'est-à-dire qu'il correspond au MNT calculé sans les lignes de contrainte; on voit que les longueurs des courbes intercalaires sont globalement en désaccord avec celles des courbes initiales; d'autre part la forme en « U » entre deux courbes initiales montre que les longueurs sont d'autant moins cohérentes que les intercalaires s'éloignent des courbes initiales. Le graphe 4.9-b est relatif à la surface correcte, c'est-à-dire qu'il correspond au MNT calculé avec les lignes de contrainte; on voit que les longueurs varient plus régulièrement, comme il est logique de s'y attendre. On peut même préciser que si l'interpolation entre les courbes de niveau était parfaitement linéaire, nous devrions obtenir un graphe linéaire par morceaux; en fait on doit s'attendre à un graphe un peu plus lisse, puisque la grille élastique réalise une interpolation plus lisse que l'interpolation linéaire entre courbes.

Cette analyse peut être encore plus précise si on trace par exemple les graphes des courbes de niveau d'équidistance de  $0.5m$ . En fait, les graphes 4.10-a et 4.10-b, relatifs aux mêmes MNT de la figure 4.9, nous montrent que le désaccord entre courbes normales et intercalaires était plus marqué.

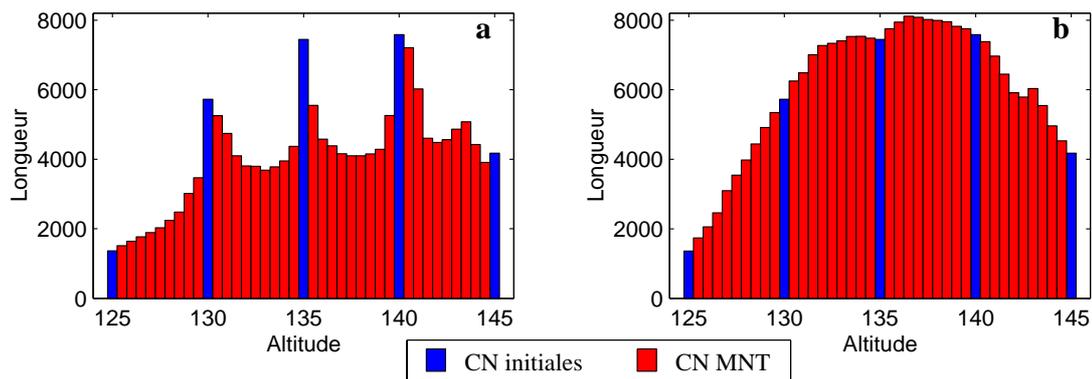


FIG. 4.10 – Evaluation de la cohérence entre courbes initiales et intercalaires (équidistance  $0.5m$ ): a) Longueur des CN du MNT calculé sans lignes de contrainte; b) Longueur des CN du MNT calculé avec les lignes de contrainte.

Analysons maintenant ce qui se passe avec le MNT de l'exemple 2 du chapitre 3. Le graphe 4.11-a est relatif à la surface incorrecte et le graphe 4.11-b est relatif à la surface correcte. Ces graphes confirment aussi que la cohérence entre courbes de niveau normales et intercalaires est indiscutablement plus évidente dans le MNT interpolé avec les lignes de contrainte.

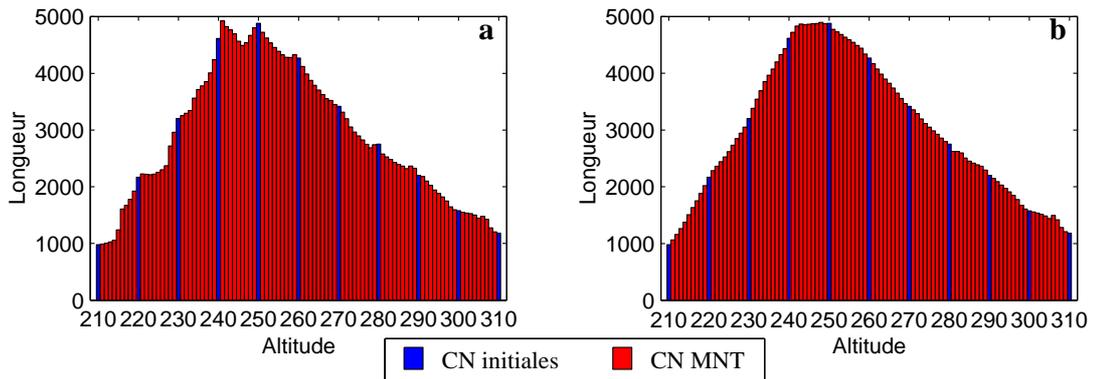


FIG. 4.11 – Evaluation de la cohérence entre courbes initiales et intercalaires : a) Longueur des CN du MNT ajusté sans lignes de contrainte ; b) Longueur des CN du MNT ajusté avec lignes de contrainte.

#### 4.3.2.3 Evaluation numérique de l'équivalence

L'équivalence entre le modèle cartographique et le modèle numérique peut alors être évalué numériquement par le paramètre  $\delta$

$$\delta = \frac{|A_{\text{initiales}}| - |A_{\text{intercalaires}}|}{n e}$$

où  $|A_{\text{initiales}}|$  représente l'aire du graphe des courbes initiales<sup>20</sup>,  $|A_{\text{intercalaires}}|$  l'aire du graphe des courbes intercalaires,  $n$  le nombre d'intervalles et  $e$  l'équidistance des courbes initiales.

	Exemple 1	Exemple 2
<b>mnt_a</b>	1615	107
<b>mnt_b</b>	212	4

TAB. 4.1 – Evaluation numérique de la cohérence entre courbes initiales et courbes intercalaires (valeurs en mètres)

Le tableau 4.1 montre les valeurs de  $\delta$  obtenues pour les deux exemples du chapitre 3. Dans l'exemple 1, la considération des lignes de contrainte dans la construction du MNT implique une grande réduction de la valeur du paramètre  $\delta$  et donc une nette amélioration de l'équivalence entre le modèle numérique et le modèle cartographique ; ceci est confirmé par la figure 3.16. Dans l'exemple 2, on observe que le MNT construit sans lignes de contrainte était déjà très proche du modèle cartographique et donc l'effet des lignes de contrainte sur le MNT est globalement moins visible. En effet, comme la surface représentée contient beaucoup de régions régulières, la réduction du paramètre  $\delta$  est moins évidente.

20. C'est le graphe théorique linéaire par morceaux.

Cette observation nous a suggéré qu'on pourrait encore restreindre l'étude de l'équivalence aux régions traversées par les lignes caractéristiques (c'est-à-dire aux régions critiques, voir Section 3.2.3.2). Toutefois, le calcul des morceaux de courbes de niveau qui traversent ces régions n'est pas facile et n'a pas pu être mise en oeuvre ici.

**Remarque :**

La longueur des courbes de niveau peut être aussi utilisée pour évaluer l'aptitude (ou qualité) d'un MNT à reproduire des courbes de niveau cartographiques. En effet, une condition nécessaire pour qu'un MNT ait des caractéristiques cartographiques est que le graphe de la longueur de ses courbes de niveau soit proche d'un graphe linéaire par morceaux.

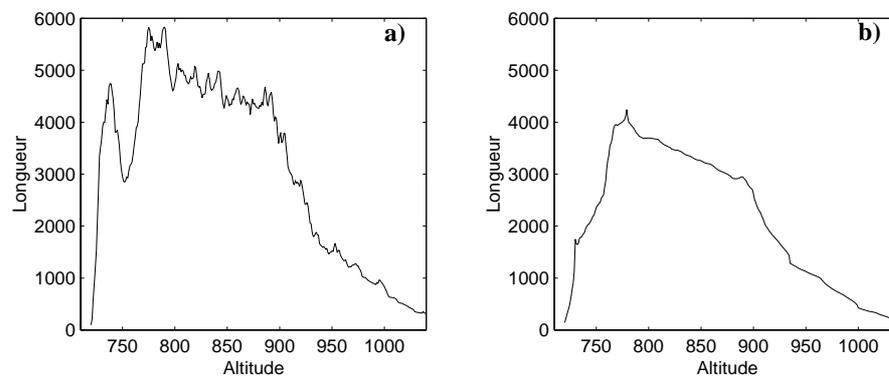


FIG. 4.12 – *Comparaison des longueurs des courbes de niveau dérivées de deux MNT: (a) MNT issu de corrélation automatique d'images; (b) MNT issu d'une représentation du relief par courbes de niveau.*

Ceci est confirmé par la figure 4.12 qui montre des graphes de la longueur des courbes de niveau. Le graphe 4.12-a est relatif à un MNT obtenu par corrélation automatique d'images<sup>21</sup> et le graphe 4.12-b est relatif à un MNT issu des courbes de niveau et représentant la même surface. L'irrégularité de le graphe du MNT issu de corrélation nous montre que la surface représentée par ce modèle numérique est trop irrégulière pour être utilisée par exemple dans le tracé de courbes de niveau; donc, il est nécessaire « lisser » ce MNT pour l'utiliser en cartographie. Le graphe du MNT interpolé à partir des courbes de niveau nous donne une référence pour régler ce lissage.

### 4.3.3 En utilisant la courbure moyenne

Dans cette section nous faisons état de l'utilisation de la courbure moyenne, bien que les essais n'aient pas été entièrement concluants, comme nous allons le voir.

Le principe est le même que celui utilisé pour évaluer la longueur des courbes de niveau. On commence d'abord par vérifier si les courbures moyennes des courbes de niveau

<sup>21</sup>. Il est intéressant de remarquer que pour le MNT issu de corrélation l'histogramme des altitudes relatives est en général rectangulaire

originales sont comparables aux courbures des courbes MNT *correspondantes* (c'est-à-dire de mêmes cotes que les courbes initiales).

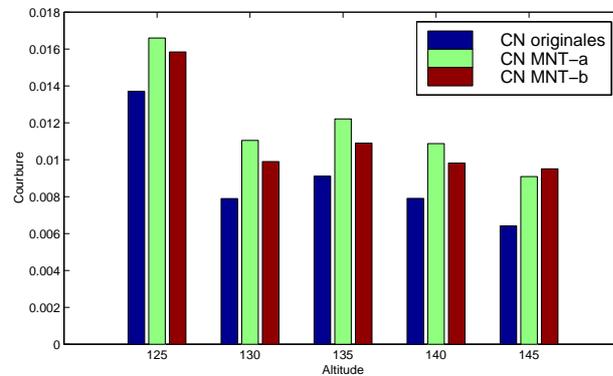


FIG. 4.13 – Comparaison des courbures des courbes de niveau ; on note par *MNT\_a* le MNT calculé sans lignes de contrainte et par *MNT\_b* le MNT calculé avec les lignes de contrainte

Prenons par exemple la surface de l'exemple 1 du chapitre 3 et traçons le graphe de la courbure moyenne en fonction de l'altitude des courbes MNT de mêmes cotes que les courbes originales (voir figure 4.13). On observe que, contrairement à ce qui se passe avec les longueurs des courbes, les valeurs des courbures moyennes correspondantes à différentes altitudes ne s'accordent pas entre elles. Donc, dans un premier temps ces résultats suggèrent que la fonction courbure moyenne est très sensible aux petits détails présents dans les courbes.

Néanmoins, analysons ce qui se passe avec la courbure moyenne des courbes intercalaires.

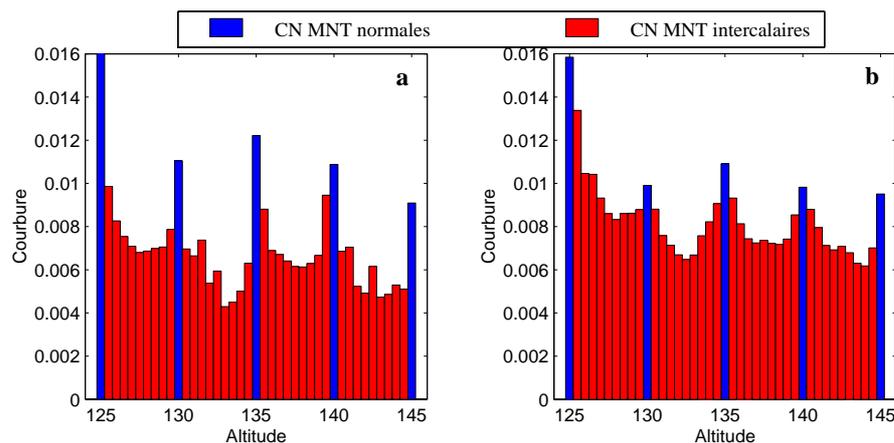


FIG. 4.14 – Evaluation de la courbure moyenne des courbes de niveau. a) Courbure des CN du MNT calculé sans lignes de contrainte ; b) Courbure des CN du MNT calculé avec les lignes de contrainte.

La figure 4.14 montre des graphes de courbure moyenne pour les courbes dérivées du MNT de l'exemple 1 du chapitre 3. Le graphe 4.14-a est relatif à la surface incorrecte, c'est-à-dire au MNT calculé sans les lignes de contrainte et le graphe 4.14-b est relatif à la surface correcte, c'est-à-dire au MNT calculé avec les lignes de contrainte. D'abord, on observe que les valeurs des courbures moyennes des courbes correspondant à la surface incorrecte sont inférieures aux courbures des courbes correspondant à la surface correcte ; donc le MNT calculé sans lignes de contrainte est plus lisse que le MNT calculé avec les lignes de contrainte. Ensuite, la forme en « U » du graphe entre deux courbes initiales montre que les courbes sont d'autant plus lisses que les intercalaires s'éloignent des courbes initiales.

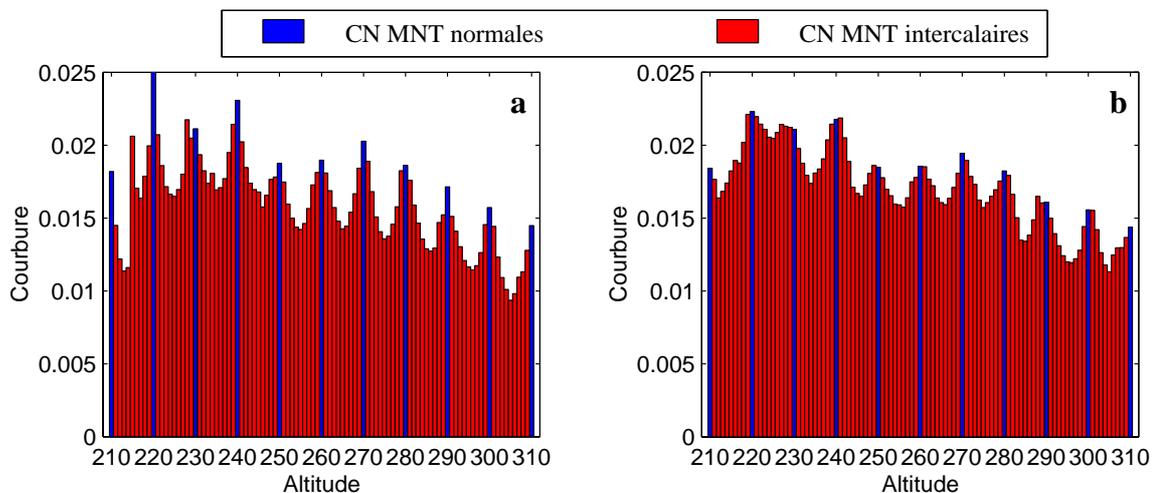


FIG. 4.15 – Evaluation de la courbure moyenne des courbes de niveau. a) Courbure des CN du MNT calculé sans lignes de contrainte ; b) Courbure des CN du MNT calculé avec les lignes de contrainte.

Ces observations sont plus visibles pour le MNT de l'exemple 2 du chapitre 3. Le graphe 4.15-a est relatif à la surface incorrecte et le graphe 4.15-b est relatif à la surface correcte. En fait, on constate aussi que le MNT calculé sans lignes de contrainte est plus lisse que le MNT calculé avec les lignes de contrainte, et qu'entre deux courbes de niveau normales la forme en « U » du graphe est davantage accentué.

En conclusion, l'analyse isolée des graphes de la fonction courbure moyenne ne permet pas de distinguer une surface acceptable d'une surface incorrecte ; même une surface visuellement acceptable, ou acceptable suivant le critère des longueurs des courbes, donne un graphe des courbures moyennes peu facile à interpréter.

Le fait que les courbures des courbes intercalaires soient sensiblement inférieures à celles des courbes initiales indique que la courbure moyenne est un critère sensible, donc probablement apte à mettre en évidence des artefacts très fins ; mais ce critère est pour le moment trop sensible pour notre besoin. Ce critère mériterait d'être étudié ultérieurement plus en détail.

# Chapitre 5

## Conclusions et perspectives

### 5.1 Résumé des résultats acquis

La construction d'un MNT de qualité à partir de courbes de niveau pose le problème de l'équivalence entre le modèle cartographique représenté par les courbes de niveau et le modèle numérique représenté par le MNT. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un MNT soit équivalent à une représentation du terrain par des courbes de niveau est que les courbes de niveau intercalaires dérivées du MNT s'accordent avec les courbes initiales.

D'une manière générale, cette condition n'est pas satisfaite par les modèles numériques calculés à partir des courbes de niveau, en particulier pour le MNT ajusté par la méthode de la grille élastique. En effet, si les seules informations que l'on extrait des courbes de niveau sont les points que les constituent (ce qui revient à dire que l'on traite les courbes comme des suites de points sans lien les uns avec les autres) ces MNT présentent des artefacts qui se traduisent par des courbes intercalaires beaucoup plus tendues que les courbes initiales ; ce phénomène est particulièrement visible dans les régions de crêtes et de talwegs.

Dans ce travail on a montré que le problème des courbes intercalaires peut être résolu de façon satisfaisante en imposant à la grille élastique des contraintes telles que les directions de l'horizontale ou les lignes de crête et de talweg. Le fait intéressant est que ces contraintes dérivent des courbes de niveau elles-mêmes, et ne nécessitent l'apport d'aucune information extérieure additionnelle.

Les directions de l'horizontale sont imposées à la grille élastique par l'intermédiaire d'une grille de vecteurs. Les deux composantes de ces vecteurs sont interpolées séparément à partir des composantes des directions de l'horizontale figurant dans les lignes polygonales représentant les courbes de niveau.

Les lignes de contrainte constituent une approximation des lignes de crête et de talweg et sont calculées par l'intermédiaire d'une triangulation conforme aux courbes de niveau. L'introduction de cette triangulation a pour effet de relier les courbes entre elles, autre-

ment dit de prendre en compte la topologie, c'est-à-dire les relations de voisinage au sein du réseau de courbes.

Les résultats obtenus avec les directions de l'horizontale sont moins satisfaisants car il est difficile d'estimer les directions de l'horizontale de façon précise. La façon correcte de réaliser une interpolation vectorielle serait sans doute d'interpoler les angles. Cependant, ce problème nous a paru difficile à traiter avec la grille élastique. Par ailleurs (Amodei and Benbourhim, 1991; Chen and Suter, 1998) proposent une méthode d'interpolation dans un champ de vecteurs (appliqué à la météorologie) mais la relative complexité du problème ne nous a pas encore permis d'exploiter leur résultats.

Cependant, les lignes de contrainte estimant les crêtes et les talwegs constituent une solution simple au problème des courbes intercalaires. Contrairement aux directions de l'horizontale qui doivent être connues avec précision les lignes de crête et de talweg ne nécessitent pas d'être positionnées exactement.

S'il fallait perfectionner davantage la méthode on pourrait néanmoins penser à améliorer le tracé des lignes de contrainte. Par exemple en cas de crête ou de talweg dissymétrique, la vraisemblance voudrait que la ligne caractéristiques ne soit pas un axe médian, mais soit décalée vers le flanc le plus incliné.

On pourrait aussi songer à extraire ces lignes directement d'un diagramme de Voronoï, où elles sont particulièrement visibles, en suivant par exemple un approche similaire à celle décrite par (Hangouët, 1998); néanmoins, cette proposition est incompatible avec la précédente.

La cohérence entre les courbes de niveau initiales et les courbes intercalaires dérivées d'un MNT peut être évaluée numériquement à partir de la longueur et la courbure moyenne des courbes de niveau. En outre, l'écart entre les courbes finales et les courbes initiales donné par un aller-retour  $CN \Leftrightarrow MNT$  nous montre l'aptitude de la méthode d'interpolation à conserver la régularité de la pente entre deux courbes consécutives, imposée par le modèle cartographique.

Le non-respect de cette régularité se traduit par la présence, dans le MNT, d'artefacts, particulièrement visibles dans les régions de crêtes et de talwegs. Le graphe de la fonction longueur des courbes de niveau est un outil intéressant pour détecter la présence de ce type d'artefacts dans les MNT; la régularité de ce graphe exprime donc une des qualités cartographiques des MNT.

Pour l'instant la courbure moyenne est un critère trop sensible pour mettre en évidence la présence d'artefacts du même ordre de grandeur que ceux détectés par la longueur des courbes de niveau. Une solution possible consisterait peut être à l'utiliser avec un autre critère comme par exemple la longueur moyenne des tronçons rectilignes (à une tolérance près) des courbes de niveau .

## 5.2 Perspectives d'application

### 5.2.1 Lissage cartographique des MNT obtenus par corrélation

Afin d'accélérer le processus de saisie des bases de données les producteurs d'information géographique étudient la possibilité d'automatiser partiellement la phase de restitution par des méthodes automatiques d'extraction de l'information topographique. En particulier, en ce qui concerne l'information sur le relief, l'Institut Géographique National (IGN) envisage l'utilisation des MNT obtenus par corrélation automatique des images aériennes dans la production des courbes de niveau pour sa base de données topographique (Philippe Guiavarc'h, 1995; Dupéret, 1996).

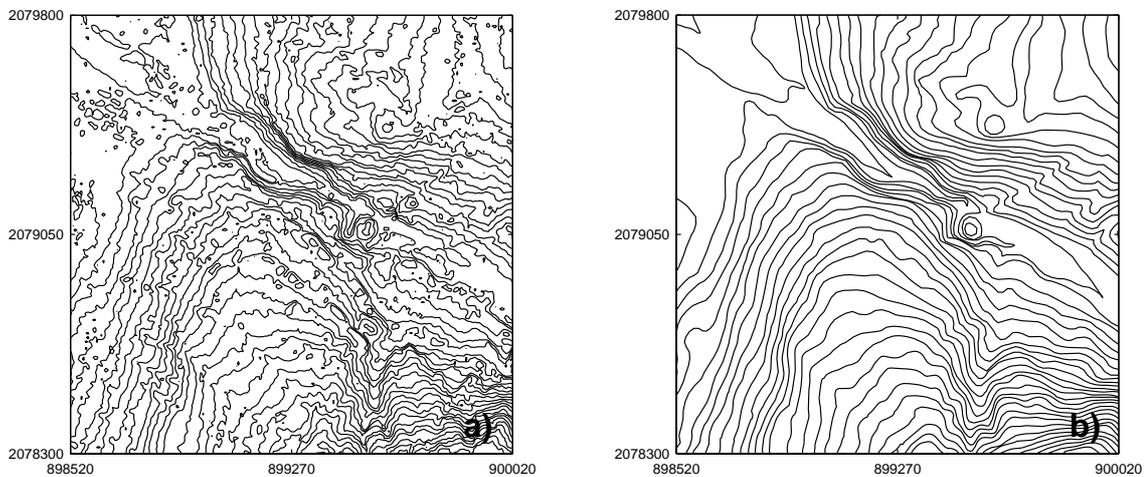


FIG. 5.1 – Aspect des courbes de niveau: a) Tracées sur le MNT issu de corrélation; b) Obtenus par restitution photogrammétrique manuelle (provenance BDTopo - IGN).

Actuellement les corrélateurs disponibles permettent, en général, de restituer le terrain avec une précision altimétrique, c'est-à-dire avec une erreur moyenne quadratique en  $z$  ( $\sigma_z$ ), comparable à celle observée en restitution classique du relief (Beauvillain and Jamet, 1995). Or, la qualité (mesurée en termes d'erreur  $\sigma_z$ ) de ces MNT, bien que suffisante pour beaucoup d'applications, comme par exemple la production des orthophotos, n'est pas (à ce stade de construction du MNT) satisfaisante dans la production des courbes de niveau et de cartes de pente et estompage. En effet, la figure 5.1 montre un extrait d'un MNT obtenu par corrélation automatique, représenté sous la forme de courbes de niveau, et les courbes obtenues par photogrammétrie classique. Bien que l'erreur moyenne quadratique  $\sigma_z$  du MNT soit conforme aux spécifications de qualité de la BDTopo pour les courbes de niveau (Dupéret, 1996), on constate que les courbes dérivées du MNT de corrélation ne sont pas satisfaisantes dans la représentation cartographique du relief car elles contiennent beaucoup de petits détails nuisant à la « lecture du terrain », ou encore elles sont trop bruitées.

Pour utiliser ce MNT dans la production des courbes de niveau cartographiques il est nécessaire donc de « lisser » le MNT. Or, le graphe de la fonction longueur peut être utilisée pour évaluer les techniques de lissage cartographique. En effet, il apparaît sur la figure 4.12 que ce graphe constitue un outil numérique qui nous permettra de régler le degré de lissage que l'on veut donner au MNT. Ce degré de lissage peut être encore mieux ajusté en ne considérant que les morceaux de courbes au voisinage des crêtes et des talwegs.

### 5.2.2 Comparaison des différentes restitutions d'un même terrain

Un problème posé initialement dans le sujet de cette thèse était de comprendre quelles sont les caractéristiques invariantes (ou stables) dans la représentation en courbes de niveau et en particulier le degré de généralisation des courbes.

L'idée est de comparer différentes restitutions d'un même terrain. En effet, si actuellement nous demandons à plusieurs restituteurs photogrammètres et à plusieurs topographes de nous donner leur représentation du terrain sous la forme des courbes de niveau, nous obtiendrons, pour un même terrain,  $n$  représentations non identiques et pourtant toutes semblables (voir figure 5.2).

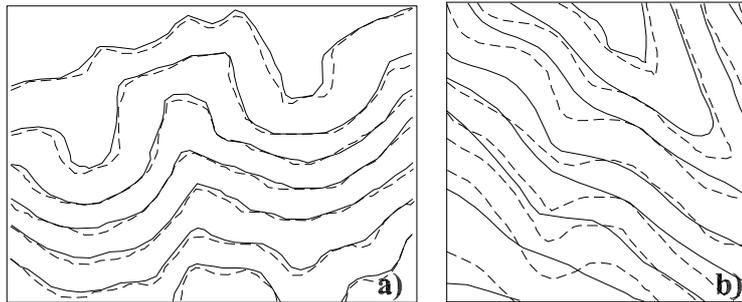


FIG. 5.2 – *Superposition de 2 restitutions : a) faites par le même opérateur (équidistance 10m); b) faites par deux opérateurs (équidistance 20m).*

Or, cette comparaison ne nous paraissait réalisable que sur des MNT, sous réserve que ceux-ci soient parfaitement équivalents aux modèles cartographiques correspondants.

Disposant maintenant d'un outil garantissant une équivalence acceptable cette étude nous semble envisageable.

# Annexe A

## Interpolation polynômiale par morceaux

Soit  $f(x)$  une fonction définie dans un intervalle  $I = [x_1, x_N] \subset \mathbb{R}$  dont on connaît les valeurs  $z_c = f(x_c)$  aux points  $x_c$  de  $I$  :  $x_{c+1} = x_c + h$ ,  $c = 1, \dots, N-1$ . On cherche à estimer  $f(x)$  par une fonction  $g(x)$  telle que

$$z_c = g(x_c) \quad c = 1, \dots, N. \quad (\text{A.1})$$

Dans ces conditions on dit que  $g$  réalise l'interpolation de  $f$ .

### A.1 Interpolation linéaire

L'interpolation linéaire consiste à choisir  $g(x)$  égale dans chaque intervalle  $[x_c, x_{c+1}]$  à un polynôme de degré 1. En effectuant le changement de variable  $t = \frac{x-x_c}{h}$  le polynôme interpolateur s'écrit sous la forme  $P_{x_c, h}(t) = at + b$ . Compte tenu des conditions A.1 on a

$$\begin{aligned} P_{x_c, h}(0) &= b = z_c \\ P_{x_c, h}(1) &= a + b = z_{c+1} \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$P_{x_c, h}(t) = (1-t)z_c + tz_{c+1}$$

Donc,

$$g(x) = \frac{x_{c+1} - x}{h} z_c + \frac{x - x_c}{h} z_{c+1} \quad \forall x \in [x_c, x_{c+1}] \quad (\text{A.2})$$

d'où l'existence et l'unicité de  $g(x)$ .

On peut aussi obtenir  $g(x)$  d'une autre façon. En effet, soit  $Q(t)$  la fonction  $g(x)$  d'interpolation associée à la famille  $\{v_c\}$  telle que :

$$v_c = \begin{cases} 1 & \text{si } c = 0 \\ 0 & \text{si } c \neq 0, (c \text{ entier}) \end{cases}$$

Alors sur  $[x_c, x_{c+1}]$  la fonction

$$S(x) = Q\left(\frac{x - x_c}{h}\right)z_c + Q\left(\frac{x - x_{c+1}}{h}\right)z_{c+1}$$

est un polynôme du premier degré qui vérifie :  $S(x_c) = z_c$ ,  $S(x_{c+1}) = z_{c+1}$ . Autrement dit  $S(x)$  réalise l'interpolation linéaire sur  $[x_c, x_{c+1}]$ ; alors d'après l'unicité :

$$g(x) = Q\left(\frac{x - x_c}{h}\right)z_c + Q\left(\frac{x - x_{c+1}}{h}\right)z_{c+1} = \sum_{k=c}^{c+1} Q\left(\frac{x - x_k}{h}\right)z_k \quad \forall x \in [x_c, x_{c+1}]$$

On peut préciser  $Q(t)$  en utilisant l'expression trouvée pour  $P_{x_c, h}(t)$  :

$$\begin{aligned} Q(t) &= 1 - t && \text{sur } [0, 1] \\ Q(t) &= 0 && \text{pour } x > 1 \\ Q(-t) &= Q(t) \text{ par symétrie} && \text{pour } x < 0 \end{aligned}$$

c'est-à-dire (voir figure A.1),

$$Q(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{si } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |t| > 1 \end{cases}$$

On peut aussi condenser l'écriture de  $g(x)$  en observant que  $Q\left(\frac{x - x_k}{h}\right) = Q(t + c - k) = 0$  pour  $k \in [c, c + 1]^C$ ; donc

$$g(x) = \sum_{c=1}^N z_c Q\left(\frac{x - x_c}{h}\right) \quad \forall x \in [x_1, x_N] \quad (\text{A.3})$$

Notons que dans cette expression  $z_c = g(x_c)$ ,  $c = 1, \dots, N$  et donc  $g(x)$  réalise bien l'interpolation de  $f(x)$ . En outre, l'expression A.3 est exacte pour les polynômes de degré  $\leq 1$ , c'est-à-dire, pour tout  $p(x) = ax + b$  on a

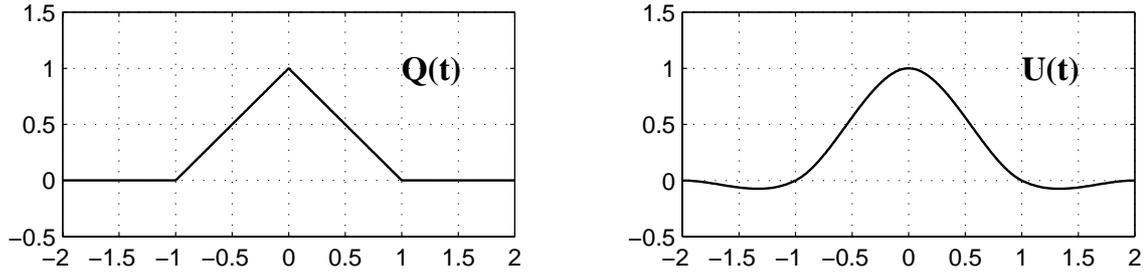
$$p(x) = \sum_{c=1}^N p(x_c) Q\left(\frac{x - x_c}{h}\right) \quad \forall x \in [x_1, x_N]$$

On va démontrer que cette égalité a lieu en chaque intervalle  $[x_c, x_{c+1}]$ . Soit  $x \in [x_c, x_{c+1}]$ , tenant compte de l'équation A.2

$$g(x) = \frac{x_{c+1} - x}{h} p(x_c) + \frac{x - x_c}{h} p(x_{c+1})$$

qui est un polynôme de degré 1 au plus. Ce polynôme vérifie  $g(x_c) = p(x_c)$ ,  $g(x_{c+1}) = p(x_{c+1})$ , ce qui implique  $g(x) = p(x)$ .

Le défaut de l'interpolation linéaire est que la fonction  $g(x)$  n'est pas dérivable. Si l'on souhaite une fonction  $g(x)$  dérivable, il faut utiliser des polynômes de degré supérieur à 1.

FIG. A.1 – Fonctions d'interpolation : linéaire  $Q(t)$  et cubique  $U(t)$ .

## A.2 Interpolation cubique

L'interpolation cubique consiste à prendre pour  $g(x)$  dans chaque intervalle  $[x_c, x_{c+1}]$  un polynôme de degré 3. Pour que cette méthode présente un avantage réel sur l'interpolation linéaire, on exigera que la fonction  $g(x)$  soit dérivable. Donc,  $g(x)$  est un polynôme interpolateur d'Hermite de degré 3 passant par les deux points

$$(x_c, z_c) \quad , \quad (x_{c+1}, z_{c+1})$$

et dont les dérivées ont des valeurs fixes

$$g'(x_c) = -\frac{a}{h}(z_{c+1} - z_c) \quad , \quad g'(x_{c+1}) = -\frac{a}{h}(z_{c+2} - z_c), \quad a \neq 0$$

Afin de simplifier les calculs, l'expression de  $g(x)$  sera déduite dans un repère attaché à l'intervalle  $[x_c, x_{c+1}]$ , où on prend comme unité de mesure le pas  $h$ . Ainsi, en désignant par  $t = \frac{x-x_c}{h}$ , le polynôme interpolateur d'Hermite s'écrit sous la forme

$$P_{x_c, h}(t) = \alpha t^3 + \beta t^2 + \gamma t + \delta$$

Les conditions sur  $P_{x_c, h}(t)$  s'écrivent :

$$\begin{aligned} P_{x_c, h}(0) &= z_c = \delta \\ P_{x_c, h}(1) &= z_{c+1} = \alpha + \beta + \gamma + \delta \\ P'_{x_c, h}(0) &= -a(z_{c+1} - z_c) = \gamma \\ P'_{x_c, h}(1) &= -a(z_{c+2} - z_c) = 3\alpha + 2\beta + \gamma \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \alpha &= (z_c - z_{c+1} + z_{c-1} - z_{c+2})a - 2z_{c+1} + 2z_c \\ \beta &= (z_{c+2} + 2z_{c+1} - 2z_{c-1} - z_c)a - 3z_c + 3z_{c+1} \\ \gamma &= -a(z_{c+1} - z_c) \\ \delta &= z_c \end{aligned}$$

ce qui montre l'existence et l'unicité du polynôme  $P_{x_c, h}(t)$ , avec

$$\begin{aligned} P_{x_c, h}(t) &= (at - 2at^2 + at^3)z_{c-1} + [1 - (a+3)t^2 + (2+a)t^3]z_c + \\ &\quad + [-at + (3+2a)t^2 - (a+2)t^3]z_{c+1} + (at^2 - at^3)z_{c+2} \end{aligned}$$

On peut aussi obtenir  $g(x)$  d'une autre façon. En effet, soit  $V_a(t)$  la fonction  $g(x)$  d'interpolation associée à la famille  $\{v_c\}$  telle que :

$$v_c = \begin{cases} 1 & \text{si } c = 0 \\ 0 & \text{si } c \neq 0, (c \text{ entier}) \end{cases}$$

On a donc en particulier :

$$V'_a(0) = -a(v_1 - v_{-1}) = 0, V'_a(1) = -a(v_2 - v_0) = a, V'_a(2) = -a(v_3 - v_1) = 0 \\ V'_a(-1) = V'_a(1) = -a, V'_a(-2) = V'_a(2) = 0$$

Alors, sur  $[x_c, x_{c+1}]$  la fonction

$$S(x) = V_a\left(\frac{x - x_{c-1}}{h}\right)z_{c-1} + V_a\left(\frac{x - x_c}{h}\right)z_c + V_a\left(\frac{x - x_{c+1}}{h}\right)z_{c+1} + V_a\left(\frac{x - x_{c+2}}{h}\right)z_{c+2}$$

est un polynôme de degré 3 qui vérifie les propriétés :

$$S(x_c) = z_c, S(x_{c+1}) = z_{c+1}, S'(x_c) = -\frac{a}{h}(z_{c+1} - z_{c-1}), S'(x_{c+1}) = -\frac{a}{h}(z_{c+2} - z_c)$$

autrement dit réalise l'interpolation d'Hermite sur  $[x_c, x_{c+1}]$ . Donc d'après l'unicité :

$$g(x) = \sum_{k=c-1}^{c+2} V_a\left(\frac{x - x_k}{h}\right)z_k \quad \forall x \in [x_c, x_{c+1}]$$

Notons que l'écriture de  $g(x)$  peut se condenser en observant que  $V_a\left(\frac{x - x_k}{h}\right) = V_a(t + c - k) = 0$  pour  $k \in [c - 1, c + 2]^C$  ; donc

$$g(x) = \sum_{c=1}^N z_c V_a\left(\frac{x - x_c}{h}\right) \quad \forall x \in [x_2, x_{N-1}] \quad (\text{A.4})$$

On peut aussi préciser  $V_a(t)$  en utilisant l'expression trouvée pour  $P_{x_c, h}(t)$ . En effet,

$$\begin{aligned} V_a(t) &= 1 - (a + 3)t^2 + (2 + a)t^3 && \text{pour } t \in [0, 1] \\ V_a(t) &= a(t - 1) - 2a(t - 1)^2 + a(t - 1)^3 = 8at - 4a - 5at^2 + at^3 && \text{pour } t \in [1, 2] \\ V_a(t) &= 0 && \text{pour } t > 2 \\ V_a(-t) &= V_a(t) \text{ par parité} && \text{pour } t < 0 \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$V_a(t) = \begin{cases} (a + 2)|t|^3 - (a + 3)|t|^2 + 1 & \text{si } 0 \leq |t| \leq 1 \\ a|t|^3 - 5a|t|^2 + 8a|t| - 4a & \text{si } 1 \leq |t| \leq 2 \\ 0 & \text{si } |t| \geq 2 \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

Cette expression représente une famille de fonctions cubiques paramétrée par la valeur  $a$ . La fonction dérivée est une fonction impaire ( $V_a(-t) = -V_a(t)$ ) donnée par

$$V'_a(t) = \begin{cases} (3a + 6)t^2 - (2a + 6)t & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 3at^2 - 10at + 8a & \text{si } 1 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{si } t \geq 2 \end{cases}$$

### A.2.1 Choix de la fonction cubique

On a vu que chaque valeur de la fonction  $V_a(t)$  définit une courbe formée par trois arcs de cubique raccordant en contact de  $-2$  à  $+2$ .

Le choix du paramètre  $a$  est fait de façon que la fonction  $g(x)$  vérifie la propriété de reconstruction pour les polynômes de degré  $\leq 1$ ; cela veut dire que si  $P(x) = qx + r$ , alors  $P(x) = \sum_k P(x_k)V_a(\frac{x-x_k}{h})$ . On va chercher pour quelle valeur de  $a$  l'égalité a lieu dans chaque intervalle  $[x_c, x_{c+1}]$ . Soit  $x_c \leq x \leq x_{c+1}$  et désignons par

$$\begin{aligned} R(x) &= \sum_k P(x_k)V_a\left(\frac{x-x_k}{h}\right) \\ &= P(x_{c-1})V_a\left(\frac{x-x_{c-1}}{h}\right) + P(x_c)V_a\left(\frac{x-x_c}{h}\right) + P(x_{c+1})V_a\left(\frac{x-x_{c+1}}{h}\right) + \\ &\quad + P(x_{c+2})V_a\left(\frac{x-x_{c+2}}{h}\right) \end{aligned}$$

Alors  $R(x)$  est un polynôme de degré  $\leq 3$  qui vérifie :

$$R'(x_c) = -\frac{a}{h}(P(x_{c+1}) - P(x_{c-1}))$$

Mais  $P(x+h) - P(x-h) = 2hP'(x)$ , d'où

$$R'(x_c) = -2aP'(x_c)$$

Pour qu'on ait  $R(x) = P(x)$  dans  $[x_c, x_{c+1}]$ , et en particulier  $R'(x_c) = P'(x_c)$ , il faut donc que :

$$a = -\frac{1}{2} \tag{A.6}$$

Supposons maintenant que  $P(x)$  est un polynôme de degré  $\leq 2$ ,  $P(x) = px^2 + qx + r$ . On a

$$R(x_c) = P(x_c) \quad R(x_{c+1}) = P(x_{c+1})$$

et puisque  $a = -\frac{1}{2}$

$$R'(x_c) = P'(x_c) \quad R'(x_{c+1}) = P'(x_{c+1})$$

autrement dit  $R(x)$  réalise l'interpolation d'Hermite de  $P(x)$  sur  $[x_c, x_{c+1}]$ . Comme  $P(x)$  est aussi un interpolant d'Hermite de lui-même et que l'interpolation d'Hermite est unique, c'est que

$$P(x) = R(x) \text{ sur } [x_c, x_{c+1}]$$

Ce qui prouve que pour  $a = -\frac{1}{2}$  la fonction donné par l'expression A.5, c'est-à-dire (voir figure A.1)

$$U(t) = \begin{cases} \frac{3}{2}|t|^3 - \frac{5}{2}|t|^2 + 1 & \text{si } 0 \leq |t| \leq 1 \\ -\frac{1}{2}|t|^3 + \frac{5}{2}|t|^2 - 4|t| + 2 & \text{si } 1 \leq |t| \leq 2 \\ 0 & \text{si } |t| \geq 2 \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

conduit à une formule de reconstruction exacte pour les polynômes de degré  $\leq 2$ .

Une conséquence de la propriété de reconstruction de la fonction  $U$  est qu'elle est la seule conduisant à une erreur de norme  $O(h^3)$  pour une fonction  $f(x)$  de classe  $C^3$ ; les autres  $V_a$  ( $a \neq -\frac{1}{2}$ ) donnent une erreur de norme  $O(h^2)$  (Keys, 1981). En effet, on suppose  $f(x)$  connue aux noeuds d'interpolation  $x_{c=1, \dots, N}$ , trois fois dérivable partout et  $f'''(x)$  bornée, c'est-à-dire  $|f'''(x)| \leq A \forall x$ . L'estimation de  $f(x)$  par interpolation cubique est

$$g(x) = \sum_c f(x_c) U\left(\frac{x - x_c}{h}\right)$$

On s'intéresse à l'erreur d'estimation  $e(x) = |g(x) - f(x)|$  dans l'intervalle  $[x_c, x_{c+1}]$ . Or, dans cet intervalle, la fonction  $f(x)$  peut s'écrire, en utilisant la formule de Taylor, sous la forme

$$f(x) = p_{x_c}(x) + r_{x_c}(x)$$

où  $p_{x_c}(x)$  est un polynôme de degré 2 et  $|r_{x_c}(x)| = \frac{1}{6}|f'''(t)(x - x_c)^3| \leq \frac{A}{6}|x - x_c|^3$  avec  $x_c < t < x$ . Donc,

$$g(x) = \sum_k p_{x_c}(x_k) U\left(\frac{x - x_k}{h}\right) + \sum_k r_{x_c}(x_k) U\left(\frac{x - x_k}{h}\right)$$

Mais  $p_{x_c}(x)$  est un polynôme de degré 2, alors  $\sum_k p_{x_c}(x_k) U\left(\frac{x - x_k}{h}\right) = p_{x_c}(x)$ , d'où

$$g(x) = p_{x_c}(x) + \sum_k r_{x_c}(x_k) U\left(\frac{x - x_k}{h}\right)$$

Si  $x \in [x_c, x_{c+1}]$ , une majoration de l'erreur d'estimation est

$$\begin{aligned} e(x) &= \left| \sum_k r_{x_c}(x_k) U\left(\frac{x - x_k}{h}\right) - r_{x_c}(x) \right| \\ &\leq \left| \sum_{k=c-1}^{c+2} U\left(\frac{x - x_k}{h}\right) r_{x_c}(x_k) \right| + A|x - x_c|^3 \leq A \sum_{k=c-1}^{c+2} |x_k - x_c|^3 + Ah^3 \\ &\leq \frac{11}{6} Ah^3 \end{aligned}$$

Comme cette inégalité est indépendante de  $x_c$ ,

$$\varepsilon(x) = \sup\{e(x); x_1 \leq x \leq x_N\} = O(h^3)$$

ce qui prouve que l'erreur d'estimation est de norme  $O(h^3)$ .

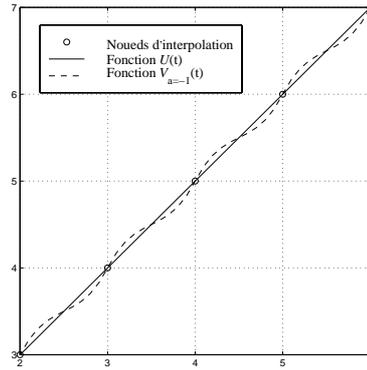


FIG. A.2 – Reconstruction de la fonction  $f(x) = x + 1$  par les fonctions  $U$  et  $V_{-1}$ .

Finalement, on remarque que dans la littérature certains auteurs utilisent la fonction  $V_{a=-1}(t)$  au lieu de la fonction  $U(t)$ . Or l'utilisation en cartographie de cette fonction ne semble pas recommandable car, comme nous avons déjà montré, elle ne permet pas de restituer exactement une fonction affine. En effet, dans la reconstruction du polynôme  $f(x) = px + q$  par la fonction générique  $g(x) = \sum_c z_c V_a(\frac{x-x_c}{h})$  on a

$$g'(x_c) = -\frac{ap}{h}(x_{c+1} - x_c) = -2ap.$$

Or, si  $a = -1$ ,  $g'(x_c) = 2p \neq f'(x_c)$ . Cet défaut est illustré dans la figure A.2. La reconstruction de la fonction  $f(x) = x + 1$  par la fonction d'interpolation  $V_{-1}(t)$  donne une courbe comportant des ondulations.

### A.2.2 Interpolation sur les bords

La formule A.4 est valable pour  $\forall x \in [x_2, x_{N-1}]$ . Pour interpolier dans les intervalles  $[x_1, x_2]$  et  $[x_{N-1}, x_N]$ , il est nécessaire d'introduire quelques conditions supplémentaires. D'une part, dans l'intervalle  $[x_1, x_2]$  on va obliger à la fonction  $g(x)$  à passer par les deux points  $(x_1, z_1)$  et  $(x_2, z_2)$  et, pour assurer la dérivabilité,  $g'(x_2) = \frac{1}{2h}(z_3 - z_1)$ ; en d'autres termes  $g(x)$  doit être un polynôme de degré 2:  $g(x) = px^2 + qx + r$ . Or, pour  $h = 1$ , on a

$$\begin{aligned} g(0) &= r = z_1 \\ g(1) &= p + q = z_2 \\ g'(1) &= 2p + q = \frac{1}{2}(z_3 - z_1) \end{aligned}$$

ce qui donne

$$g(t) = \frac{1}{2}(t^2 - 3t + 2)z_1 + (-t^2 + 2t)z_2 + \frac{1}{2}(t^2 - t)z_3$$

En procédant de façon identique pour  $x \in [x_2, x_{N-1}]$  on obtient

$$g(t) = \frac{1}{2}(t^2 - t)z_{N-2} + (-t^2 + 1)z_{N-1} + \frac{1}{2}(t^2 + t)z_N$$

On arrive aux mêmes résultats en ajoutant deux noeuds d'interpolation supplémentaires  $x_0$  et  $x_{N+1}$  tels que  $x_0 = x_1 - h$  et  $x_{N+1} = x_N + h$ . En effet, la fonction d'interpolation cubique  $g$  est (pour  $t = (x - x_c)/h$ ):

$$g(t) = \frac{1}{2}[(-t^3 + 2t^2 - t)z_{c-1} + (3t^3 - 5t^2 + 2)z_c + (-3t^3 + 4t^2 + t)z_{c+1} + (t^3 - t^2)z_{c+2}] \quad (\text{A.8})$$

Si  $x \in [x_1, x_2]$  on a

$$g(t) = \frac{1}{2}[(-z_0 + 3z_1 - 3z_2 + z_3)t^3 + (-5z_1 + 4z_2 - z_3)t^2 + (-z_0 + z_2)t] + z_1$$

Mais dans cet intervalle  $g(t)$  est un polynôme de degré 2 au plus ; donc

$$z_0 = 3z_1 - 3z_2 + z_3 \quad (\text{A.9})$$

De façon similaire on conclut que

$$z_{N+1} = 3z_N - 3z_{N-1} + z_{N-2} \quad (\text{A.10})$$

En conclusion, si on ajoute les noeuds supplémentaires  $x_0$  et  $x_{N+1}$ , où on suppose que la fonction qu'on veut estimer  $f$  prend les valeurs  $z_0$  et  $z_{N+1}$ , la formule d'interpolation cubique A.8 devient valable pour  $\forall x \in [x_c, x_{c+1}]$ ,  $c = 1, \dots, N$ .

### A.3 Généralisation a deux dimensions

Supposons donné dans le plan un maillage régulier  $\mathcal{M}_h$  de noeuds  $(x_c, y_l)$ , définis par  $x_{c+1} = x_c + h$ , et  $y_{l+1} = y_l + k$  avec  $c = 1, \dots, N-1$  et  $l = 1, \dots, M-1$ . La généralisation de la formule d'interpolation se fait naturellement par

$$g(x, y) = \sum_{c=1}^N \sum_{l=1}^M z_{c,l} V\left(\frac{x - x_c}{h}\right) V\left(\frac{y - y_c}{k}\right)$$

où les coefficients d'interpolation  $z_{c,l} = f(x_c, y_l)$ , et la fonction d'interpolation  $V$  est  $V = Q$  pour l'interpolation bilinéaire et  $V = U$  pour l'interpolation bicubique.

## Annexe B

# Diagramme de Voronoï et Triangulation de Delaunay

Dans la suite on désigne toujours par  $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  un ensemble fini de  $n$  points du plan (espace affine  $\mathbb{R}^2$ ). Dans cet espace, on considère définie la fonction distance

$$d(p, q) = \sqrt{(p_x - q_x)^2 + (p_y - q_y)^2} \quad \forall p, q \in \mathcal{P}$$

### B.1 Diagramme de Voronoï

On veut générer une partition du plan pour laquelle chaque élément  $\mathcal{V}(p_i)$  est le sous-ensemble des points du plan qui sont plus proches d'un point  $p_i \in \mathcal{P}$  que de tous les autres points de  $\mathcal{P}$ , c'est-à-dire :

$$\mathcal{V}(p_i) = \{q \in \mathbb{R}^2 : d(q, p_i) \leq d(q, p_j), \quad \forall j \neq i\}.$$

Chaque région  $\mathcal{V}(p_i)$  est appelée polygone de Voronoï associé au point  $p_i$  ; ce polygone est défini par l'intersection des  $n - 1$  demi-plans contenant  $p_i$  et délimités par les médiatrices des segments  $p_i p_j$  ; chaque polygone de Voronoï est donc convexe et éventuellement non borné (voir figure B.1).

Le réseau formé des points équidistants de deux points  $p_i$  constitue le diagramme de Voronoï de  $\mathcal{P}$  et est désigné par  $\text{Vor}(\mathcal{P})$  ; il est formé des sommets et d'arêtes ; les arêtes sont des portions des médiatrices et les sommets sont définis par les intersections des arêtes et donc équidistants à plus de deux points de  $\mathcal{P}$ .

Dans la pratique, le calcul du diagramme de Voronoï est fait à partir d'une triangulation de Delaunay, car elle est plus simple à mettre en oeuvre.

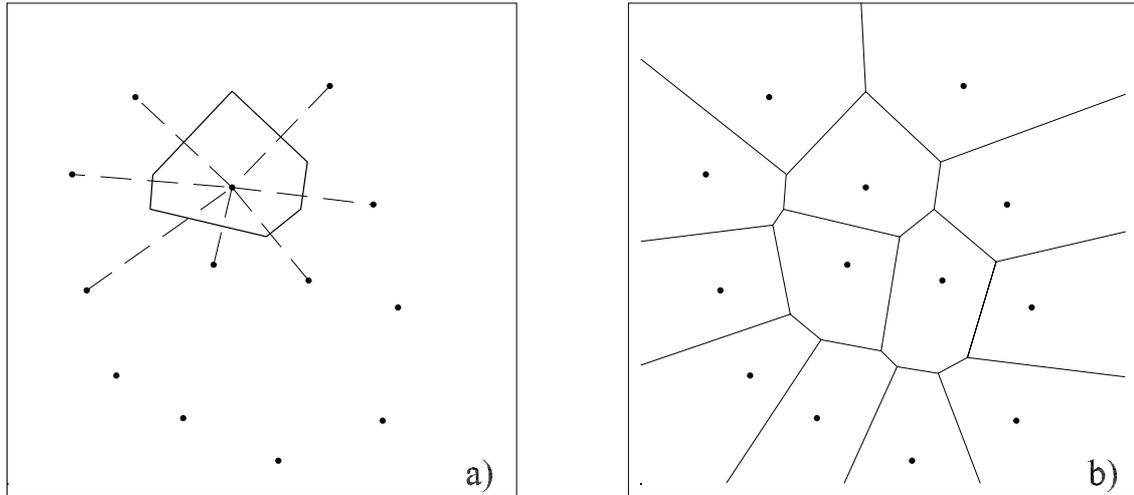


FIG. B.1 – Construction du diagramme de Voronoï: a) Chaque polygone de Voronoï est défini par l'intersection des demi-plans. b) Diagramme de Voronoï du semis de points

## B.2 Triangulation de Delaunay

Par définition, chaque cellule  $\mathcal{V}(p_i)$  est non vide et associée à un point  $p_i$  de  $\mathcal{P}$ . À partir de ces  $\mathcal{V}(p_i)$  on peut construire la triangulation de Delaunay. En effet, dans le cas particulier où il n'existe pas de quadruplet de points  $(p_i, p_j, p_k, p_l)$  de  $\mathcal{P}$  cocirculaires tout sommet de Voronoï est équidistant de trois points  $(p_i, p_j, p_k)$  de  $\mathcal{P}$ . Autrement dit, tout sommet du diagramme de Voronoï est centre d'un cercle (cercle de Delaunay) passant par trois points  $(p_i, p_j, p_k)$  et ne contenant aucun autre point  $p_l$  de  $\mathcal{P}$  (de Berg et al., 1997). La triangulation obtenue en joignant les triplets des points  $(p_i, p_j, p_k)$  est appelé triangulation de Delaunay. Cette propriété d'orthogonalité entre les cellules de Voronoï et la triangulation de Delaunay est illustré dans la figure B.2.

La triangulation de Delaunay est donc caractérisée par la propriété que le cercle circonscrit à chaque triangle  $(p_i, p_j, p_k)$ , c'est-à-dire le cercle de Delaunay, ne contient aucun autre point de  $p_l$  de  $\mathcal{P}$ . En plus, dans le cas où il n'y a pas de points cocirculaires, la triangulation de Delaunay est unique et maximise le plus petit angle des triangles.

Dans la littérature, on trouve beaucoup d'algorithmes qui permettent de construire des triangulations Delaunay en deux dimensions. Une présentation et comparaison des différents algorithmes est donnée en (Midtbø, 1993). Nous présentons ici seulement l'algorithme de « division puis fusion » (en anglais divide-and-conquer) car c'est cet algorithme qu'on utilise dans la construction de la triangulation de Delaunay. Cet algorithme est du type récursif et permet de construire la triangulation avec une complexité  $\mathcal{O}(n \log_2 n)$  dans le pire des cas ; il se décompose en trois étapes :

1. Séparation de l'ensemble  $P$  en deux sous-ensembles disjoints  $P_1$  et  $P_2$ , de même taille à quelques éléments près, tels que  $P_1$  et  $P_2$  sont séparés par une ligne polygonale  $\sigma$ .
2. Construction des deux triangulations de Delaunay  $\mathcal{T}(P_1)$ ,  $\mathcal{T}(P_2)$  récursivement sui-

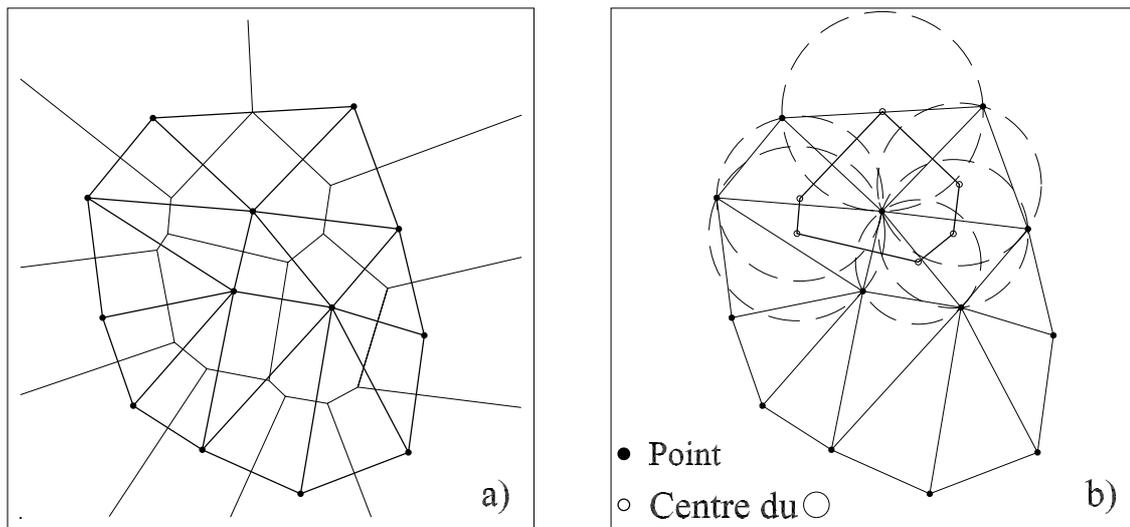


FIG. B.2 – Dualité entre le Diagramme de Voronoï et la triangulation de Delaunay. a) Diagramme de Voronoï et Triangulation de Delaunay. b) Construction du diagramme de Voronoï à partir de la triangulation de Delaunay

vant le même principe ; la fin de récursivité est donnée par  $P_1$  ou  $P_2$  réduit à trois points.

### 3. Fusion des deux triangulations de Delaunay $\mathcal{T}(\mathcal{P}_1)$ et $\mathcal{T}(\mathcal{P}_2)$

Une fois calculée la triangulation Delaunay de l'ensemble  $\mathcal{P}$  des points, la construction du diagramme de Voronoï  $\text{Vor}(\mathcal{P})$  associé à cette triangulation est immédiat. En effet, pour chaque point  $p_i \in \mathcal{P}$ , il suffit de déterminer les triangles qui partagent ce sommet et de calculer les cercles circonscrits à ces triangles ; le polygone de Voronoï associé au point  $p_i$  est le polygone convexe formé par les segments de droite qui joignent les centres des cercles.

## B.3 Triangulations contraintes

Maintenant on dispose d'un ensemble de points  $\mathcal{P}$  et d'un ensemble d'arêtes  $\mathcal{C}$  (aussi appelé champ des contraintes). On suppose que toutes les arêtes de  $\mathcal{C}$  sont des segments définis par des points  $\mathcal{P}$ , et que ces segments s'intersectent uniquement en leurs extrémités.

On se propose, alors, de construire une triangulation de l'enveloppe convexe de  $\mathcal{P}$  avec des propriétés similaires à la triangulation de Delaunay et telle que les arêtes apparaissent de l'une des deux façons suivantes (George and Borouchaki, 1997) :

- dans la triangulation conforme (en anglais conforming Delaunay triangulation), chaque arête de  $\mathcal{C}$  peut être subdivisée, chaque subdivision étant un côté de triangle,

- dans la triangulation contrainte (en anglais *constrained Delaunay triangulation*), chaque arête entière de  $\mathcal{C}$  est un côté de triangle.

(Shewchuck, 1997) donne une description détaillée de ces types d’algorithmes. Ses sources de code ont été adaptés et implémentés dans notre environnement de travail. Remarquons, cependant, que l’idée de base des deux méthodes est la même : on part d’une triangulation Delaunay construite sur  $\mathcal{P}$  et on regarde quelles sont les arêtes qui ne sont pas présentes dans la triangulation. Pour ces arêtes, selon la méthode utilisée, on procède comme suit :

- dans le cas de la triangulation conforme (c’est-à-dire, par cassage des arêtes) on introduit les points milieux des arêtes et on retriangule le nouvel échantillon de points. On répète cette opération jusqu’à ce que toutes les arêtes, définies par les partitions introduites, soient présentes dans la triangulation.
- dans le cas de la triangulation contrainte (c’est-à-dire par forçage des arêtes), on détermine le polygone formé par les triangles dont au moins une arête intersecte l’arête contrainte. Ce polygone est retriangulé de façon que l’arête contrainte soit présente. Cette opération est répétée pour chaque arête contrainte (voir figure B.3).

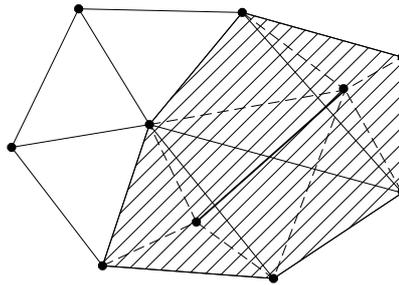


FIG. B.3 – *Construction d’une triangulation contrainte.*

L’avantage de la triangulation contrainte par rapport à la triangulation conforme réside dans le fait que cette triangulation ne contient pas d’autres sommets que ceux qui appartiennent à  $\mathcal{P}$ . Par contre, dans la triangulation conforme tous les triangles sont de Delaunay (c’est-à-dire vérifient la propriété du cercle de Delaunay), au contraire de la triangulation contrainte. Cependant la triangulation par forçage des contraintes conserve une des propriétés de la triangulation de Delaunay, à savoir que parmi toutes les triangulations qui vérifient les contraintes  $\mathcal{C}$  cette triangulation maximise le plus petit angle des triangles.

La figure B.4 illustre la construction des deux triangulations (conforme et contrainte) par la méthode décrite précédemment. La figure B.4-a montre les points (l’ensemble  $\mathcal{P}$ ) et l’arête (contraintes  $\mathcal{C}$ ) à trianguler. La figure B.4-b montre la triangulation Delaunay de  $\mathcal{P}$ . Cette triangulation ne contient pas l’arête  $\mathcal{C}$ . La figure B.4-c montre la triangulation

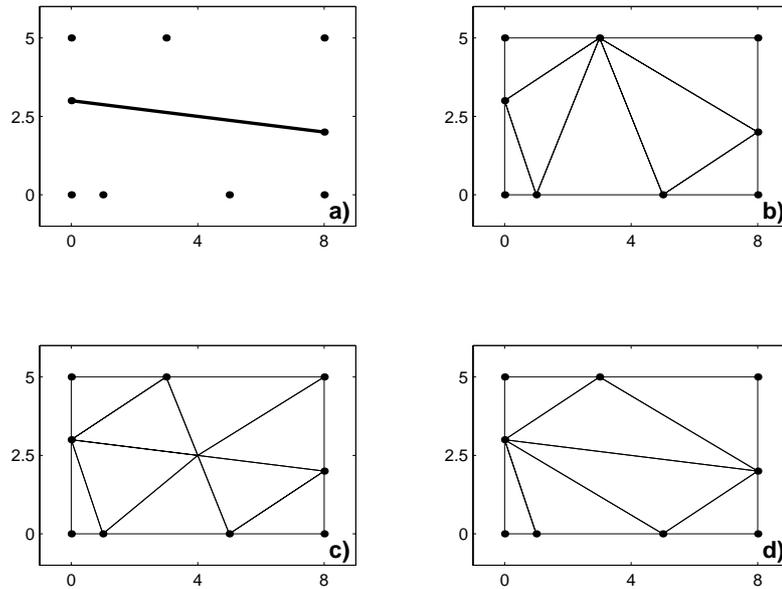


FIG. B.4 – *Triangulations contraintes*: a) *Les données sont des points et des arêtes*; b) *Triangulation de Delaunay des points*; c) *Triangulation conforme*; d) *Triangulation contrainte*.

conforme qui résulte de la triangulation de Delaunay de l'ensemble  $\mathcal{P}$  et du point milieu de l'arête. La figure B.4-d montre la triangulation contrainte que résulte de l'insertion de l'arête dans la triangulation.

# Bibliographie

- Ackermann, F. (1980). The accuracy of digital terrain models. In *Proceedings of the 37th Photogrammetric Week*, pages 133–143. University of Stuttgart.
- Amodei, L. and Benbourhim, M. (1991). A vector spline approximation. *Journal of Approximation theory*, 67:51–79.
- Aumann, G., Ebner, H., and Tang, L. (1991). Automatic derivation of skeleton lines from digitized contours. *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*, 46:259–268.
- Baranger, J. (1991). *Analyse Numérique*. Hermann, Paris.
- Baudot, Y. (1990). A comparison of different methods used to generate digital elevation models. *IEEE*, pages 2435–2438.
- Beauvillain, E. and Jamet, O. (1995). Evaluation de la qualité d’un MNT issu de corrélation automatique de photographies aériennes. *Bull. SFPT*, (137):108–112.
- Bignone, F. and Nonin, P. (1995). Une amélioration de la méthode spline plaque-mince en vue du calcul de modèles numériques de terrain. *Bull. SFPT*, (139):20–31.
- Bolstad, P. and Stowe, T. (1994). An evaluation of DEM accuracy: Elevation, slope and aspect. *Photogrammetric Engineering & Remote Sensing*, 60(11):1327–1332.
- Brändli, M. (1992). A triangulation-based method for geomorphological surface reconstruction from contour lines. In *Proceedings of the Third European Conference on GIS (EGIS’92)*, volume 1, pages 691–700, Munich.
- Brandli, M. and Schneider, B. (1994). Shape modeling and analysis of terrain. *International Journal of Shape Modeling*, 1(2):167–189.
- Brown, D. and Bara, T. (1994). Recognition and reduction of systematic error in elevation and derivative surfaces from  $7\frac{1}{2}$ -minute DEMs. *Photogrammetric Engineering & Remote Sensing*, 60(2):189–194.
- Carrara, A., Bitelli, G., and Carla, R. (1997). Comparaison of techniques for generating digital terrain models from contour lines. *Int. J. Geographical Information Science*, 11(5):451–473.
- Carré, J. (1971a). Les essais de charlieu. *Bulletin d’information de l’IGN*, (14).
- Carré, R. (1971b). Figuré du terrain. Cours de l’Ecole Nationale des Sciences Géographiques, IGN.
- Chen, F. and Suter, D. (1998). Image coordinate transformation based on CURL-DIV vector splines. *Proceedings of 14th International Conference on Pattern Recognition - ICPR’98*, 1:518–520.

- 
- Cheng, K. and Idesawa, M. (1986). A simplified method of data form conversion from countour line surface model to mesh surface model. In *Proceedings of 8th Int. Conf. On Pattern Recognition*, pages 582–585.
- Ciarlet, P. (1982). *Introduction à l'analyse numérique et à l'optimisation*. Masson, Paris.
- Cuenin, R. (1972). *Cartographie Générale*. Eyrolles, Paris.
- D'Autume, G. M. (1978). Construction du modèle numérique d'une surface par approximations successives: applications aux modèles numériques de terrain. *Bull. SFPT*, (71):33–41.
- de Berg, M., Kreveld, M. V., Overmars, M., and Schwarzkopf, O. (1997). *Computational Geometry*. Springer, Berlin.
- Dierckx, P. (1995). *Curve and Surface Fitting with Splines*. Oxford University Press, Oxford.
- Duchon, J. (1976). Interpolation des fonctions de deux variables suivant le principe de la flexion des plaques minces. *R.A.I.R.O. Analyse Numérique*, pages 5–12.
- Dupéret, A. (1996). Automatic derivation of a DTM to produce contour lines. In *Proceedings of the OEEP-Workshop on the Application of Digital Photogrammetric Workstations*, pages 193–221.
- Dupont, F., Deseilligny, M. P., and Gondran, M. (1999). Extraction of a DTM out of a topographic map. In *Proc. of the 5th Int. Conf. on Document Analysis and Recognition*.
- George, P.-L. and Borouchaki, H. (1997). *Triangulation de Delaunay et Maillage*. Hermes, Paris.
- Giles, P. and Franklin, S. (1996). Comparison of derivative topographic surfaces of a DEM generated from stereoscopic SPOT images with field measurements. *Photogrammetric Engineering & Remote Sensing*, 62(10):1165–1171.
- Gonçalves, G. (1997). Aperfeiçoamento da qualidade de um MDT obtido a partir de curvas de nível e pontos cotados. *Cartografia e Cadastro*, (7):49–54.
- Gonçalves, G., Julien, P., Riazanoff, S., and Cerville, B. (1999a). Le problème des courbes intercalaires dans la construction d'un MNT maillé à partir des courbes de niveau. In *Proceedings of the International Workshop on 3D Geospatial Data Production: Meeting Applications Requirements. ISPRS Working Group II/6. Paris 7-9 April*, pages 32–35. Bulletin S.F.P.T, (1)153.
- Gonçalves, G., Julien, P., Riazanoff, S., and Cerville, B. (1999b). Preserving cartographic quality in DTM interpolation from contour lines. *Soumis en 29/03 à l'I.S.P.R.S. Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*.
- Grimson, W. (1981). *From images to surfaces: A computational study of the human early vision*. MIT Press.
- Habib, M. (1997). *Etude, par Simulation, de la Précision Altimétrique et Planimétrique D'un MNT Obtenu par Corrélation D'images Spatiales*. PhD thesis, Université Paris VII.
- Hangouët, J. (1998). *Approche et Méthodes pour l'Automatisation de la Généralisation Cartographique; Application en Bord de Ville*. PhD thesis, Université de Marne-la-Vallée.

- 
- Hodgson, M. E. and Gayle, G. L. (1999). A cartographic modeling approach for surface orientation-related applications. *Photogrammetric Engineering & Remote Sensing*, 65(1):85–95.
- Hutchinson, M. (1989). A new procedure for gridding elevation and stream line data with automatic removal of spurious pits. *Journal of Hydrology*, 106:211–232.
- Julien, P. (1984). Constitution des modèles numériques de terrain à moyenne échelle à l’Institut Géographique National (Paris): applications cartographiques. *Revue XYZ*, 24:26–33.
- Julien, P. (1994). Traitements altimétriques: modèles numériques de terrain. Cours du DEA des Sciences de l’Information Géographiques, IGN.
- Keys, R. G. (1981). Cubic convolution interpolation for digital image processing. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, Assp-29(6):1153–1160.
- Kraus, K. (1994). Visualization of the quality of surfaces and their derivatives. *Photogrammetric Engineering & Remote Sensing*, 60(4):457–462.
- Lancaster, P. and Salkauskas, K. (1986). *Curve and Surface Fitting. An Introduction*. Academic Press, London.
- Li, Z. (1990). *Sampling strategy and accuracy assessment for digital terrain modelling*. PhD thesis, University of Glasgow.
- Maling, D. (1989). *Measurements from Maps: Principles and Methods of Cartometry*. Pergamon, Oxford.
- Midtbø, T. (1993). *Spatial Modelling by Delaunay Networks of Two and Three Dimensions*. PhD thesis, University of Trondheim.
- Muraki, S., Yokoya, N., and Yamamoto, N. (1990). 3D surface reconstruction from contour line image by a regularization method. *SPIE*, 1395:226–233.
- O’Neill, B. (1997). *Elementary Differential Geometry*. Academic Press, San Diego, 2nd edition.
- Philippe Guiavarc’h, Edouard Beauvillain, O. J. (1995). Production automatique de courbes de niveau à partir de photographies aériennes. In *17th Conference of the International Cartographic Association (ICA)*, pages 1339–1344, Barcelona.
- Piquet-Pellorce, D. (1996). Qualités dans les modèles numériques de terrain. *Géomètre*, (6):43–45.
- Polidori, L. (1991). *Validation des Modèles Numériques de Terrain. Application à la Cartographie des Risques Géologiques*. PhD thesis, Université Paris VII.
- Polidori, L. (1995). Réflexions sur la qualité des modèles numériques de terrain. *Bul. S.F.P.T.*, 3(139):10–19.
- Robinson, G. (1994). The accuracy of digital elevation models derived from digitised contour data. *Photogrammetric Record*, 14(83):805–814.
- Schneider, B. (1996). Adaptive interpolation of digital terrain models. *Proceedings of the 17th International Cartographic Conference*, 2:2206–2210.
- Shewchuck, J. (1997). *Delaunay Refinement Mesh Generation*. PhD thesis, School of Computer Science, Carnegie Mellon University.

- 
- Shewchuk, J. (1996). Triangle: engineering a 2d quality mesh generator and delaunay triangulator. In *Frist Workshop on Applied Computational Geometry, ACM*, pages 124–133.
- Tahiri, D. (1997). *Modélisation du Terrain à Partir des Cartes Topographiques : Méthodologie de Production et Propagation des Erreurs*. PhD thesis, Université de Liege. Département de Géomatique.
- Tang, L. (1992). Automatic extraction of specific geomorphological elements from contours. *Proc. 5th Int. Symp. on Spatial Data Handling*, 2:554–566.
- Terzopoulos, D. (1988). The computations of visible-surface representations. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 10(4):417–438.
- Utreras, F. (1979). Cross validation techniques for smoothing spline functions in one or two dimensions. In *Smoothing Techniques for Curve Estimation*, Lecture Notes in Mathematics 757, pages 196–232, Berlin. Springer.
- Watson, D. (1992). *Contouring: A Guide to the Analysis and Display of Spatial Data*. Pergamon press, Oxford, UK.
- Weibel, R. and Heller, M. (1991). Digital terrain modelling. In *Geographic Information Systems: Principles and Applications*, pages 269–297, London. Longman.
- Wood, J. and Fisher, P. (1993). Assessing interpolation accuracy in digital elevation models. *I.E.E.E. Computer Graphics & Applications*, pages 48–56.