

GIL RITO GONÇALVES

**ELEMENTOS DE  
FOTOGRAMETRIA  
ANALÍTICA**

**ENGENHARIA GEOGRÁFICA**  
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA F.C.T.U.C.**  
**COIMBRA, ANO LECTIVO 05/06**

<b>Capítulo 1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>Capítulo 2 Elementos Geométricos da Fotografia</b>	<b>3</b>
2.1. Introdução	3
2.2. Estudo da Perspectiva Central	4
2.3. Fotografia Aérea Vertical	5
2.4. Fotografia Aérea Quase Vertical	8
2.5. Fotografia Terrestre	10
<b>Capítulo 3 Estereoscopia</b>	<b>12</b>
3.1. Visão Binocular Normal	12
3.2. Reconstrução Artificial das Condições de Profundidade	14
3.3. Paralaxe Estereoscópica e Diferenças de Nível	14
3.4. Estereoscópios	16
3.5. Orientação de um Par Estereoscópico de Fotos	17
3.6. Factores Perturbadores da Visão Estereoscópica	18
3.7. Exagero Vertical e Distorções do Modelo.	18
3.8. Princípio da Marca Flutuante	19
<b>Capítulo 4 Sistemas e Transformações de Coordenadas</b>	<b>21</b>
4.1. Sistema de Coordenadas Fotográfico.	21
4.2. Sistema de Coordenadas Modelo	22
4.3. Sistema de Coordenadas Objecto	23
4.3.1. Sistema Geocêntrico Universal	23
4.3.2. Sistema Local	24
4.4. Transformações de Coordenadas	25
4.4.1. Transformações no Espaço Bidimensional	25
4.4.2 Transformações no Espaço Tridimensional	29
4.4.3. Resolução do Problema Inverso de uma Transformação	32
<b>Capítulo 5 Orientação Analítica de um Modelo</b>	<b>36</b>
1. Introdução	36
2. Orientação Interna	38
3. Orientação Externa	38
3.1. Orientação Relativa	38
3.1.1. Equações de Colinearidade	39
1. Linearização das equações de colinearidade	40
2. Aplicação das equações de colinearidade à orientação relativa	42
3. Estrutura do sistema de equações normais e algoritmo de cálculo	44
3. Aproximações iniciais	46
3.1.2. Equações de Coplanaridade	46
1. Linearização das equações de coplanaridade	48
3.2. Orientação Absoluta	50
4. Ressecção E Intersecção Espacial	50
4.1. Ressecção	50
4.2. Intersecção	52
<b>Capítulo 6 Redução de Coordenadas Fotográficas</b>	<b>56</b>
6.1. Redução ao ponto Principal	56
6.2. Deformação do Filme	57
6.3. Distorção das Lentes	58
6.4. Refracção Atmosférica	59
6.5. Curvatura Terrestre	60
6.6. Deslocamento da Imagem	61
<b>Capítulo 7 Triangulação Fotogramétrica</b>	<b>63</b>

1. Introdução	63
<b>Capítulo 8 Planeamento e Execução de Projectos Fotogramétricos</b>	<b>65</b>
1. Introdução	65
2. Planeamento de Voo	65
3. Finalidade da Fotografia	66
4. Escala Fotográfica	67
5. Variação de Escala Admissível	67
6. Deslocamento do Relevo	69
7. Tilt e Deriva Fotográfica	69
8. Selecção da Altura de Voo	70
9. Cálculo do Plano de Voo	71
10. Planeamento das Exposições	73
1. Aquisição de informação inicial sobre o objecto e situação espacial:	73
2. Escolha das estações de exposição:	73
i) Algumas notas sobre a precisão do sistema	74
ii) Escolha das lentes	74
iii) Distâncias de exposição	75
iv) Sobreposição de duas fotos no modelo	75
3. Definição do Sistema de Coordenadas	76
11. Realização das Exposições	76
12. Orientação de um Bloco de Fotografias	77
1. Sem Ajustamento Simultâneo	77
2. Com Ajustamento Simultâneo	77

# Capítulo 1

## Introdução

---

A Fotogrametria pode ser definida como a arte, ciência e tecnologia que a partir do registo, medição e interpretação de imagens fotográficas obtém informação geométrica e semântica fiável sobre os objectos físicos fotografados.

Nesta definição estão incluídos dois aspectos distintos da fotogrametria:

- Quantitativo ou geométrico, o qual engloba medições dimensionais precisas cuja finalidade é a determinação de informação directa (por ex. a forma e tamanho) ou derivada (por ex. a mudança de velocidade ou volume) sobre os objectos fotografados.
- Qualitativo ou semântico, o qual engloba o reconhecimento e a interpretação dos objectos fotografados.

A Fotogrametria como Ciência Aplicada emprega um amplo espectro de princípios e métodos matemáticos subjacentes à Álgebra Linear e Geometria Analítica, às Probabilidades e Estatística e à Análise Numérica. Ela soluciona os problemas através de cálculos matemáticos os quais utilizam como input a informação numérica obtida a partir de fotografias ou imagens. Assim, são utilizados modelos matemáticos apropriados para descrever as relações geométricas existentes entre os pontos do espaço objecto e as correspondentes imagens e erros do sistema fotogramétrico.

O material básico utilizado na fotogrametria analítica são as fotografias (ou ainda negativos ou diapositivos). A fotografia é considerada aqui como uma projecção (perspectiva) central do objecto fotografado, sendo o centro de perspectiva do sistema de lentes da câmara o centro de projecção.

Num sistema fotogramétrico, enquanto que o input básico é constituído pelas coordenadas imagem (fotocoordenadas) relativas a um sistema rectangular bidimensional, o output poderá incluir, por exemplo, as coordenadas objecto (terreno) do ponto imagem relativas a um sistema rectangular tridimensional e os elementos de orientação da câmara fotogramétrica. O sistema fotogramétrico representado esquematicamente na figura 1 inclui:

- o objecto (terreno ou outro)
- o sensor (câmara fotográfica ou outro)
- o meio exterior (atmosfera)
- a ferramenta de aquisição da informação registada nas fotografias (comparador ou outro instrumento),
  - os mecanismos de processamento da informação (computador, acessórios e modelos matemáticos)
  - o operador humano

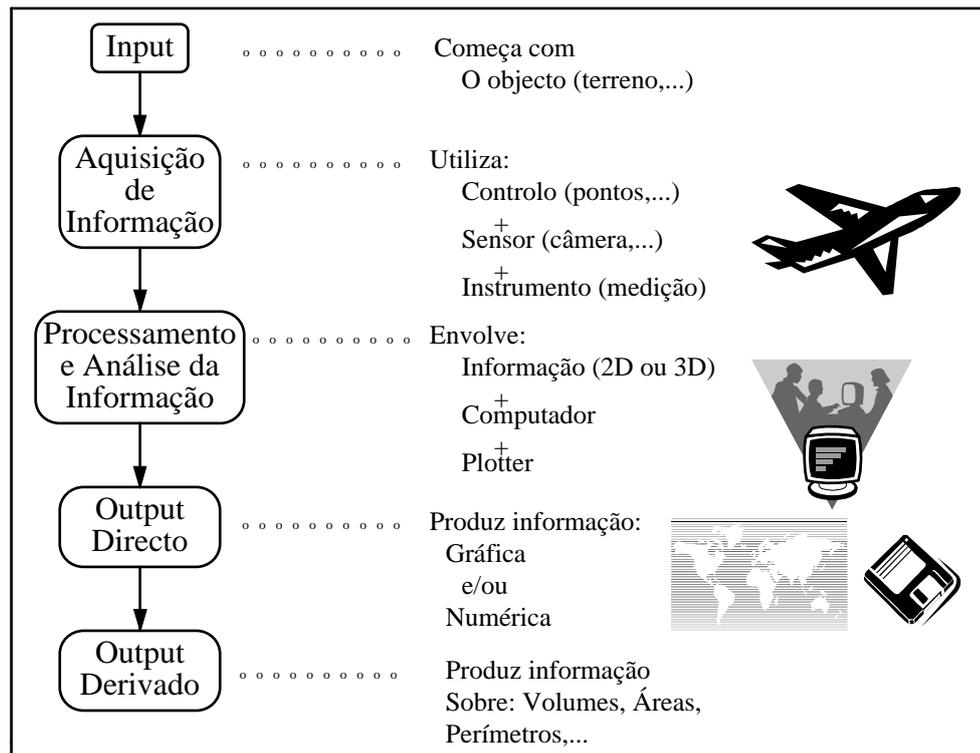


Figura 1.1. Esquematização de um sistema fotogramétrico

Nas últimas décadas a fotogrametria tem sofrido consideráveis desenvolvimentos devido à utilização do computador nas áreas de aquisição, processamento e análise da informação. Actualmente ela é aplicada na:

- Astronomia - classificação da magnitude das estrelas e determinação das suas paralaxes.
- Arquitectura - levantamento de fachadas de edifícios e monumentos.
- Arqueologia - levantamento e interpretação de ruínas.
- Cartografia (GISs) - elaboração de bases de dados geográficas.
- Engenharia - produção de cartas topográficas de escalas grandes (até 1:10000), estudo de deformações estruturais.
- Indústria - medição de objectos e calibração de robots.
- Medicina - medição dos movimentos corporais, das suas superfícies e estudo da mudança da forma e da postura do corpo humano.

Entre os produtos gerados pelos sistemas fotogramétricos podemos encontrar: ortofotos, mosaicos de fotografias, mosaicos de ortofotos, bases de dados de geográficas, mapas planimétricos, mapas topográficos, mapas temáticos, modelos digitais de terreno, coordenadas terreno e cotas, coordenadas tridimensionais (X,Y,Z) de pontos.

Entre os produtos gerados pelos sistemas fotogramétricos podemos encontrar: ortofotos, mosaicos de fotografias, mosaicos de ortofotos, bases de dados de geográficas, mapas planimétricos, mapas topográficos, mapas temáticos, modelos digitais de terreno, coordenadas terreno e cotas, coordenadas tridimensionais (X,Y,Z) de pontos.

## Capítulo 2

# Elementos Geométricos da Fotografia

---

### 2.1. INTRODUÇÃO

A característica fundamental da fotografia consiste no facto de que a cada ponto do espaço objecto corresponde um único ponto imagem do plano fotográfico. Desta forma é possível estabelecer uma relação geométrica entre a posição relativa dos pontos imagens no espaço fotográfico bidimensional e as correspondentes posições no espaço objecto tridimensional.

A fotografia será considerada como uma projecção (perspectiva) central do objecto fotografado sendo o centro de perspectiva das lentes da câmara o centro de projecção. Os dois tipos de fotografias que estudaremos são a fotografia aérea e a fotografia terrestre.

As fotografias aéreas podem classificar-se segundo:

1. A orientação do eixo óptico da câmara (figura 2.1):

- fotografias verticais - quando o eixo da câmara for vertical ou muito próximo da vertical,
- fotografias oblíquas altas - quando o eixo da câmara é deliberadamente tão oblíquo que permite ver o horizonte terrestre,
- fotografias oblíquas baixas - quando o eixo da câmara é oblíquo mas não se vê o horizonte terrestre,
- fotografias convergentes - quando no par sequencial de fotografias oblíquas baixas o eixo da câmara convergir de uma para a outra.

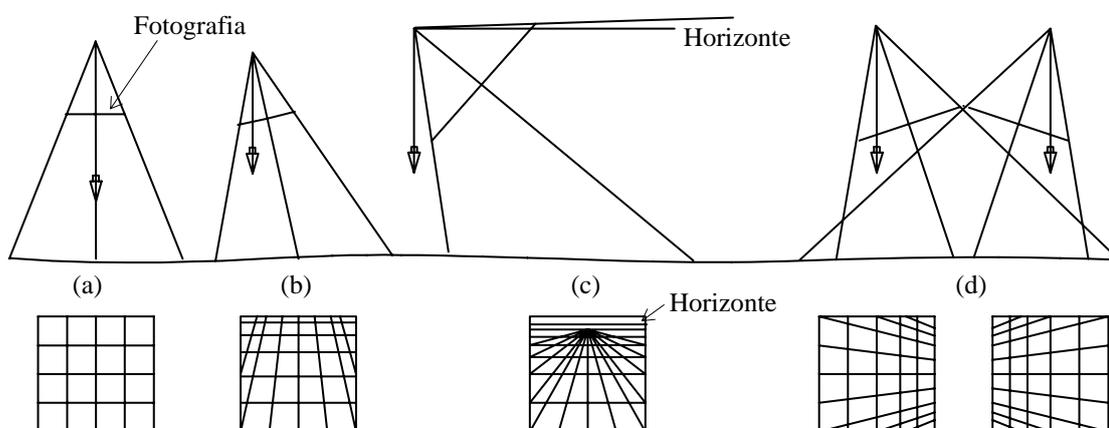


Figura 2.1. (a) Fotografia vertical. (b) Oblíqua baixa. (c) Oblíqua alta.  
(d) Par convergente de fotografias.

2. A cobertura angular (que é função da distância focal e do formato da foto)

- pequena angular ( $10^\circ - 20^\circ$ ) - com distancias focais da ordem dos 610 a 915 mm. É utilizada para interpretação geral, construção de mosaicos e pesquisas de objectos,
- angular normal ( $50^\circ - 75^\circ$ ) - com distancias focais da ordem dos 210 a 300mm. É utilizada para interpretação, mapeamento, fotografia a cores, mosaicos e ortofotografia,
- grande angular ( $85^\circ - 95^\circ$ ) - a distancia focal é aproximadamente igual a 153mm. É a mais comumente utilizada em mapeamento,
- super-grande angular ( $110^\circ - 130^\circ$ ) - a distância focal é aproximadamente igual a 88mm. É utilizada para mapeamento de áreas com muito pouco relevo.

3. O tipo de emulsão

- pancromática a branco e preto - é tipo de emulsão mais utilizado na interpretação e mapeamento fotogramétrico,

cor - esta emulsão é utilizada para interpretação e até certo ponto para mapeamento. Diferencia os aspectos, em maior proporção, do que a fotografia a preto e branco,

- infravermelho a preto e branco - é utilizada para interpretação e pesquisa de objectos. Devido ao seu maior comprimento de onda penetra mais na obscuridade que a pancromática. É utilizada para detectar camuflagens e, raramente, é utilizada na produção de cartas topográficas.

- infravermelho a cor (falsa cor) - é utilizada principalmente para foto-interpretação, particularmente para a análise de vegetação, solos e poluição das águas.

**2.2. ESTUDO DA PERSPECTIVA CENTRAL**

Consideremos a figura 2.2. a qual representa uma projecção central.

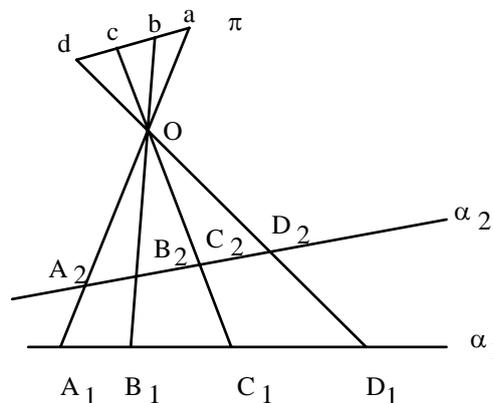


Fig. 2.2. Estudo da Perspectiva Central

Sejam:

- O o centro de perspectiva
- $\alpha_1$  o plano objecto
- $\alpha_2$  um plano qualquer
- $\pi$  o plano imagem

Da figura conclui-se que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\overline{A_1C_1}}{\sin \widehat{A_1OC_1}} = \frac{\overline{A_1D_1}}{\sin \widehat{A_1OD_1}} = k_1 \\ \frac{\overline{B_1C_1}}{\sin \widehat{B_1OC_1}} = \frac{\overline{B_1D_1}}{\sin \widehat{B_1OD_1}} = k_2 \end{array} \right. \quad \text{com } k_1 \text{ e } k_2 \text{ constantes}$$

Dividindo o 1º membro pelo 2º vem

$$\frac{\overline{A_1C_1}}{\overline{B_1C_1}} = \frac{\sin A_1 \hat{O}C_1}{\sin B_1 \hat{O}C_1} = k$$

$$\frac{\overline{A_1D_1}}{\overline{B_1D_1}} = \frac{\sin A_1 \hat{O}D_1}{\sin B_1 \hat{O}C_1} = k$$

Da mesma forma se concluiria que (para a mesma constante k):

$$\frac{\overline{A_1C_1}}{\overline{B_1C_1}} = \frac{\overline{A_2C_2}}{\overline{B_2C_2}} = k$$

$$\frac{\overline{A_1D_1}}{\overline{B_1D_1}} = \frac{\overline{A_2D_2}}{\overline{B_2D_2}} = k$$

Se  $x_1, x_2, x_3$  e  $x_4$  fossem, respectivamente, as coordenadas de  $A_1, B_1, C_1, D_1$  e  $x'_1, x'_2, x'_3, x'_4$  as coordenadas de  $A_2, B_2, C_2, D_2$  teríamos:

$$\frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} = \frac{x'_3 - x'_1}{x'_3 - x'_2}$$

$$\frac{x_4 - x_1}{x_4 - x_2} = \frac{x'_4 - x'_1}{x'_4 - x'_2}$$

No caso de a única coordenada desconhecida ser  $x_4$ , então é possível determinar o seu valor através da expressão anterior.

Nesta relação de projectividade as coordenadas de um ponto genérico  $x$  do plano 2 (terreno) podem ser calculadas a partir das suas coordenadas  $x'$  medidas num outro plano 1 (imagem) através da seguinte expressão:

$$x = \frac{a_1x' + a_2}{a_3x' + 1}$$

Então podemos concluir que uma relação de projectividade no plano fica completamente definida através de 3 elementos ( $a_1, a_2, a_3$ ). De forma análoga se irá concluir (ver Cap. V) que uma relação de projectividade no espaço 3D ficará completamente definida através de dois conjuntos de elementos: os elementos de orientação interna e os elementos de orientação externa.

### 2.3. FOTOGRAFIA AÉREA VERTICAL

Como já vimos, uma fotografia diz-se vertical se no instante de exposição o eixo da câmara estiver apurado (ou aproximadamente). No caso de o eixo da câmara ser exactamente vertical a fotografia é dita rigorosamente vertical ou que tem zero *tilt*. Os elementos principais de uma fotografia vertical estão ilustrados na figura-2.3. Teoricamente, os raios luminosos emergentes do objecto situado na superfície topográfica passam pelo centro de perspectiva  $C$  (ou estação de exposição), o qual coincide com o centro óptico do conjunto de lentes da câmara e são registados na superfície plana do filme (negativo). O negativo está localizado atrás do sistema de lentes a uma distância igual à distância focal  $f$  da câmara. Os positivos, obtidos por contacto a partir dos negativos, são depois utilizados, nos instrumentos de fotogrametria, na medição das fotocoordenadas dos pontos imagem. Como veremos mais tarde (Cap. IV) o objectivo principal das marcas fiduciais é a definição do

ponto principal  $c$ , isto é do ponto de intersecção do eixo optico da câmara com o plano do negativo.

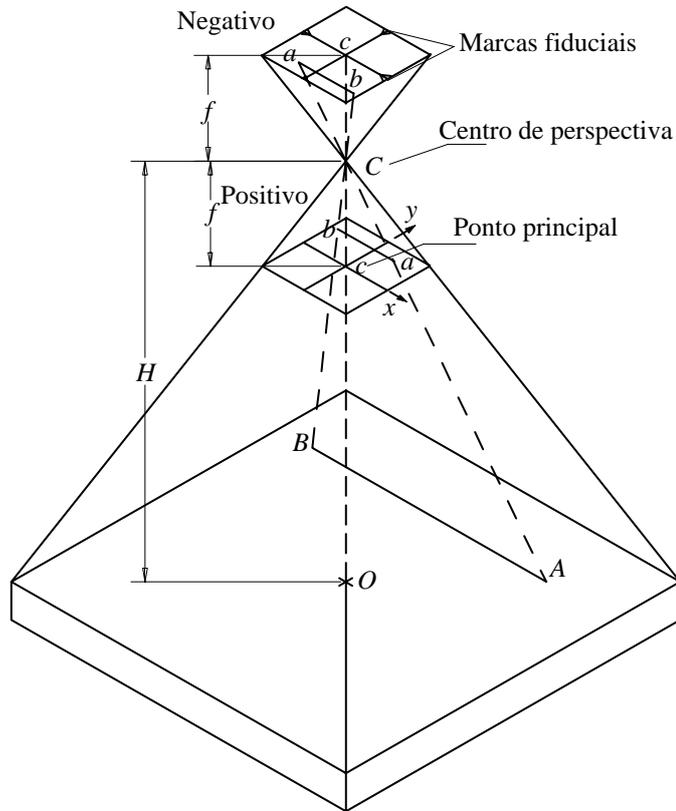


Figura 2.3. Elementos geométricos de uma fotografia vertical.

Consideremos agora a figura 2.4 na qual designamos por:

- $f$  a distância focal da câmara,
- $H$  a altura de voo relativa ao datum  $D$ ,
- $h_A$  e  $h_B$  as cotas dos pontos  $A$  e  $B$ .

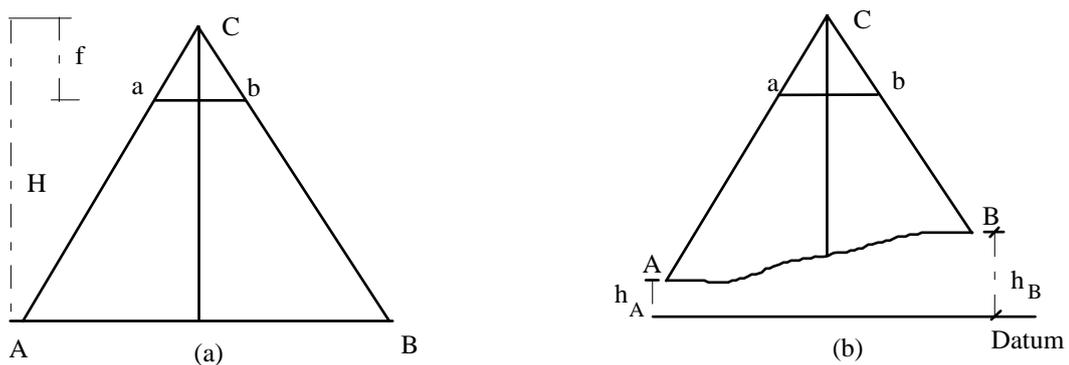


Figura 2.4. Escala da fotografia

O conceito de escala é comumente interpretado como a razão entre uma distância medida no desenho (mapa) e a correspondente distância real. Para a fotografia dita rigorosamente vertical e no caso de o terreno ser plano (figura 2.4-a), de cota constante e coincidente com o datum  $D$  a escala fotográfica relativa a esse datum é:

$$S_D = \frac{\overline{ab}}{AB} = \frac{f}{H} \quad (2.1)$$

No caso de o terreno não ser plano a escala de um ponto qualquer situado à cota  $h$  ( $S_h$ ) é (figura 2.4-b):

$$S_h = \frac{f}{H - h} \quad (2.2)$$

Para se estabelecer, na fotografia uma única escala calcula-se a cota média da área de terreno fotografado ( $h_m$ ) e determina-se a escala média ( $S_m$ ) da fotografia supondo que todos os são projectados no plano de cota média, isto é:

$$S_m = \frac{f}{H - h_m} \quad (2.3)$$

A equação 2.1 permite-nos concluir que para uma dada altura de voo quanto maior for a distância focal da câmara maior será a escala da fotografia. E, inversamente, para uma dada distância focal, quanto menor for a altura de voo maior será a escala da fotografia.

Para que uma fotografia aérea vertical represente uma carta topográfica, na qual a escala é constante em qualquer parte desta, é necessário que o eixo da câmara seja rigorosamente vertical e que o terreno fotografado seja plano e nivelado. Desta forma, a presença do relevo topográfico e a presença do *tilt* fotográfico fazem com que a escala da fotografia varie de um ponto imagem para outro ponto imagem. Mais ainda, atendendo a que durante o voo não é possível controlar com exactidão a altura de voo, existirão, portanto, pequenas diferenças de escala de fotografia para fotografia. Assim, cada um destes efeitos provoca na fotografia um deslocamento do ponto imagem relativamente a uma posição teórica que este ocuparia num mapa à mesma escala.

Vejam, em primeiro lugar, qual o valor do deslocamento de um ponto imagem causado pela diferença de escala. Designando por:

- $S_c$  a escala desejada (teórica) da fotografia
- $S_p$  a escala real (observada) da fotografia
- $r_c$  a distancia radial do ponto imagem na escala teórica
- $r_p$  a correspondente distancia radial observada
- $M$  o factor de ampliação ou redução da escala fotográfica

e tomando para  $M = \frac{S_c}{S_p} = \frac{r_c}{r_p}$ , o deslocamento da imagem provocado pela diferença de escala

é dado por

$$ds = r_c - r_p = r_c \left( 1 - \frac{S_p}{S_c} \right) \quad (2.4)$$

ou ainda

$$ds = r_p (M - 1)$$

Um outro aspecto no qual a fotografia difere de uma carta topográfica é o efeito provocado pelo relevo topográfico. A análise da equação 2.2 diz-nos que a escala da fotografia varia de acordo com a altura dos objectos fotografados. Assim, os objectos situados no topo das

elevações são fotografados a uma escala maior do que os objectos situados no sopé das elevações (ou nos vales).

O efeito do relevo topográfico pode, também, ser considerado como uma componente do deslocamento da imagem. Observando a figura 2.5 na qual

- $r$  é a distancia, na fotografia, do centro ao topo do objecto,
- $r'$  é a distância, na fotografia, do centro à base do objecto,
- $de$  é o deslocamento radial,

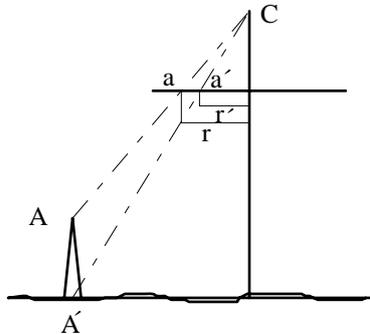


Figura 2.5. Efeito do relevo topográfico.

podemos concluir que:

$$\begin{cases} de = r - r' \\ R' = r' \frac{H}{f} \\ R = r \frac{H-h}{f} \end{cases}$$

Ou seja,

$$de = r \frac{h}{H} \quad \text{ou} \quad de = r' \frac{h}{H-h} \quad (2.5)$$

Note-se que em qualquer fotografia vertical a direcção do deslocamento da imagem devido ao relevo é radial relativamente ao ponto nadir.

Por outro lado, a equação anterior também nos permite determinar a altura  $h$  de um objecto, em função dos valores do deslocamento e da distância radial, medidos na fotografia. De facto da equação anterior vem:

$$h = H \frac{de}{r} \quad (2.6)$$

#### 2.4. FOTOGRAFIA AÉREA QUASE VERTICAL

Como já vimos, é praticamente impossível conseguir fotografias aéreas rigorosamente verticais. Assim, a maior parte das fotografias verticais (mais de 50%) são tiradas com um *tilt* inferior a 2° e raríssimas apresentam tilts superiores a 3°.

O efeito provocado pelo *tilt* fotográfico é mais notável quando se tem de efectuar medições precisas de cotas. Desta forma, os melhores estereorestituidores (v. cap. VIII) incorporam

mecanismos bastante complexos necessários à correcção do *tilt* fotográfico. Mesmo as cartas topográficas de terrenos planos (i.e. isentos de relevo) não poderiam ser traçadas a partir das fotografias se estas não fossem compensadas do efeito do *tilt*.

A figura 2.6 mostra-nos uma fotografia quase vertical. Nesta figura consideramos que as posições das marcas fiduciais estão ajustadas de forma a que a intersecção das rectas que unem as marcas fiduciais opostas, definam o ponto principal  $c$  (i.e. a intersecção do eixo óptico com o plano da imagem). A vertical que passa pelo centro de perspectiva intersecta o plano da fotografia (ou a sua extensão) no ponto nadir fotográfico ( $n$ ). A linha principal é definida pela recta que passa pelo ponto principal e pelo nadir. A bissectriz do ângulo  $t$  intersecta o plano da fotografia no isocentro ( $i$ ).

A escala de uma fotografia com *tilt* muda de forma regular em toda a área fotografada. Como seria de esperar, o *tilt* comprime a imagem na parte superior (a mais alta relativamente ao chão) e expande a imagem na parte inferior da fotografia. Para determinarmos a escala de uma fotografia com *tilt* num dado ponto devemos conhecer, não só a cota desse ponto, mas também a sua posição relativamente ao sistema de coordenadas definido pelo nadir e pela linha principal. Isto é, precisamos de saber o ângulo de *tilt* ( $t$ ) e de *swing* ( $s$ ), a altura de voo, a distância focal e a cota do ponto.

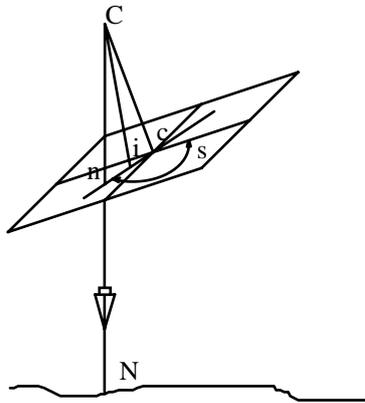


Figura 2.6. Fotografia aérea quase vertical

Na figura 2.7 a cota do ponto  $P$  acima do datum é  $h_p$ . As coordenadas deste ponto são, no sistema  $(c,x,y)$ ,  $x$  e  $y$ . Na fotografia o ponto principal é definido por  $c$  e o nadir por  $n$ . O eixo dos  $yy$  foi rodado de forma a coincidir com a linha principal. O novo eixo é designado por  $y'$  e a rotação é considerada positiva se for efectuada no sentido directo.

Da figura conclui-se que

$$\theta = 180^\circ - s$$

Uma rotação de  $\theta$  nos eixos coordenados  $cx$  e  $cy$  provoca uma alteração nas coordenadas de  $p$  no valor:

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta + y \sin \theta \\ y' = -x \sin \theta + y \cos \theta \end{cases}$$

Se agora o eixo  $cx'$  for transladado da posição  $c$  para a posição  $n$  e se atendermos ao facto de que  $cn = f \tan t$  teremos:

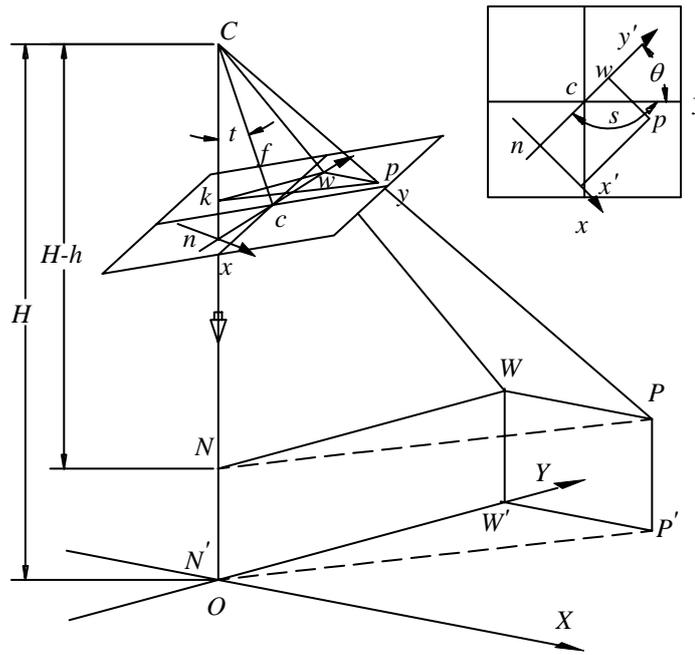


Figura 2.7. Escala da fotografia quase vertical

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta + y \sin \theta \\ y' = -x \sin \theta + y \cos \theta + f \tan t \end{cases}$$

A partir de  $p$  traça-se uma recta perpendicular à linha principal  $cn$ . O ponto de intersecção é o ponto  $w$ . Agora, a partir deste ponto traçamos outra perpendicular à recta  $cn$ . O ponto de intersecção é  $k$ . Como as rectas  $wk$  e  $wp$  são horizontais então o triângulo  $kwp$  é horizontal. E, portanto, as relações de escala entre os triângulos  $kwp$  e  $NWP$  podem ser obtidas através das propriedades existentes entre triângulos semelhantes. Observando os triângulos  $Ckp$  e  $CNP$  concluímos que:

$$\frac{\overline{kp}}{\overline{NP}} = \frac{\overline{Ck}}{\overline{CN}} = \frac{\overline{Ck}}{H-h}$$

Mas como  $\overline{Ck} = \overline{Cn} - \overline{kn} = \frac{f}{\cos t} - y' \sin t$ , e atendendo a que a razão  $\frac{\overline{kn}}{\overline{NP}}$  define a escala de um ponto qualquer  $p$  do plano  $kwp$ , cuja cota é  $h$ , virá:

$$S_t = \frac{f \sec t - y' \sin t}{H - h} \quad (2.7)$$

A expressão anterior define a escala da fotografia quase vertical num ponto cuja cota é  $h$ .

## 2.5. FOTOGRAFIA TERRESTRE

Na fotografia terrestre o eixo óptico da câmara fotogramétrica está localizado no solo ou perto dele. Este ramo da fotogrametria (fotogrametria terrestre) pode ainda subdividir-se em:

- fotogrametria de curta distância - se a distância câmara-objecto está entre 0.1 e 100m,
- macrofotogrametria - se a distância câmara-objecto está entre 0.1 e 0.01m,
- microfotogrametria - quando as fotos se obtêm através de um microscópio.

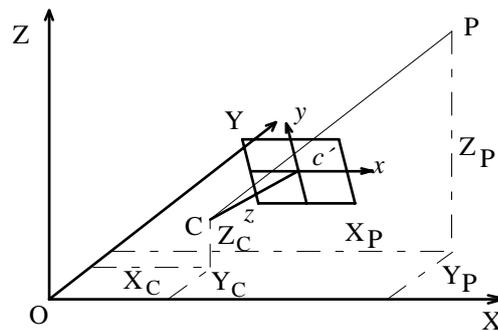


Figura 2.8. Fotografia terrestre.

Por sua vez, as fotografias terrestres (figura 2.8) também podem classificar-se, de acordo com a orientação do eixo óptico, em:

- fotografias horizontais - quando o eixo óptico é horizontal. Desta forma o plano  $cxy$  é um plano vertical e, se a câmara estiver bem nivelada antes da exposição, os eixos dos  $xx$  e dos  $yy$  da foto (os quais são definidos pelas marcas fiduciais) definem, respectivamente, uma recta horizontal e uma vertical.
- fotografias oblíquas - quando o eixo óptico está inclinado para cima ou para baixo em relação à horizontal. Se a inclinação é para cima do plano horizontal, diz-se que o ângulo é de elevação e considera-se positivo. Se é para baixo diz-se que o ângulo é de depressão e considera-se negativo.

## Capítulo 3

### Estereoscopia

---

Chamamos estereoscopia ao processo fisiológico através do qual se obtém uma sensação tridimensional, causada pela fusão numa única imagem de duas fotografias do mesmo objecto tiradas de centros de perspectiva diferentes.

A imagem tridimensional que poderemos observar é chamada modelo estereoscópico ou simplesmente estereomodelo. Um par de fotografias susceptíveis de serem observadas estereoscopicamente é chamado par estereoscópico ou estereopar.

A faixa comum entre duas fotografias sucessivas, na direcção da linha de voo, é chamada sobreposição longitudinal. Para que uma fotografia seja vista, estereoscopicamente, na sua totalidade, a sobreposição longitudinal deverá ser sempre superior a 50%.

#### 3.1. VISÃO BINOCULAR NORMAL

Quando observamos um objecto pontiforme colocado a uma distância finita, os nossos olhos realizam, simultaneamente, duas acções: os eixos visuais dos dois olhos convergem sobre o ponto e os dois cristalinos sofrem uma acomodação, por meio da qual focam o mesmo ponto. As duas imagens do ponto, recebidas separadamente nas retinas dos dois olhos, são então transmitidas ao cérebro, que as recombina numa única imagem.

Se agora, em vez de um único ponto, considerarmos dois pontos A e B a diferentes distancias do observador estes não poderão ser observados simultaneamente e distintamente. Para observar A (figura 3.1-a) os dois olhos E e D devem estar focados à mesma distância  $r_A$  ( $\overline{EA} \cong \overline{DA} \cong r_A$ ) e os dois eixos visuais devem formar um ângulo  $\phi_A$ . Para observar B os dois olhos devem, por outro lado, estar focados para a distância  $r_B$  e os dois eixos visuais devem formar um ângulo  $\phi_B$ . Este ângulo será tanto menor quanto mais distante B se achar de A. Quando estes dois ângulos forem muito diferentes entre si, não será possível a fusão simultânea dos dois pontos.

Os ângulos  $\phi_A$  e  $\phi_B$  são chamados ângulos de convergência ou ângulos paraláxicos. Agora designamos por  $\beta$  o ângulo obtido pela diferença desses dois ângulos de convergência. De acordo com a figura 3.1-a temos:

$$\beta = \phi_A - \phi_B = \beta_1 + \beta_2$$

O valor de  $\beta$  depende, evidentemente, das duas distâncias  $r_A$  e  $r_B$ , e da distância  $e$ , chamada distância interpupilar ou base ocular. Esta distância varia de indivíduo para indivíduo entre limites que vão desde os 55mm até 75mm, podendo considerar-se 65mm a distância interpupilar mais comum.

Enquanto que a acomodação do cristalino dos olhos é um fenómeno pouco perceptível pelo cérebro, é principalmente a percepção da diferença dos ângulos de convergência dos eixos visuais que permite avaliar a distância relativa dos diferentes objectos criando, desta forma, a sensação de profundidade. Portanto, a faculdade de percepção de profundidade envolve simplesmente o reconhecimento instintivo pelos olhos das diferenças de direcção de dois ou mais pontos.

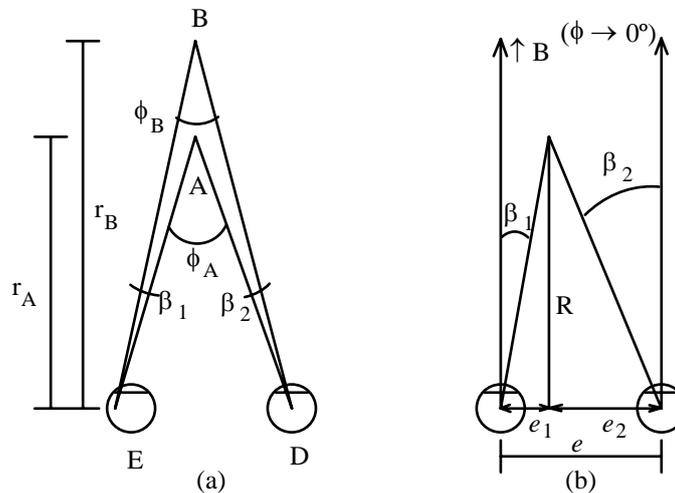


Figura 3.1. Visão binocular normal

É oportuno notar também que, quando se observa um objecto tridimensional, chegam aos nossos olhos duas imagens ligeiramente diferentes do referido objecto. Estas duas imagens que impressionam as retinas dos dois olhos são transmitidas ao cérebro onde se fundem numa impressão mental (tridimensional) do sólido da figura original. Por outro lado, no processo de visão estereoscópica, existe também uma certa tolerância de forma a permitir a fusão de imagens que difiram um tanto entre si, quer seja em relação à forma, quer seja em relação ao tamanho e posição.

Como já vimos, a profundidade mínima observável depende da diferença mínima dos ângulos de convergência que as retinas dos dois olhos serão capazes de registar. Assim, verificou-se que não é possível a percepção da diferença de profundidade entre objectos se a diferença dos ângulos de convergência for menor do que 20 segundos de arco (i.e.  $965 \times 10^{-7}$  rad.).

De acordo com o que foi dito acima, podemos calcular, para um indivíduo com distância interpupilar de 65mm a distância  $R$  máxima (chamada raio de percepção estereoscópica) que permite que um objecto apareça ainda em relevo. Atendendo à figura 3.1-b vem:

$$\tan \beta_1 = \frac{e_1}{R} \quad \text{e} \quad \tan \beta_2 = \frac{e_2}{R}$$

Como  $\beta_1$  e  $\beta_2$  são muito pequenos vem:

$$e_1 = \beta_1 R \quad \text{e} \quad e_2 = \beta_2 R \quad \text{com} \quad \beta_1 \text{ e } \beta_2 \text{ em rad.}$$

Somando membro a membro estas duas expressões temos

$$e = \beta R$$

e portanto

$$R = \frac{e}{\beta}$$

Para  $e = 65m$  e  $\beta = 965 \times 10^{-7}$  rad vem  $R \cong 670m$ .

Assim, para além de 670m não se pode distinguir, à vista desarmada, diferenças de profundidade entre objectos. Estes aparecerão como que projectados sobre o mesmo plano de fundo.

### 3.2. RECONSTRUÇÃO ARTIFICIAL DAS CONDIÇÕES DE PROFUNDIDADE

Para reconstruir artificialmente a visão binocular é necessário que as condições de convergência e focagem sejam compatíveis entre si e entre as condições da visão real.

A figura 3.2 pretende reproduzir as condições de percepção de profundidade de um objecto com a altura  $h$ . Assim, na figura 3.2-a os olhos vêem o objecto e devido ao ângulo  $\beta$  há uma acomodação de convergência a qual resulta na percepção da altura  $h_v$  do objecto. Na figura 3.2-b os olhos são substituídos por duas câmaras, as quais produzem fotografias do objecto à escala 1:1. Devido à altura do objecto há, na foto esquerda, um deslocamento para a direita, do topo do objecto, o qual é registado a uma distância  $px/2$  da base. O mesmo acontece para a fotografia direita, mas o deslocamento do topo do objecto é, agora, para a esquerda.

Na figura 3.2-c as imagens das duas fotografias são projectadas numa superfície de forma a que a base do objecto seja coincidente em ambas as imagens. As imagens do topo do objecto, representadas na figura pelas setas, estão separadas por uma distância (paralaxe)  $px$ . Para se obter uma visão estereoscópica desta imagem combinada é necessário que através de um método qualquer o olho esquerdo veja apenas a fotografia esquerda e o olho direito a fotografia direita. Como os raios vindos da base e do topo do objecto formam o mesmo ângulo que na visão binocular verdadeira, a altura ( $h$ ) do modelo estereoscópico projectado é a mesma do objecto ( $h_v$ ). A única diferença que existe é que a acomodação de focagem para o topo do objecto é feita, no caso das fotografias, para uma distância  $H$  e no caso real, para uma distância  $H - h_v$ .

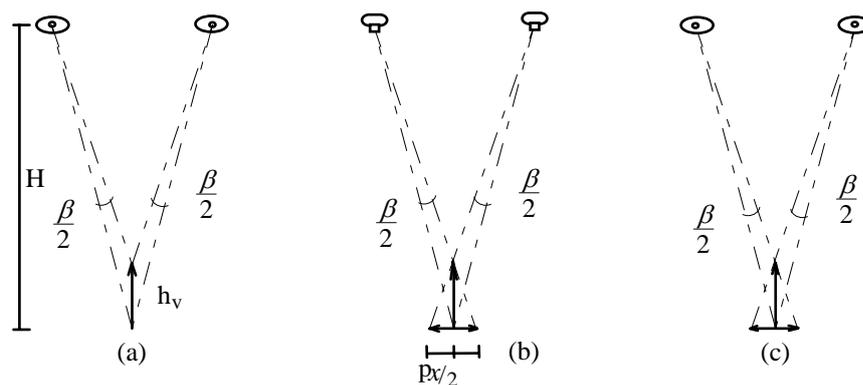


Figura 3.2. Reconstrução artificial da visão binocular

### 3.3. PARALAXE ESTEREOSCÓPICA E DIFERENÇAS DE NÍVEL

Chama-se paralaxe ao movimento da imagem de um objecto estacionário relativamente a outro objecto estacionário, quando o ponto de observação é deslocado.

Por exemplo, se observarmos o que acontece a um prédio de vários andares quando o vemos desde um avião em movimento, notaremos que o topo do prédio parece andar mais

rapidamente que a sua base. Diremos então, que os pontos situados a cotas mais elevadas têm uma paralaxe superior aos situados a cotas mais baixas.

Rigorosamente, a paralaxe estereoscópica de um ponto  $A$ , pertencente à área de sobreposição é definida como a diferença entre as coordenadas  $x$  das imagens desse ponto na fotografia esquerda e na fotografia direita (figura 3.3).

$$px_a = x_a - x'_a$$

Nesta definição considerou-se que o eixo  $x$  fotográfico passa pelo ponto principal e é paralelo à linha de voo.

Designando por (figura 3.3):

- $H_0$  a altura de voo sobre o datum  $\alpha_0$
- $\Delta h$  a diferença de nível entre  $A$  e  $D$  (i.e. a altura do objecto)
- $B$  a base aérea
- $b_0$  a fotobase ajustada ao datum  $\alpha_0$

e atendendo à semelhança dos triângulos  $[C_1a'a]$  e  $[C_1C_2A]$  teremos, para o ponto  $A$

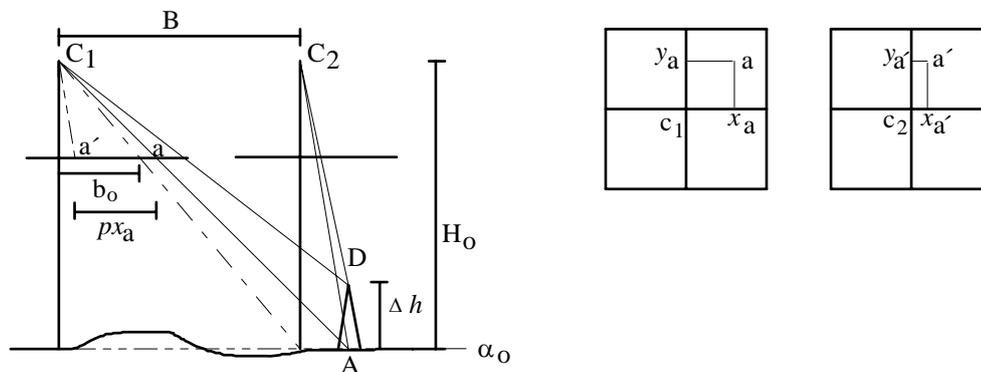


Figura 3.3. Paralaxe estereoscópica e diferenças de nível.

$$\frac{px_a}{f} = \frac{B}{H_0}$$

e, de forma análoga, para o ponto  $D$  teremos

$$\frac{px_d}{f} = \frac{B}{H_0 - \Delta h}$$

Designado por:

$$\Delta h = H_A - H_D$$

e

$$\Delta px = px_d - px_a$$

vem

$$\Delta px = f \frac{B}{H_0 - \Delta h} - f \frac{B}{H_0} = \frac{Bf}{H_0} \frac{\Delta h}{H_0 - \Delta h}$$

Mas como  $\frac{fB}{H_0} = b_0$ , teremos

$$\Delta px = \frac{b_0 \Delta h}{H_0 - \Delta h} \quad (3.1)$$

Por outro lado, se medirmos a diferença de paralaxe entre dois pontos poderemos calcular a diferença de nível (ou altura) entre eles, utilizando a seguinte expressão:

$$\Delta h = \frac{H_0 \Delta px}{b_0 + \Delta px} \quad (3.2)$$

Nos casos em que  $\Delta px$  é relativamente pequeno (i.e. para  $\Delta h \cong 3\% H_0$ ) podemos utilizar as seguintes aproximações:

$$\Delta px = \frac{b_0 \Delta h}{H_0} \quad \text{e} \quad \Delta h = \frac{H_0 \Delta px}{b_0}$$

### 3.4. ESTEREOSCÓPIOS

Existem basicamente dois tipos de estereoscópios: estereoscópio de lentes ou de refração (muitas vezes chamado estereoscópio de bolso) e estereoscópio de espelhos ou de reflexão. Cada um deles apresenta vantagens e desvantagens, mas a finalidade de ambos é eliminar a dificuldade de focar os olhos a distancia finita com os eixos visuais quase paralelos entre si, quando se examinam as fotografias em três dimensões.

O estereoscópio de lentes (figura 3.4-a) é constituído por duas lentes montadas sobre uma armação suportada por quatro pés, de tal modo que as lentes se encontram a uma distância do plano de apoio igual à distância focal das mesmas lentes.

O estereoscópio de espelhos (figura 3.4-b) consiste fundamentalmente de dois espelhos inclinados  $45^\circ$  relativamente ao plano horizontal das fotografias, de dois prismas de  $45^\circ$  ou de dois outros pequenos espelhos e de duas lentes para acomodar a vista ao infinito.

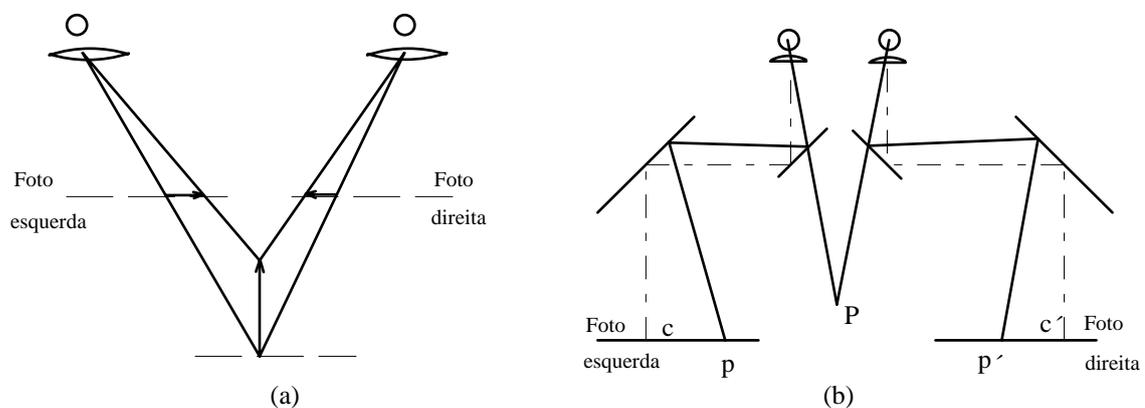


Figura 3.4. a) Estereoscópio de lentes. b) Estereoscópio de espelhos

O estereoscópio de lentes apresenta, em relação ao estereoscópio de espelhos as seguintes vantagens: preço de custo notavelmente mais baixo, maior transportabilidade, sendo susceptível de ser usado com desenvoltura no campo e maior poder de ampliação das imagens.

Por outro lado, o campo observado é inferior e, portanto, é mais difícil obter uma ideia de conjunto da região abrangida pelo par estereoscópico. Além disso as fotografias não podem ser separadas, como no estereoscópio de espelhos, a uma distância tal que seja evitada qualquer interferência entre elas, devido ao recobrimento. De facto, enquanto que com o estereoscópio de lentes a distância entre as imagens correspondentes da área de recobrimento do par estereoscópico (dita estereobase) deve ser igual à distância interpupilar do observador, com o estereoscópio de espelhos tal distância será normalmente superior a 20cm, sendo em geral diferente de um modelo de estereoscópio para outro.

### 3.5. ORIENTAÇÃO DE UM PAR ESTEREOSCÓPICO DE FOTOS

A condição necessária para que duas fotografias de um par estereoscópico possam ser observadas em estereoscopia é que estas sejam colocadas debaixo do estereoscópio devidamente orientadas, isto é, com a orientação recíproca correcta que tinham quando foram tiradas. Esta orientação pode ser feita do seguinte modo:

1. Marcam-se em cada uma das fotografias os pontos principais.
2. Com o estereoscópio de bolso (ou mesmo com o de espelhos) orientam-se aproximadamente as fotografias e marcam-se os pontos principais conjugados (ou pontos principais transferidos).
3. Traça-se em cada uma das fotografias uma recta passando pelo ponto principal e pelo ponto principal transferido.

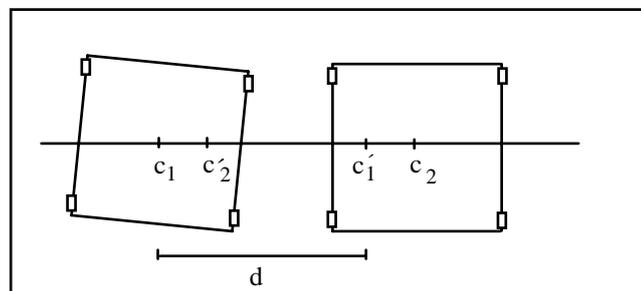


Figura 3.5. Orientação de um par estereoscópico de fotos.

4. Colocam-se as duas fotos sobre uma mesa de dimensões apropriadas, de modo que os quatro pontos (i.e. os dois pontos principais e os respectivos pontos conjugados) estejam sobre a mesma recta. A distância entre as duas fotografias, ou seja, entre um ponto principal e o seu conjugado, deverá diferir de acordo com o tipo de estereoscópio utilizado (lentes ou espelhos). Para o estereoscópio de bolso esta distância deverá ser aproximadamente igual à distância interpupilar (a qual é, vulgarmente,  $d = 65\text{mm}$ ). Para o estereoscópio de espelhos esta distância deverá ser igual à estereobase (vulgarmente  $d = 260\text{mm}$ ).

5. Fixam-se as duas fotografias com fita adesiva.
6. Coloca-se o estereoscópio sobre as fotografias, procurando dispô-lo o mais paralelo possível ao traçado da linha de voo. Por vezes é necessário movê-lo ligeiramente para que, observando as fotografias através dele, se consiga a fusão das duas imagens em uma única imagem tridimensional.

### 3.6. FACTORES PERTURBADORES DA VISÃO ESTEREOSCÓPICA

Suponhamos agora que o observador possui uma visão normal e que as fotos foram correctamente orientadas. Mesmo que estas sejam observadas de forma correcta poderão ainda existir alguns factores que dificultam a visão estereoscópica:

1. Fortes e bruscas mudanças de cotas. O efeito deste factor é tornar impossível a fusão simultânea dos pontos mais altos e dos pontos mais baixos.
2. Diferença notável de escala entre duas fotos do par estereoscópico resultando difícil a fusão das imagens correspondentes.
3. Mudança de posição de objectos no intervalo de tempo decorrido entre a tomada das duas fotos sucessivas.
4. Tonalidade fotográfica uniformemente monótona em fotografias de pequena escala.

### 3.7. EXAGERO VERTICAL E DISTORÇÕES DO MODELO.

O modelo mental tridimensional que se obtém mediante a observação estereoscópica de duas fotos aéreas de um estereopar não é na realidade uma réplica precisa do terreno fotografado. Na maior parte dos casos o relevo aparece mais acentuado do que o é realmente na natureza, ou seja, a escala vertical do estereomodelo é maior do que a escala horizontal. Nestas condições diremos que o modelo estereoscópico possui exagero vertical (positivo).

Define-se como factor de exagero vertical  $E_v$ , a relação entre a escala vertical  $S_v$  e a escala horizontal  $S_h$  do estereomodelo:

$$E_v = \frac{S_v}{S_h}$$

De um ponto de vista qualitativo os factores que, em vários graus, influenciam o exagero vertical são a estereobase  $B$ , a altura de voo relativa  $H$ , a distância de observação  $r$ , a distância focal  $f$  da câmara, a base ocular  $e$  e a separação  $d$  entre as duas fotos orientadas para observação estereoscópica. A expressão seguinte mostra, em termos qualitativos, os factores que variam directa e inversamente com  $E_v$ :

$$E_v = f\left(\frac{B, r, d}{f, H, e}\right)$$

O termo distorção é geralmente utilizado para indicar mudança de forma no estereomodelo em relação à forma real do terreno fotografado. As causas destas distorções, as quais se verificam no estereomodelo, podem ser divididas em estereoscópicas e fotográficas, não tendo nem uma nem outra influência no valor do exagero vertical:

#### 1. Causas estereoscópicas

- orientação incorrecta do par estereoscópico - o modelo tridimensional será sempre mais deformado quanto maior for a alteração da orientação recíproca das fotos em relação à orientação correcta,
- posição de observação - para examinar uma determinada porção do estereomodelo, o modo correcto é o de mover o estereoscópio de modo a poder observá-la directamente de cima, isto é, com o plano imaginário contendo os eixos visuais o mais perpendicular possível ao plano da foto.

#### 2. Causas fotográficas

- tilt fotográfico - quando uma ou ambas as fotos do para estereoscópico apresentam tilt, o modelo estereoscópico aparecerá deformado tanto mais quanto maior for o valor do tilt,
- posição e orientação das imagens nas fotografias - as imagens de um modelo estereoscópico, devido às distorções de paralaxe presentes nas duas fotos que o geraram, aparecerão destorcidas para fora, radialmente a partir do centro virtual de projecção (ponto médio entre o ponto principal e o ponto principal conjugado); as únicas imagens não destorcidas serão as situadas sobre o referido centro virtual e, com boa aproximação, as situadas dentro de uma vizinhança relativamente pequena.

### 3.8. PRINCÍPIO DA MARCA FLUTUANTE

A faculdade de o observador poder visualizar a imagem estereoscópica através do estereoscópio é baseada na pequena variação de paralaxe existente de ponto para ponto. É possível colocar na imagem estereoscópica uma imagem distinta que pareça flutuar no espaço desta imagem. Esta marca, chamada marca flutuante, é a base da medição tridimensional de uma imagem estereoscópica.

Vamos supor que o par de fotografias foi devidamente orientado e o estereoscópio colocado na posição correcta de observação (v. figura 3.6)<sup>1</sup>. De seguida colocamos sobre as fotografias duas peças de um material transparente, contendo cada uma delas uma marca rigorosamente igual (i.e. com a mesma forma e tamanho). Quando vistas estereoscopicamente estas duas marcas fundem-se numa única marca a qual ocupará no espaço do modelo a posição 1 acima do solo.

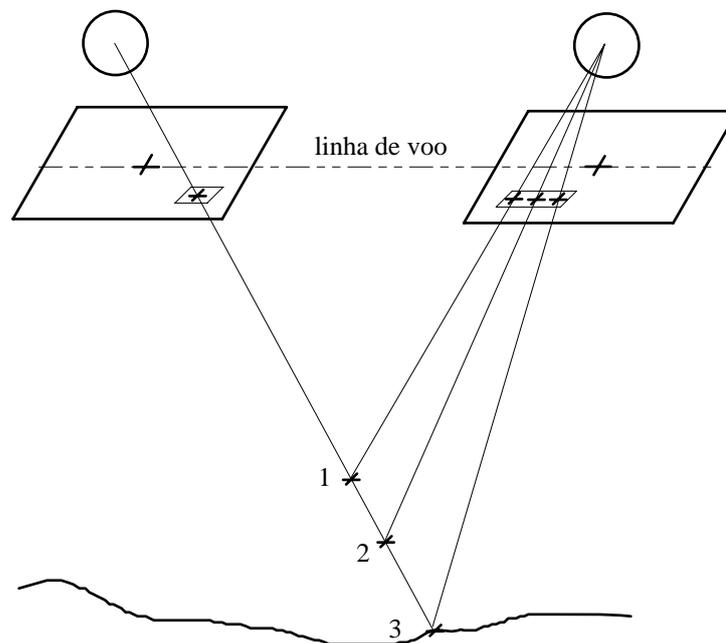


Figura 3.6. Princípio da marca flutuante

Se agora movermos, levemente, a marca direita para a direita de uma quantidade tal que as duas marcas se mantenham ainda fundidas, estereoscopicamente, a imagem aparecerá agora numa posição inferior 2. Movimentando mais um pouco a marca direita para a direita conseguiremos que a marca flutuante toque o solo na posição 3. Neste momento as duas

<sup>1</sup> Por questões de simplificação omitimos o estereoscópio.

marcas definem, nas duas fotografias, as posições exactas de um par conjugado de pontos. Note-se que o movimento fictício "acima-abaixo" da marca flutuante deve-se ao facto de a paralaxe das marcas se alterar quando se desloca, horizontalmente, uma relativamente à outra.

Nos instrumentos de medição tridimensional estas marcas podem movimentar-se na imagem estereoscópica e constituem a marca de medição do instrumento. Se a sua separação e, conseqüentemente, a sua paralaxe se mantiver constante, será possível movimentar a marca na imagem tridimensional a uma cota constante e permitirá, ao operador, efectuar o traçado de curvas de nível.

## Capítulo 4

# Sistemas e Transformações de Coordenadas

---

Um sistema de coordenadas é uma entidade<sup>2</sup> de referência que permite a definição espacial de pontos, rectas ou objectos geométricos, através de distâncias, ângulos, ou de ambos.

Associado directamente com o próprio sistema de coordenadas está a necessidade de definir a direcção de um ponto ou de uma recta. Assim, designaremos por  $\omega$  (ou  $\Omega$ ) a rotação em torno do eixo dos  $XX$ ,  $\phi$  a rotação em torno do eixo dos  $YY$  e  $k$  a rotação em torno do eixo dos  $ZZ$ .

Os sistemas de coordenadas utilizados na fotogrametria analítica têm como finalidade a definição espacial da fotografia, do modelo (ou estereomodelo) e do correspondente objecto fotografado. Nesta conformidade estudaremos, seguidamente, os sistemas de coordenadas fotográfico, modelo e objecto.

### 4.1. SISTEMA DE COORDENADAS FOTOGRÁFICO.

Este sistema, representado genericamente por  $\{c, x, y, z\}$  é tridimensional, ortogonal e directo. A origem do sistema é, teoricamente, o centro geométrico  $c$  (ou centro de colimação) da fotografia (figura 4.1). O plano  $cxy$  é coincidente com o plano fotográfico. O eixo  $cz$  é paralelo ao eixo óptico, o qual se considera perpendicular ao plano fotográfico.

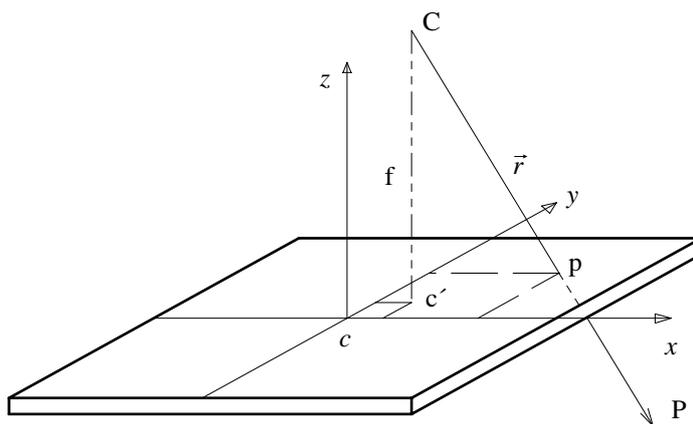


Figura 4.1. Sistema de coordenadas fotográfico

De acordo com a figura as coordenadas do ponto principal  $c'$  serão:

---

<sup>2</sup> Esta entidade pode ter a forma de eixos coordenados, planos ou superfícies.

$$c' = (x_c, y_c, 0)$$

Como o centro de perspectiva ( $C$ ) das lentes da câmara está sob o eixo óptico e a uma distância  $f$  (distância focal) do plano fotográfico, as suas coordenadas serão então:

$$C = (x_c, y_c, f)$$

Por outro lado, qualquer ponto imagem  $p$  do plano fotográfico é definido neste sistema de coordenadas por

$$p = (x_p, y_p, 0)$$

Consequentemente, o vector de localização do ponto  $p$  relativamente ao centro de perspectiva  $C$  é dado por

$$\vec{r} = \overline{Cp} = \begin{bmatrix} x_p - x_c \\ y_p - y_c \\ 0 - f \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Numa câmara correctamente construída e calibrada, as coordenadas fiduciais  $x$  e  $y$  do ponto principal são praticamente zero. Nestas condições, o vector de localização do ponto  $p$  é

$$\vec{r} = (x_p, y_p, -f)$$

Também pode acontecer, em algumas câmaras, que as marcas fiduciais estejam colocadas nos cantos das fotografias. Esta situação corresponderá, então, ou a uma translação, ou a uma rotação, ou ambas, das coordenadas  $x$  e  $y$  dos pontos imagem.

## 4.2. SISTEMA DE COORDENADAS MODELO

Refere-se às coordenadas espaciais dos pontos presentes no modelo estereoscópico, estabelecido matematicamente ou analogicamente no estereorestituidor.

As coordenadas destes pontos são dadas, frequentemente, em relação à base da câmara, ou em relação aos eixos do instrumento e são definidas em termos de  $(X, Y, Z)$ ,  $(X, Y, H)$ , ou em qualquer outro conjunto 3D de referência.

Entre os inúmeros sistemas de coordenadas modelo estudaremos apenas:

1. O sistema de coordenadas modelo convencional  $\{O, X_m, Y_m, Z_m\}$  (figura 4.2-a). É o mais utilizado na fotogrametria analítica e será o escolhido neste curso. Este sistema é definido de modo a coincidir com o sistema de coordenadas fotográfico da fotografia esquerda, isto é: a origem do sistema coincide com o centro de projecção da câmara esquerda, a direcção  $OX_m$  coincide com a direcção  $cx_1$  da foto esquerda e a direcção  $OZ_m$  com a direcção  $cz_1$  da foto esquerda.

2. O sistema de coordenadas modelo internacional  $\{O, X_m, Y_m, Z_m\}$  (figura 4.2-b). É também muito utilizado na fotogrametria analítica. A origem do sistema coincide com o centro de projecção da câmara esquerda. A direcção  $OX_m$  coincide com a base aérea (ou, em geral, com a direcção do voo). O plano  $OX_m Y_m$  contem a direcção  $cy_1$ . Neste caso as componentes  $B_Y$  e  $B_Z$  serão consideradas iguais a zero.

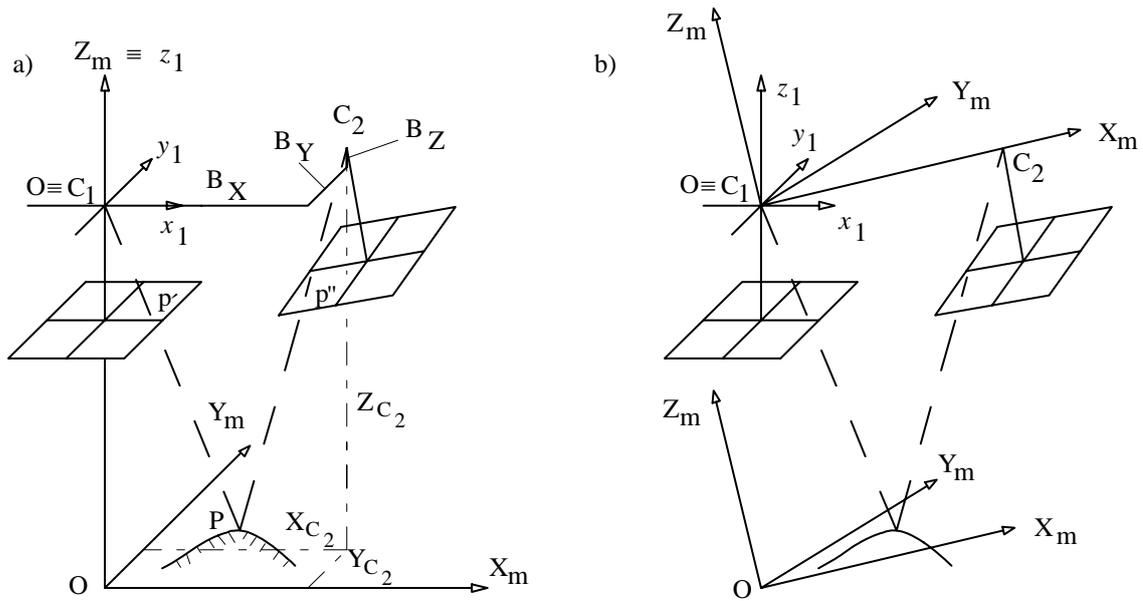


Figura 4.2. Sistemas de coordenadas modelo. a) Convencional. b) Internacional.

### 4.3. SISTEMA DE COORDENADAS OBJECTO

Este sistema é utilizado para definir as posições de pontos no espaço objecto. Considerando o planeta Terra como objecto, podemos definir três sistemas de coordenadas: o sistema de coordenadas geográficas  $\{O, \phi, \lambda, h\}$ , o sistema geocêntrico universal  $\{O, \bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}\}$  e o sistema local rectangular  $\{O, X, Y, Z\}$ .

O sistema de coordenadas geográficas não é muito utilizado na fotogrametria em virtude de os valores das coordenadas serem expressos em unidades não lineares. De modo geral este sistema é convertido num sistema rectangular. Em alguns dos casos, quando a curvatura da Terra for de menor importância, podemos utilizar um sistema de coordenadas plano.

#### 4.3.1. SISTEMA GEOCÊNTRICO UNIVERSAL

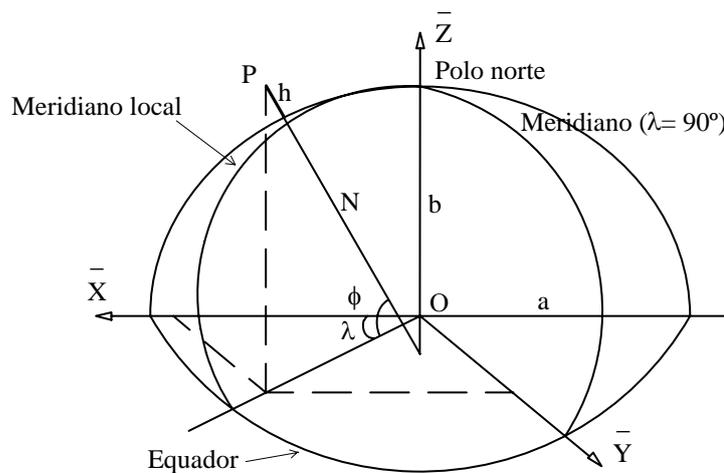


Figura 4.4. Sistema de coordenadas geocêntrico universal

Este sistema, representado genericamente por  $\{O, \bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}\}$ , é utilizado extensivamente na fototriangulação, particularmente nos casos da cobertura de grandes superfícies terrestres. É um sistema ortogonal directo com origem no centro da Terra (figura 4.4). O plano  $O\bar{X}\bar{Y}$  contém o equador, o eixo  $O\bar{X}$  passa pelo meridiano zero, o eixo  $O\bar{Z}$  pelo polo norte e o eixo  $O\bar{Y}$  coincide com o meridiano 90.

Considerando a terra como um elipsoide de revolução, o qual é estabelecido através de duas quantidades (o semi-eixo maior  $a$  e o semi-eixo menor  $b$ ), as coordenadas  $(\bar{X}_p, \bar{Y}_p, \bar{Z}_p)$  de um ponto  $P$  podem ser calculadas a partir das suas coordenadas geográficas utilizando as seguintes expressões:

$$\begin{cases} \bar{X} = (N + h) \cos \phi \cos \lambda \\ \bar{Y} = (N + h) \cos \phi \sin \lambda \\ \bar{Z} = [N(1 - e^2) + h] \sin \phi \end{cases}$$

onde:

- $N = \frac{a}{W}$  é o raio de curvatura do ponto no primeiro vertical,
- $W = \sqrt{(1 - e^2 \sin^2 \phi)}$  é uma das duas quantidades fundamentais,
- $e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$  é a primeira excentricidade.

#### 4.3.2. SISTEMA LOCAL

Este sistema, representado por  $\{O, X, Y, Z\}$ , é também ortogonal e o eixo  $OZ$  é normal ao elipsoide num ponto origem  $O$  da área em estudo (figura 4.5). O eixo  $OY$  coincide com a direcção norte e a cota  $h_o$  da origem é, por conveniência, considerada habitualmente negativa, de modo a que todos os pontos do terreno e todas as estações da câmara têm valores positivos.

Note-se que a origem  $O$  pode ser um ponto do terreno situado na vertical de uma estação da câmara, ou um dos pontos de controlo, ou a origem de uma grelha sobreposta ou ainda um outro ponto mais conveniente.

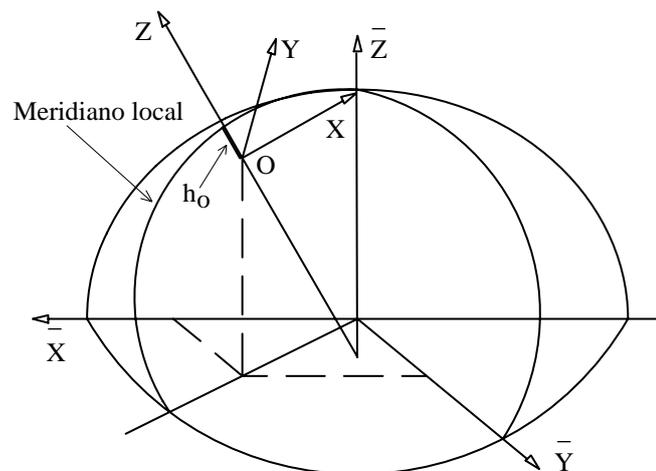


Figura 4.5. Sistema de coordenadas local

Este sistema além de reter todas as vantagens do sistema geocêntrico universal apresenta, adicionalmente, as seguintes vantagens:

- como o sistema é local, as suas coordenadas não comportarão muitos dígitos, o que permite que os cálculos sejam efectuados em precisão simples, com considerável economia na utilização do computador.
- como o eixo  $z$  é paralelo à vertical local permite-nos a separação da planimetria da altimetria.

As coordenadas locais podem ser, facilmente, obtidas a partir das coordenadas geocêntricas através de uma Transformação simples de coordenadas a qual contém uma translação, uma rotação e, possivelmente uma mudança de escala.

#### 4.4. TRANSFORMAÇÕES DE COORDENADAS

Frequentemente, para se transferir um conjunto de pontos de um sistema de coordenadas para outro sistema de coordenadas, é necessário estabelecer relações entre estes dois sistemas de coordenadas.

Para o espaço tridimensional existem numerosos métodos de transformação os quais são aplicáveis, em versões simplificadas, no espaço bidimensional.

O efeito da transformação de um corpo pode constituir apenas uma simples mudança de posição e orientação (i.e. sem mudança de forma e de tamanho) ou pode ser uma mudança complexa (i.e. mudança de forma e tamanho), ou então qualquer coisa intermédia (por ex. variação de escala sem mudança de forma ou posição ou atitude).

##### 4.4.1. TRANSFORMAÇÕES NO ESPAÇO BIDIMENSIONAL

###### 1. Rotação.

A figura 4.6 mostra-nos dois sistemas de coordenadas cartesianas  $(X_1, Y_1)$  e  $(X_2, Y_2)$  com a mesma origem  $O$ , mas um rodado de um ângulo  $\beta$  relativamente ao outro. Suponhamos que  $(X_1, Y_1)$  e  $\beta$  são conhecidos e que se pretende determinar  $(X_2, Y_2)$  em função de  $(X_1, Y_1)$  e  $\beta$ .

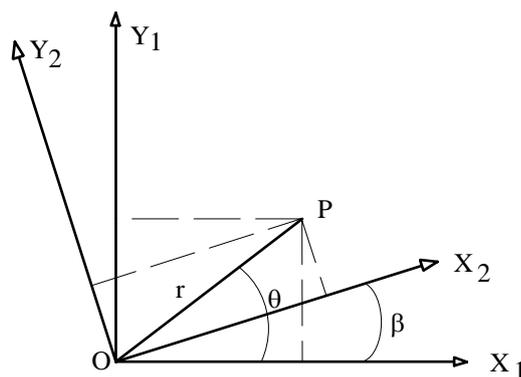


Figura 4.6. Rotação em 2D

Da figura conclui-se:

$$\begin{cases} X_2 = r \cos(\theta - \beta) \\ Y_2 = r \sin(\theta - \beta) \end{cases}$$

Isto é

$$\begin{cases} X_2 = X_1 \cos \beta + Y_1 \sin \beta \\ Y_2 = -X_1 \sin \beta + Y_1 \cos \beta \end{cases} \quad (5.1)$$

Em notação matricial a equação 5.1 escreve-se na forma:

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{bmatrix}$$

ou seja

$$X_2 = M X_1 \quad (4.2)$$

Como  $M$  é uma matriz ortogonal (i.é,  $M^{-1} = M^T$  ou  $M M^T = M M^{-1} = I$ ) vem

$$X_1 = M^T X_2$$

## 2. Mudança de escala.

Se o factor  $s$  representar uma mudança de escala uniforme, então:

$$X_2 = s X_1$$

No caso particular de se tratar de mudança de escala seguida de uma rotação, teremos:

$$X_2 = s M X_1 \quad (4.3)$$

isto é

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \cos \beta & s \sin \beta \\ -s \sin \beta & s \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{bmatrix}$$

Designando por

$$\begin{cases} a = s \cos \beta \\ b = s \sin \beta \end{cases}$$

vem

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

A relação inversa (i.e.  $X_1 = \frac{1}{s} M^T X_2$ ) será, então, dada por:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{bmatrix}$$

## 3. Translação.

No caso de as origens dos dois sistemas não coincidirem (figura 4.7), então serão necessárias duas translações ( $c$  e  $d$ ) para os levar à coincidência:

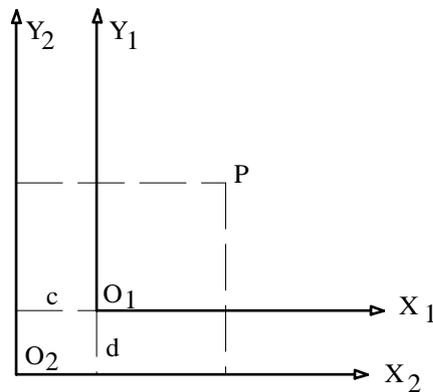


Figura 4.7. Translação em 2D

#### 4. Transformação a 4 parâmetros.

Esta transformação, também conhecida por transformação bidimensional conforme e linear consiste: numa rotação  $\beta$ , em duas translações  $c$  e  $d$  e numa mudança de escala  $s$ . Isto é:

$$X_2 = s M X_1 + T \tag{4.5}$$

ou seja

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$$

A relação inversa é dada por

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_2 - c \\ Y_2 - d \end{bmatrix}$$

#### 5. Transformação a 6 parâmetros

A transformação da secção anterior (4 parâmetros) pode ser generalizada para 6 parâmetros se considerarmos: dois factores de escala ( $s_x$  e  $s_y$ ) em vez de um só e a não perpendicularidade entre os dois eixos do sistema que se pretende transformar.

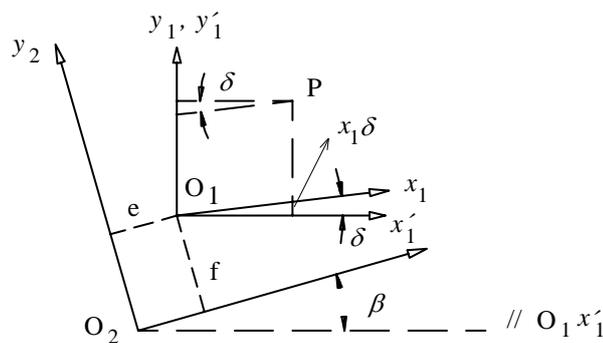


Figura 4.8. Transformação a 6 parâmetros

Como o ângulo  $\delta$  é, normalmente, muito pequeno podemos tomar sem perda de precisão  $\sin \delta = \delta$  e  $\cos \delta = 1$ . Então, tendo em conta a figura 4.8, conclui-se que

$$\begin{cases} X'_1 = \cos \delta X_1 \\ Y'_1 = Y_1 + \sin \delta X_1 \end{cases}$$

Isto é, em notação matricial<sup>3</sup>:

$$\begin{bmatrix} X'_1 \\ Y'_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \delta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{bmatrix} = M_\delta \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{bmatrix}$$

Aplicando a variação de escala, a matriz de rotação e de translação teremos

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \delta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_x X_1 \\ s_y Y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{bmatrix} = M_\beta M_\delta \begin{bmatrix} s_x X_1 \\ s_y Y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

com a matriz de transformação<sup>4</sup> dada por

$$M = M_\beta M_\delta = \begin{bmatrix} (\cos \beta + \delta \sin \beta) & \sin \beta \\ (-\sin \beta + \delta \cos \beta) & \cos \beta \end{bmatrix}$$

Deste modo

$$\begin{cases} X_2 = s_x (\cos \beta + \delta \sin \beta) X_1 + s_y (\sin \beta) Y_1 + e \\ Y_2 = s_x (-\sin \beta + \delta \cos \beta) X_1 + s_y (\cos \beta) Y_1 + f \end{cases}$$

isto é

$$\begin{cases} X_2 = a X_1 + b Y_1 + e \\ Y_2 = c X_1 + d Y_1 + f \end{cases}$$

ou, em notação matricial

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

A relação inversa é dada por:

<sup>3</sup>  $M_\delta$  não é ortogonal

<sup>4</sup>  $M$  não é ortogonal

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - cb} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_2 - e \\ Y_2 - f \end{bmatrix}$$

Esta transformação, também denominada por transformação afim, representa uma rotação, a não ortogonalidade dos eixos coordenados, duas variações de escala e duas translações.

## 6. Transformação a 8 parâmetros.

As relações directas são dadas por:

$$\begin{cases} X_2 = \frac{a_1 X_1 + b_1 Y_1 + c_1}{a_0 X_1 + b_0 Y_1 + 1} \\ Y_2 = \frac{a_2 X_1 + b_2 Y_1 + c_2}{a_0 X_1 + b_0 Y_1 + 1} \end{cases}$$

As relações inversas são:

$$\begin{cases} X_1 = \frac{(b_2 - b_0 Y_2)(X_2 - c_1) - (b_1 - b_0 X_2)(Y_2 - c_2)}{(a_1 - a_0 X_2)(b_2 - b_0 Y_2) - (b_1 - b_0 X_2)(a_1 - a_0 X_2)} \\ Y_1 = \frac{(a_1 - a_0 X_2)(Y_2 - c_2) - (a_2 - a_0 Y_2)(X_2 - c_1)}{(a_1 - a_0 X_2)(b_2 - b_0 Y_2) - (b_1 - b_0 X_2)(a_1 - a_0 X_2)} \end{cases}$$

Esta transformação, também conhecida pelo nome de transformação projectiva estabelece uma projectividade entre dois planos. Como nesta relação entram 8 parâmetros são necessários no mínimo 4 pontos para definir esta transformação.

## 7. Transformação polinomial bidimensional.

### ■ Geral

As relações directas são dadas por:

$$\begin{cases} X_2 = a_0 + a_1 X_1 + a_2 Y_1 + a_3 X_1 Y_1 + a_4 X_1^2 + a_5 Y_1^2 \\ Y_2 = b_0 + b_1 X_1 + b_2 Y_1 + b_3 X_1 Y_1 + b_4 X_1^2 + b_5 Y_1^2 \end{cases}$$

### ■ Conforme

Nesta transformação, a qual, contrariamente à anterior, preserva os ângulos, as relações directas são:

$$\begin{cases} X_2 = a_0 + a_1 X_1 + a_2 Y_1 + a_3 (X_1^2 - Y_1^2) + a_4 (2 X_1 Y_1) \\ Y_2 = b_0 - a_2 X_1 + a_1 Y_1 - a_4 (X_1^2 - Y_1^2) + a_3 (2 X_1 Y_1) \end{cases}$$

## 4.4.2 TRANSFORMAÇÕES NO ESPAÇO TRIDIMENSIONAL

### 1. Rotação em torno de um eixo

Uma das transformações básicas em três dimensões é a rotação de um sistema de coordenadas em torno de um dos seus eixos.

Como a coordenada paralela ao eixo de rotação não é afectada por esta, as outras duas variam de acordo com as relações deduzidas para a rotação num plano (figura 4.8). A rotação de um eixo é positiva se se fizer no sentido directo, para um observador colocado na parte positiva desse eixo e olhar para a origem. Esta rotação provoca no eixo seguinte um deslocamento no sentido daquele que se lhe segue pela ordem cíclica XYZ, YXZ e ZXY.

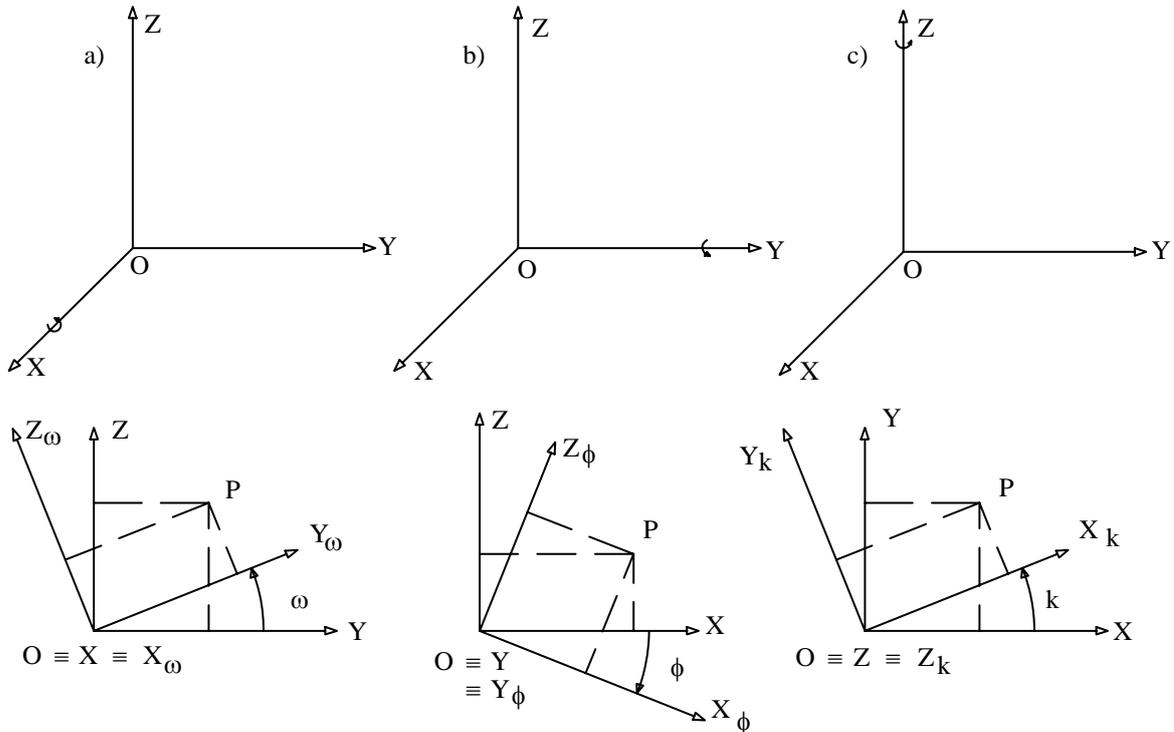


Figura 4.9. Rotações no espaço tridimensional. a) Rotação  $\omega$ . b) Rotação  $\phi$ . c) Rotação  $k$ .

Assim, a rotação de  $+\omega$  em torno de X, faz avançar  $+Y$  na direcção de  $+Z$ . Utilizando as fórmulas deduzidas anteriormente na rotação 2D, teremos:

$$\begin{cases} X_\omega = X \\ Y_\omega = \cos \omega Y + \sin \omega Z \\ Z_\omega = -\sin \omega Y + \cos \omega Z \end{cases}$$

ou, em notação matricial

$$\begin{bmatrix} X_\omega \\ Y_\omega \\ Z_\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega & \sin \omega \\ 0 & -\sin \omega & \cos \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

Consequentemente, a matriz de rotação será:

$$M_\omega = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega & \sin \omega \\ 0 & -\sin \omega & \cos \omega \end{bmatrix}$$

Analogamente, a rotação de  $+\phi$  em torno do eixo dos  $Y$  faz avançar  $+Z$  na direcção de  $+X$  (figura 4.8-b). Isto é:

$$\begin{cases} X_\phi = \cos \phi X - \sin \phi Z \\ Y_\phi = Y \\ Z_\phi = \sin \phi X + \cos \phi Z \end{cases}$$

A matriz de rotação será, neste caso:

$$M_\phi = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & -\sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix}$$

Finalmente, a rotação de  $+K$  em torno de  $Z$  faz avançar  $+X$  na direcção de  $+Y$ , isto é:

$$\begin{cases} X_k = \cos k X + \sin k Y \\ Y_k = -\sin k X + \cos k Y \\ Z_k = Z \end{cases}$$

com a seguinte matriz de rotação:

$$M_k = \begin{bmatrix} \cos k & \sin k & 0 \\ -\sin k & \cos k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Estas três rotações são muitas vezes referidas como rotações elementares uma vez que podem ser usadas para construir qualquer conjunto de rotações sequenciais.

## 2. Rotação sequencial $\omega - \phi - k$

As coordenadas de um ponto  $P$  no sistema final, isto é, depois de sofrer uma rotação sequencial  $\omega \rightarrow \phi \rightarrow k$  são:

$$\begin{pmatrix} X_{\omega\phi k} & Y_{\omega\phi k} & Z_{\omega\phi k} \end{pmatrix}^T$$

Tendo em conta a ordem de multiplicação das matrizes, a matriz de rotação ( $M$ ) será

$$M = M_k M_\phi M_\omega$$

Os elementos desta matriz ortogonal são, genericamente, representados por:

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

onde

$$\begin{aligned}
m_{11} &= \cos \phi \cos k \\
m_{12} &= \cos \omega \sin k + \sin \omega \sin \phi \cos k \\
m_{13} &= \sin \omega \sin k - \cos \omega \sin \phi \cos k \\
m_{21} &= -\cos \phi \sin k \\
m_{22} &= \cos \omega \cos k - \sin \omega \sin \phi \sin k \\
m_{23} &= \sin \omega \cos k + \cos \omega \sin \phi \sin k \\
m_{31} &= \sin \phi \\
m_{32} &= -\sin \omega \cos \phi \\
m_{33} &= \cos \omega \cos \phi
\end{aligned}$$

### 3. Transformação a 7 parâmetros

A rotação é apenas um tipo de transformação de um sistema de coordenadas para outro. Outros tipos de transformações são: a translação ao longo de um ou mais eixos e a mudança uniforme de escala.

Considerando as três possíveis rotações, as três translações e a variação de escala, teremos um total de sete parâmetros de transformação. Daí o nome de transformação a 7 parâmetros.

Esta transformação, também referida por alguns autores como transformação linear conforme tridimensional, é representada genericamente por:

$$X_2 = s M^T X_1 + X_T \quad (4.8)$$

onde

- $X_2 = [X_2 \ Y_2 \ Z_2]^T$  são as coordenadas de um ponto  $P$  depois da transformação,
- $X_1 = [X_1 \ Y_1 \ Z_1]^T$  são as coordenadas de um ponto  $P$  antes da transformação,
- $M$  é a matriz da rotação sequencial  $\omega - \phi - k$  a qual torna o sistema  $\bar{X}_2$  paralelo a  $X_1$  e contém no máximo 3 parâmetros independentes.
  - $s$  é o factor escala
  - $X_T$  é o vector translação

### 4. Transformação afim em 3 dimensões

A transformação anterior assume que o factor escala é o mesmo em qualquer direcção do espaço tridimensional. No entanto, supondo que existem 3 factores de escala diferentes, correspondentes às três direcções dos eixos coordenados, assumiremos então uma relação afim neste espaço. Na prática, e devido a várias razões (por exemplo, a introdução incorrecta da distância focal no estereomodelo) esta situação acontece frequentemente.

Neste caso a equação que traduz esta transformação é derivada da equação anterior fazendo  $s = 1$  e  $\bar{X}_1 = [s_x X_1 \ s_y Y_1 \ s_z Z_1]$ , isto é

$$X_2 = M^T \bar{X}_1 + X_T \quad (4.9)$$

onde  $\bar{X}_1 = s X_1$ ,  $s = (s_x \ s_y \ s_z)^T$  e  $s_x, s_y, s_z$  são, respectivamente, os factores de escala ao longo do eixo dos  $xx$ , dos  $yy$  e dos  $zz$ .

#### 4.4.3. RESOLUÇÃO DO PROBLEMA INVERSO DE UMA TRANSFORMAÇÃO

O problema inverso de uma transformação pode enunciar-se da seguinte forma: dadas as coordenadas de um conjunto de  $n$  pontos  $P_i$  em dois sistemas diferentes,  $X_1$  e  $X_2$ , determinar os parâmetros que caracterizam a transformação em causa.

No estudo deste problema iremos considerar apenas o caso da transformação afim tridimensional a sete parâmetros e deixaremos como exercício os outros casos.

Os diferentes métodos de resolução deste problema podem classificar-se em dois grupos: os métodos directos, nos quais os parâmetros são determinados em grupos separados e numa única etapa do processo; e os métodos iterativos onde os parâmetros são determinados simultaneamente em etapas sucessivas.

## 1. Método directo

Um exemplo de um método directo é o método de Thompson, no qual se determina, numa única etapa, o conjunto de sete parâmetros dividido em três grupos separados:

- o vector translação  $X_T$ ,
- o factor escala  $s$ ,
- Os três parâmetros  $a$ ,  $b$  e  $c$  da matriz de rotação  $M$ .

1. Determinação do factor escala  $s$ . O factor escala pode ser determinado comparando as distâncias calculadas entre dois pontos bem separados, em ambos os sistemas, isto é:

$$s = \frac{l_2}{l_1} \quad (4.12)$$

No caso de utilizarmos mais do que uma distância, teremos:  $s = \frac{\sum l_1 l_2}{\sum (l_1)^2}$

I. Determinação do vector translação. O vector translação pode ser determinado por duas vias:

i) Toma-se como origem, dos novos sistemas, um ponto comum qualquer, por exemplo  $P$ , e calcula-se o vector translação do sistema  $X_1$  para o sistema  $X_2$  através de:

$$X_T = (X_P)_2 - s(X_P)_1 \quad (4.10)$$

ii) Toma-se como origem, dos novos sistemas o centro de gravidade do conjunto de pontos e calcula-se o vector translação do sistema  $X_1$  para o sistema  $X_2$  através de:

$$X_T = (X_M)_2 - s(X_M)_1 \quad \text{com} \quad (X_M)_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i)_j \quad ; \quad j = 1, 2 \quad (4.11)$$

3. Determinação da matriz de rotação  $M$ . Depois de reduzirmos as coordenadas dos pontos do sistema  $X_2$  à nova origem e de corrigirmos as coordenadas do sistema  $X_1$  do factor escala  $s$ , a relação entre estes dois sistemas será apenas:

$$\bar{X}_2 = M \bar{X}_1 \quad \text{com} \quad \bar{X}_2 = X_2 - X_T \quad \text{e} \quad \bar{X}_1 = s X_1$$

Mas como a matriz  $M$  é ortogonal, esta pode escrever-se em função de três parâmetros,  $(a, b, c)$  na forma

$$M = (I + C)(I - C)^{-1} \quad \text{com} \quad C = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & c \\ b & -c & 0 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

e atendendo às propriedades das matrizes ortogonais

$$[(I + C)(I - C)^{-1}]^{-1} = [(I + C)(I - C)^{-1}]^T = (I + C)^{-1} (I - C)$$

teremos:

$$(I - C) X_2 = (I + C) X_1$$

Substituindo nesta expressão a matriz  $C$ , virá (depois de uns breves cálculos):

$$\begin{cases} X_2 - \frac{1}{2}aY_2 + \frac{1}{2}bZ_2 = X_1 + \frac{1}{2}aY_1 - \frac{1}{2}bZ_1 \\ \frac{1}{2}aX_2 + Y_2 - \frac{1}{2}cZ_2 = -\frac{1}{2}aX_1 + Y_1 + \frac{1}{2}cZ_1 \\ -\frac{1}{2}bX_2 + \frac{1}{2}cY_2 + Z_2 = \frac{1}{2}bX_1 - \frac{1}{2}cY_1 + Z_1 \end{cases}$$

Isto é:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(Y_2 + Y_1) & -\frac{1}{2}(Z_2 + Z_1) & 0 \\ -\frac{1}{2}(X_2 + X_1) & 0 & \frac{1}{2}(Z_2 + Z_1) \\ 0 & \frac{1}{2}(X_2 + X_1) & -\frac{1}{2}(Y_2 + Y_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_2 - X_1 \\ Y_2 - Y_1 \\ Z_2 - Z_1 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

A equação anterior escrita na forma condensada é dada por

$$A x = t$$

e no caso de termos  $n$  pontos comuns aos dois sistemas  $X_1$  e  $X_2$  a solução de mínimos quadrados é

$$x = (A^T A)^{-1} A^T t$$

## 2. Método iterativo

Um dos vários métodos iterativos consiste em linearizar as equações  $X_2 = s M X_1 + X_T$  e no caso de haver superabundância de observações aplicar o critério dos mínimos quadrados. Assim, tomando por observáveis as coordenadas dos pontos do segundo sistema ( $X_2$ ) e por parâmetros as variáveis ( $\omega, \phi, k, X_T, Y_T, Z_T, s$ ) a linearização da equação anterior pela fórmula de Taylor conduz-nos ao sistema de equações de observação:

$$A x - t = v$$

onde:

$$\bullet \quad A = \left[ \frac{\partial F_i}{\partial \omega} \quad \frac{\partial F_i}{\partial \phi} \quad \frac{\partial F_i}{\partial k} \quad \frac{\partial F_i}{\partial X_T} \quad \frac{\partial F_i}{\partial Y_T} \quad \frac{\partial F_i}{\partial Z_T} \quad \frac{\partial F_i}{\partial s} \right]_{i=1,3} = [a_{ij}]_{\substack{i=1,3 \\ j=1,7}}$$

$$\bullet \quad t = -(F_i)^0 = -(s M^T X_1 + X_T)^0$$

Os elementos  $a_{ij}$  da matriz  $A$  são dados na seguinte tabela:

$a_{11} = 0$	$a_{21} = -s a_{37}$	$a_{31} = s a_{27}$
$a_{12} = s[(-\sin \phi \cos k) x + (\sin \phi \sin k) y + (\cos \phi) z]$		
$a_{22} = s[(\sin \omega \cos \phi \cos k) x + (-\sin \omega \cos \phi \sin k) y + (\sin \omega \sin \phi) z]$		
$a_{32} = s[(-\cos \omega \cos \phi \cos k) x + (\cos \omega \cos \phi \sin k) y + (-\cos \omega \sin \phi) z]$		
$a_{13} = s(m_{21} x - m_{11} y)$	$a_{23} = s(m_{22} x - m_{12} y)$	$a_{33} = s(m_{23} x - m_{13} y)$
$a_{14} = 1$	$a_{24} = 0$	$a_{34} = 0$
$a_{15} = 0$	$a_{25} = 1$	$a_{35} = 0$
$a_{16} = 0$	$a_{26} = 0$	$a_{36} = 1$
$a_{17} = m_{11} x + m_{21} y + m_{31} z$	$a_{27} = m_{12} x + m_{22} y + m_{32} z$	$a_{37} = m_{13} x + m_{23} y + m_{33} z$

Tabela 4.1. Elementos  $a_{ij}$  da matriz  $A$

No caso de termos  $n$  pontos obteremos o seguinte sistema de equações:

$$\underset{(3n,7)}{A} \underset{(7,1)}{x} - \underset{(3n,1)}{t} = \underset{(3n,1)}{v}$$

cujas solução de mínimos quadrados<sup>5</sup> é  $x = (A^T A)^{-1} A^T t$  com a variância a posteriori

$$\sigma^2 = \frac{v^T v}{n - 3}$$

As aproximações iniciais podem ser determinadas da seguinte forma:

- escolhem-se três pontos ao acaso,
- com os dois primeiros determinamos as aproximações do factor de escala e do vector translação, da mesma forma que no método directo,
- depois de reduzirmos os pontos à mesma origem e escala, com os três pontos determinamos as aproximações iniciais dos parâmetros de rotação.

<sup>5</sup> Considerando a matriz dos pesos  $P$  a identidade

# Capítulo 5

## Orientação Analítica de um Modelo

---

### 1. INTRODUÇÃO

Como já dissemos, a fotografia pode ser definida como uma projecção central do espaço objecto na superfície fotográfica. O centro de perspectiva das lentes da câmara e as imagens expostas na superfície fotográfica formam um feixe de raios que, por sua vez, é utilizado na reconstrução do modelo objecto. A esta reconstrução, a qual poderá ser realizada em várias etapas, chama-se orientação.

Assim, definimos orientação como a determinação da posição e atitude (angular) de uma câmara, fotografia, modelo triplete, ou de qualquer outra unidade do espaço, relativamente a um sistema de coordenadas externo.

A orientação de um objecto (ou corpo rígido) no espaço pode ser feita em duas etapas sucessivas:

i) Escolha arbitrária de um sistema de coordenadas interno relativamente ao qual os pontos objectos são referidos - orientação interna.

ii) determinação dos parâmetros de transformação (i.e. elementos de orientação) que relacionam o sistema de coordenadas interno (por exemplo, o sistema fotográfico) com o sistema externo (i.e. sistema objecto) - orientação externa.

Os parâmetros de orientação podem ser observados: directamente, através de equipamento auxiliar adicionado à câmara fotográfica; ou indirectamente, utilizando pontos de controlo cujas coordenadas são conhecidas em ambos sistemas de coordenadas interno e externo.

O modelo matemático que relaciona os sistemas interno ( $X_i$ ) e externo ( $X_r$ ) é dado por:

$$X_r = f(X_i, U)$$

onde

- $f$  é a função de transformação (que poderá ser linear ou não)
- $U$  são os elementos de orientação.

Esta relação, habitualmente conhecida como uma transformação de coordenadas do sistema  $X_i$  para o sistema  $X_r$ , pode ser executada:

i) numa única transformação

$$X_i \xrightarrow{f, U} X_r$$

onde os parâmetros  $U$  são determinados numa única solução não iterativa

ii) em transformações sucessivas

$$X_i \xrightarrow{f_1, U_1} X_1 \xrightarrow{f_2, U_2} X_2 \xrightarrow{f_3, U_3} X_r$$

onde cada tipo de transformação é aplicado com o objectivo de relacionar sistemas de coordenadas intermédios. As funções  $f_1, f_2, f_3, f_n$  são chamadas modelos de conversão e cada uma delas define um procedimento de orientação.

As razões que podem levar à escolha e aplicação de um determinado tipo de transformação podem ser :

- 1) simplicidade - por vezes é possível encontrar e aplicar as transformações sucessivas  $g_1, g_2, \dots, g_n$  de forma mais simples que no caso de uma única transformação,
- 1) o tipo e a forma dos dados impõe por vezes uma determinada forma para a solução. O mesmo é aplicável para os meios de processamento disponíveis (analógicos ou digitais),
- 1) os passos sucessivos envolvem determinados tipos de verificação da qualidade da informação disponível, os quais não são fáceis de aplicar numa transformação única.

A Fotogrametria Analítica consiste na modelação matemática das relações existentes entre sistemas diferentes: fotografia e objecto (terreno); foto e modelo; modelo e objecto. Estas relações são virtualmente independentes das aplicações, isto é, a mesma formulação pode ser válida para a fotogrametria espacial, aérea, terrestre e microscópica. Para se chegar a uma solução é necessário utilizar um conjunto de equações de condição para estabelecer as relações entre os valores observados e os parâmetros desconhecidos. As equações de condição mais comumente utilizadas são:

- 1) a condição de colinearidade,
- 1) a condição de coplanaridade.

Cada uma destas condições tem funções, objectivos e limitações específicas. Consequentemente, a escolha de uma equação de condição pode conduzir a diferentes resultados para a solução de um problema específico.

A seguinte tabela mostra as características representativas das duas equações.

	Aplicações	Dados Observados	Parâmetros	
			Conhecidos	Desconhecidos
Colinearidade	Ressecção espacial	$(x'_p, y'_p)$	$x_c, y_c, f, X_p, Y_p, Z_p$	$X_c, Y_c, Z_c, \omega, \phi, k$
	Intersecção espacial	$(x'_p, y'_p)$ $(x''_p, y''_p)$	$x_c, y_c, f$ $X'_c, Y'_c, Z'_c, \omega', \phi', k'$ $X''_c, Y''_c, Z''_c, \omega'', \phi'', k''$	$X_p, Y_p, Z_p$
Coplanaridade e Colinearidade	Orientação relativa (dependente)	$(x'_p, y'_p)$ $(x''_p, y''_p)$	$x_c, y_c, f, b_{y'}, b_{z'}$ $\omega', \phi', k', b_x$	$b_{y''}, b_{z''}$ $\omega'', \phi'', k''$
	Orientação relativa (independ.)	$(x'_p, y'_p)$ $(x''_p, y''_p)$	$x_c, y_c, f, b_x$ $\omega', b_y, b_z$	$\phi', k'$ $\omega'', \phi'', k''$

Tabela 5.1. Equações de condição e suas aplicações.

Na tabela anterior:

- $x_c, y_c, f$  são as coordenadas do centro de perspectiva no sistema de coordenadas fiducial,
- $\omega', \phi', k', X'_C, Y'_C, Z'_C$  os parâmetros de orientação da foto esquerda,
- $\omega'', \phi'', k'', X''_C, Y''_C, Z''_C$  os parâmetros de orientação da foto direita,
- $b_x, b_y, b_z$  as componentes do vector  $\overline{C'C''}$  no sistema  $X_r$ ,
- $x'_p, y'_p$  as coordenadas imagem do ponto  $P$  na foto esquerda,
- $x''_p, y''_p$  as coordenadas imagem do ponto  $P$  na foto direita.

## 2. ORIENTAÇÃO INTERNA

O objectivo desta fase é a reconstrução de um feixe de raios geometricamente idêntico ao feixe produzido pela câmara no momento de exposição.

Os parâmetros que definem estas relações são chamados elementos de orientação interna e englobam principalmente:

- a constante da câmara (i.e. distância focal ou distância principal),
- a posição do ponto principal relativamente às marcas fiduciais,
- os parâmetros de distorção do sistema de lentes fotográfico.

Nos actuais instrumentos de estereorrestituição a orientação interna é definida pela introdução dos valores numéricos destes elementos.

## 3. ORIENTAÇÃO EXTERNA

O objectivo desta fase é a reposição do feixe de raios, ou qualquer outra unidade gerada a partir destes feixes (modelo, triplete, etc.) -orientado interiormente- no sistema de coordenadas externo.

A orientação externa engloba dois conjuntos de parâmetros:

- a localização do centro de perspectiva,
- a orientação angular do eixo da câmara (ou do plano fotográfico) a qual define a atitude (angular) da câmara no instante de exposição.

De um modo geral, a orientação externa é executada em duas etapas sucessivas:

1. a orientação das duas fotografias (modelo) num sistema de coordenadas arbitrário (sistema modelo) - orientação relativa.
1. A transformação do sistema de coordenadas modelo ( $X_m$ ) no sistema de coordenadas objecto ( $X_r$ ) - orientação absoluta.

### 3.1. ORIENTAÇÃO RELATIVA

Com a orientação relativa pretende-se a determinação da posição e atitude angular de duas fotografias sucessivas e sobrepostas (modelo) uma em relação à outra. Isto é, reconstruir as condições reais no momento em que é tirada a fotografia de tal modo que os raios projectivos de todos os pontos conjugados se intersectem no espaço objecto.

Podemos agora perguntar: quantos pontos conjugados serão necessários para efectuar a orientação relativa de duas fotografias?

Partindo do princípio que não existem distorções geométricas, causadas por diversas fontes, bastam-nos 5 pares de raios (isto é 5 pontos) para assegurar a orientação relativa de duas fotografias. Isto é, se cinco pares de raios se intersectarem no espaço objecto, então qualquer par de raios homólogos, intersectar-se-á no mesmo espaço.

Existem vários métodos analíticos para efectuar a orientação relativa de duas fotografias. De uma forma geral, todos eles se baseiam ou na condição de colinearidade, ou na condição

de coplanaridade, condições estas que constituem a base de toda a Fotogrametria Analítica. É exactamente a partir destas condições, as quais envolvem os pontos imagem (fotografias) e os correspondentes pontos objecto, que se obtêm as equações de colinearidade e coplanaridade e que iremos aplicar no caso concreto do problema da orientação relativa.

### 3.1.1. EQUAÇÕES DE COLINEARIDADE

Consideremos a figura 5.1. na qual designamos por:

- $(X_C, Y_C, Z_C)$  - as coordenadas do centro de perspectiva  $C$  no sistema objecto,
- $(x_c, y_c, f)$  - as coordenadas do centro de perspectiva no sistema fotográfico,
- $(X_P, Y_P, Z_P)$  - as coordenadas do ponto  $P$  no sistema objecto,
- $(x_p, y_p, 0)$  - as coordenadas do ponto imagem  $p$  no sistema fotográfico.

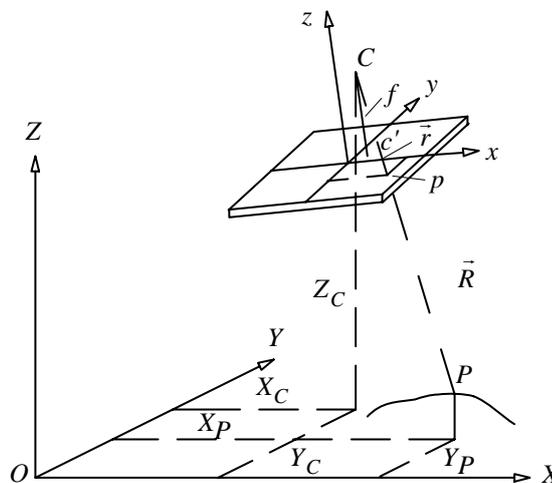


Figura 5.1. Equação de colinearidade

No sistema fotográfico, o vector  $\vec{r}$  que define a localização do ponto imagem  $p$  é dado por:

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} x_p - x_c \\ y_p - y_c \\ 0 - f \end{bmatrix}$$

No sistema de coordenadas objecto o vector  $\vec{R}$  que define a localização do ponto objecto  $P$  é dado por:

$$\vec{R} = \begin{bmatrix} X_P - X_C \\ Y_P - Y_C \\ Z_P - Z_C \end{bmatrix}$$

A condição de colinearidade diz-nos que: o ponto objecto  $P$ , a sua imagem  $p$  na fotografia e a estação de exposição (centro de perspectiva) devem estar situados na mesma linha recta. Então, atendendo à relação tridimensional entre os sistemas fotográfico e objecto vem:

$$\vec{r} = s M \vec{R} \quad (5.1)$$

ou ainda

$$\vec{R} = \frac{1}{s} M^T \vec{r}$$

onde  $s$  é o factor escala e  $M$  é a matriz de rotação.

Fazendo as respectivas substituições na equação 5.1, teremos:

$$\begin{cases} x_p - x_c = s[m_{11}(X_P - X_C) + m_{12}(Y_P - Y_C) + m_{13}(Z_P - Z_C)] \\ y_p - y_c = s[m_{21}(X_P - X_C) + m_{22}(Y_P - Y_C) + m_{23}(Z_P - Z_C)] \\ -f = s[m_{31}(X_P - X_C) + m_{32}(Y_P - Y_C) + m_{33}(Z_P - Z_C)] \end{cases}$$

Dividindo a 1ª e a 2ª equação pela 3ª e multiplicando por  $-f$  virá

$$\begin{cases} x = x_p - x_c = -f \frac{m_{11}(X_P - X_C) + m_{12}(Y_P - Y_C) + m_{13}(Z_P - Z_C)}{m_{31}(X_P - X_C) + m_{32}(Y_P - Y_C) + m_{33}(Z_P - Z_C)} \\ y = y_p - y_c = -f \frac{m_{21}(X_P - X_C) + m_{22}(Y_P - Y_C) + m_{23}(Z_P - Z_C)}{m_{31}(X_P - X_C) + m_{32}(Y_P - Y_C) + m_{33}(Z_P - Z_C)} \end{cases}$$

Estas são as equações de colinearidade e na forma matricial podem ser dadas por

$$\begin{cases} x = -f \frac{M_1 \bar{X}}{M_3 \bar{X}} \\ y = -f \frac{M_2 \bar{X}}{M_3 \bar{X}} \end{cases}$$

onde:

- $M_1, M_2, M_3$  representam as linhas da matriz  $M$ ,
- $\bar{X} = (X_P - X_C, Y_P - Y_C, Z_P - Z_C)^T$

### 1. Linearização das equações de colinearidade

As equações de colinearidade para um ponto genérico  $P$  são:

$$\begin{cases} x = -f \frac{m_{11}(X_P - X_C) + m_{12}(Y_P - Y_C) + m_{13}(Z_P - Z_C)}{m_{31}(X_P - X_C) + m_{32}(Y_P - Y_C) + m_{33}(Z_P - Z_C)} \\ y = -f \frac{m_{21}(X_P - X_C) + m_{22}(Y_P - Y_C) + m_{23}(Z_P - Z_C)}{m_{31}(X_P - X_C) + m_{32}(Y_P - Y_C) + m_{33}(Z_P - Z_C)} \end{cases} \quad (5.4)$$

Designado por



Nestas equações os coeficientes  $b$ 's são obtidos a partir das derivadas parciais dos parâmetros de orientação e das coordenadas objecto. Estes coeficientes são dados por:

$$\begin{aligned}
 b_{11} &= \frac{x}{q}(-m_{33}\Delta Y + m_{32}\Delta Z) + \frac{f}{q}(-m_{13}\Delta Y + m_{12}\Delta Z) \\
 b_{12} &= \frac{x}{q}[(\cos\phi)\Delta X + (\sin\omega\sin\phi)\Delta Y - (\cos\omega\sin\phi)\Delta Z] + \\
 &\quad + \frac{f}{q}[(-\sin\phi\cos k)\Delta X + (\sin\omega\cos\phi\cos k)\Delta Y + (-\cos\omega\cos\phi\cos k)\Delta Z] \\
 b_{13} &= \frac{f}{q}(m_{21}\Delta X + m_{22}\Delta Y + m_{23}\Delta Z) \\
 b_{14} &= -\frac{x}{q}m_{31} - \frac{f}{q}m_{11} \quad ; \quad b_{17} = -b_{14} \\
 b_{15} &= -\frac{x}{q}m_{32} - \frac{f}{q}m_{12} \quad ; \quad b_{18} = -b_{15} \\
 b_{16} &= -\frac{x}{q}m_{33} - \frac{f}{q}m_{13} \quad ; \quad b_{19} = -b_{16} \\
 b_{21} &= \frac{y}{q}(-m_{33}\Delta Y + m_{32}\Delta Z) + \frac{f}{q}(-m_{13}\Delta Y + m_{12}\Delta Z) \\
 b_{22} &= \frac{y}{q}[(\cos\phi)\Delta X + (\sin\omega\sin\phi)\Delta Y - (\cos\omega\sin\phi)\Delta Z] + \\
 &\quad + \frac{f}{q}[(\sin\phi\sin k)\Delta X + (-\sin\omega\cos\phi\sin k)\Delta Y + (\cos\omega\cos\phi\sin k)\Delta Z] \\
 b_{23} &= -\frac{f}{q}(m_{11}\Delta X + m_{12}\Delta Y + m_{13}\Delta Z) \\
 b_{24} &= -(\frac{y}{q}m_{31} + \frac{f}{q}m_{21}) \quad ; \quad b_{27} = -b_{24} \\
 b_{25} &= -(\frac{y}{q}m_{32} + \frac{f}{q}m_{22}) \quad ; \quad b_{28} = -b_{25} \\
 b_{26} &= -(\frac{y}{q}m_{33} + \frac{f}{q}m_{23}) \quad ; \quad b_{29} = -b_{26}
 \end{aligned}$$

onde

$$\Delta X = X - X_c \quad ; \quad \Delta Y = Y - Y_c \quad ; \quad \Delta Z = Z - Z_c$$

## 2. Aplicação das equações de colinearidade à orientação relativa

A equação (5.7) escrita na forma matricial para uma fotografia  $i$  e para um determinado ponto objecto  $P$  é

$$\underset{(2,1)}{y} + \underset{(2,6)}{\dot{B}} \underset{(6,1)}{\dot{d}} + \underset{(2,3)}{\ddot{B}} \underset{(3,1)}{\ddot{d}} = \underset{(2,1)}{\varepsilon} \quad (5.8)$$

onde:

- o sinal  $\dot{\phantom{x}}$  refere-se aos parâmetros de orientação da fotografia,
- o sinal  $\ddot{\phantom{x}}$  refere-se às coordenadas dos pontos objecto,

- $v$  é o vector dos resíduos,
- $\dot{B}$  é a matriz dos coeficientes dos parâmetros de orientação,
- $\dot{d}$  é o vector incógnita dos parâmetros de orientação da foto em causa,
- $\ddot{B}$  é a matriz dos coeficientes das coordenadas dos pontos objecto,
- $\ddot{d}$  é o vector incógnita das coordenadas objecto dos pontos,
- $\varepsilon$  é o vector dos termos independentes calculados com as aproximações iniciais.

Assim, cada ponto fornece, numa dada fotografia  $i$ :

$$\left\| \begin{array}{l} 2 \text{ equações} \\ 6 + 3 \text{ incógnitas} \end{array} \right.$$

No caso geral de termos  $i = 1, \dots, m$  fotografias e  $j = 1, \dots, n$  pontos virá

$$\underset{(2mn,1)}{v} + \underset{(2mn,6m)}{\dot{B}} \underset{(6m,1)}{\dot{d}} + \underset{(2mn,3n)}{\ddot{B}} \underset{(3n,1)}{\ddot{d}} = \underset{(2mn,1)}{\varepsilon} \quad (5.9)$$

Estas equações representam um sistema de

$$\left\| \begin{array}{l} 2mn \text{ equações} \\ 6m + 3n \text{ incógnitas} \end{array} \right.$$

No nosso caso estamos apenas interessados na resolução de um sistema que contenha  $m=2$  fotografias e  $n$  pontos, isto é no sistema

$$\underset{(4n,1)}{v} + \underset{(4n,12)}{\dot{B}} \underset{(12,1)}{\dot{d}} + \underset{(4n,3n)}{\ddot{B}} \underset{(3n,1)}{\ddot{d}} = \underset{(4n,1)}{\varepsilon}$$

o qual contém

$$\left\| \begin{array}{l} 4n \text{ equações} \\ 12 + 3n \text{ incógnitas} \end{array} \right.$$

No mínimo, seriam necessários  $m=12$  pontos para resolver sem ambiguidade o sistema de equações: No entanto como se trata da orientação relativa de 2 fotografias podemos fixar uma delas e escolher o sistema de coordenadas modelo de forma a que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_1 = \phi_1 = k_1 = X_{C_1} = Y_{C_1} = 0 \\ Z_{0_1} = H \text{ (altura de voo) na fotografia aerea} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} X_{C_2} = 1 \text{ (arbitrario)} \end{array} \right.$$

Neste caso as equações de colinearidade são:

$$\underset{(4n,1)}{v} + \underset{(4n,5)}{\dot{B}} \underset{(5,1)}{\dot{d}} + \underset{(4n,3n)}{\ddot{B}} \underset{(3n,1)}{\ddot{d}} = \underset{(4n,1)}{\varepsilon} \quad (5.10)$$

Este sistema tem

$$\left\| \begin{array}{l} 4n \text{ equações} \\ 5 + 3n \text{ incógnitas} \end{array} \right.$$

Como o número de graus de liberdade é  $4n - (3n + 5) = n - 5$ , isto significa que o número mínimo de pontos que permite resolver o sistema são 5.

### 3. Estrutura do sistema de equações normais e algoritmo de cálculo

O sistema de equações representado em (5.10) é (em detalhe)

$$\begin{bmatrix} v_x^{11} \\ v_y^{11} \\ v_x^{21} \\ v_y^{21} \\ \vdots \\ v_x^{1n} \\ v_y^{1n} \\ v_x^{2n} \\ v_y^{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{14}^{11} & b_{15}^{11} & b_{16}^{11} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{24}^{11} & b_{25}^{11} & b_{26}^{11} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ b_{11}^{21} & b_{12}^{21} & b_{13}^{21} & -b_{15}^{21} & -b_{16}^{21} & b_{14}^{21} & b_{15}^{21} & b_{16}^{21} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ b_{21}^{21} & b_{22}^{21} & b_{23}^{21} & -b_{25}^{21} & -b_{26}^{21} & b_{24}^{21} & b_{25}^{21} & b_{26}^{21} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots & \ddots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{14}^{1n} & b_{15}^{1n} & b_{16}^{1n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{24}^{1n} & b_{25}^{1n} & b_{26}^{1n} \\ b_{11}^{2n} & b_{12}^{2n} & b_{13}^{2n} & -b_{15}^{2n} & -b_{16}^{2n} & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{14}^{2n} & b_{15}^{2n} & b_{16}^{2n} \\ b_{21}^{2n} & b_{22}^{2n} & b_{23}^{2n} & -b_{25}^{2n} & -b_{26}^{2n} & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{24}^{2n} & b_{25}^{2n} & b_{26}^{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\omega \\ d\phi \\ dk \\ dY_c \\ dZ_c \\ dX_1 \\ dY_1 \\ dZ_1 \\ \vdots \\ dX_n \\ dY_n \\ dZ_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \varepsilon_x^{11} \\ \varepsilon_y^{11} \\ \varepsilon_x^{21} \\ \varepsilon_y^{21} \\ \vdots \\ \varepsilon_x^{1n} \\ \varepsilon_y^{1n} \\ \varepsilon_x^{2n} \\ \varepsilon_y^{2n} \end{bmatrix}$$

o qual pode ser representado genericamente por

$$\underset{(4n,1)}{v} = \underset{(4n,5+3n)}{A} \underset{(5+3n,1)}{x} - \underset{(4n,1)}{t} \quad (5.11)$$

cujas equações normais são

$$\underset{(5+3n,5+3n)}{N} \underset{(5+3n,1)}{x} = \underset{(5+3n,1)}{d} \quad (5.12)$$

onde  $N = A^T P A$ ,  $d = A^T P t$  e  $P$  é a matriz dos pesos das observações. Como estas foram realizadas em condições idênticas considerou-se, também por motivos de simplificação,  $P = I$ .

Na resolução directa do sistema (5.12) há necessidade de inverter uma matriz de ordem  $(5+3n,5+3n)$ . Como o número de pontos comumente utilizado na orientação de duas fotografias se situa entre 7 a 12, o esforço computacional para um PC vulgar é bastante elevado tornando o processo muito lento. No entanto, um estudo detalhado destas equações permite-nos tirar algumas conclusões sobre as características da matriz  $N$ , as quais poderão ser utilizadas vantajosamente na resolução do sistema. De facto, a equação (5.12) pode representar-se na seguinte forma

$$\begin{bmatrix} \dot{N}_2 & \bar{N}_{21} & \bar{N}_{22} & \cdots & \bar{N}_{2n} \\ \bar{N}_{21}^T & \dot{N}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \bar{N}_{22}^T & 0 & \dot{N}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{N}_{2n}^T & 0 & 0 & \cdots & \dot{N}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \vdots \\ \ddot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{d}_2 \\ \ddot{d}_1 \\ \ddot{d}_2 \\ \vdots \\ \ddot{d}_n \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

onde:

- $\dot{N}_2 = \sum_{j=1}^n \dot{B}_{2j}^T \dot{B}_{2j}$  tem a dimensão (5,5),
- $\ddot{N}_j = \sum_{i=1}^2 \ddot{B}_{ij}^T \ddot{B}_{ij}$  ( $j = \overline{1,n}$ ) tem a dimensão (3,3),
- $\bar{N}_{2j} = \dot{B}_{2j}^T \ddot{B}_{2j}$  ( $j = \overline{1,n}$ ) tem a dimensão (5,3),
- $\bar{N}_{2j}^T = \ddot{B}_{2j}^T \dot{B}_{2j}$  ( $j = \overline{1,n}$ ) tem a dimensão (3,5),
- $\dot{d}_2 = \sum_{j=1}^n \dot{B}_{2j}^T \varepsilon_{2j}$  tem a dimensão (5,1),
- $\ddot{d}_j = \sum_{i=1}^2 \ddot{B}_{ij}^T \varepsilon_{ij}$  ( $j = \overline{1,n}$ ) tem a dimensão (3,1),
- $\dot{x}_2 = [d\omega \quad d\phi \quad dk \quad dY_C \quad dZ_C]^T$  tem a dimensão (5,1),
- $\ddot{x}_j = [dX_{P_j} \quad dY_{P_j} \quad dZ_{P_j}]^T$  ( $j = \overline{1,n}$ ) tem a dimensão (3,1).

Assim, uma análise atenta da equação (5.13) permite-nos concluir que a matriz  $N$ :

- é simétrica relativamente à sua diagonal principal, com os elementos da primeira linha e da primeira coluna diferentes de zero e os restantes iguais a zero,
- o primeiro elemento da diagonal consiste numa submatriz de ordem (5,5) correspondendo aos elementos de orientação,
- os outros elementos da diagonal consistem em submatrizes de ordem (3,3) correspondendo cada uma delas a cada ponto visado.

A equação (5.13) pode ainda dividir-se em dois conjuntos de equações:

$$\begin{cases} \dot{N}\dot{x} + \bar{N}\ddot{x} = \dot{d} \\ \bar{N}^T\dot{x} + \ddot{N}\ddot{x} = \ddot{d} \end{cases}$$

Tirando o valor de  $\ddot{x}$  na segunda equação

$$\ddot{x} = \ddot{N}^{-1}(\ddot{d} - \bar{N}^T\dot{x})$$

e substituindo na primeira vem

$$\dot{N}\dot{x} + \bar{N}\ddot{N}^{-1}(\ddot{d} - \bar{N}^T\dot{x}) = \dot{d}$$

ou seja

$$(\dot{N} - \bar{N}\ddot{N}^{-1}\bar{N}^T)\dot{x} = \dot{d} - \bar{N}\ddot{N}^{-1}\ddot{d}$$

Estas são as equações normais reduzidas e no caso geral podem ser expressas na seguinte forma:

$$S\dot{x}_2 = E \tag{5.14}$$

onde:

- $S = \dot{N}_2 - \sum_{j=1}^n (\bar{N}_{2j} \ddot{N}_j^{-1} \bar{N}_{2j}^T)$  tem a dimensão (5,5),

- $E = \dot{d}_2 - \sum_{j=1}^n (\bar{N}_j \ddot{N}_j^{-1} \ddot{d}_j)$  tem a dimensão (5,1),
- $\dot{x}_2 = (d\omega \quad d\phi \quad dk \quad dY_C \quad dZ_C)^T$

Por outro lado, e atendendo à estrutura diagonal da matriz N, as correções a adicionar às aproximações iniciais das coordenadas dos pontos são obtidas a partir de

$$\ddot{x}_j = \ddot{N}_j^{-1} (\ddot{d}_j - \bar{N}_{2j}^T \dot{x}_2) \quad (j = \overline{1, n}) \quad (5.15)$$

Desta forma a ordem máxima da matriz que teremos de inverter é 6, no caso da equação (5.14), e 3, no caso da equação (5.15).

### 3. Aproximações iniciais

- Utilizando o método das equações de paralaxe.  
Tomando como aproximações iniciais para os parâmetros de orientação das duas fotografias os valores:

$$\begin{cases} \omega_1 = \phi_1 = k_1 = \omega_2 = \phi_2 = k_2 = 0 \\ X_{C_1} = Y_{C_1} = Z_{C_1} = Y_{C_2} = 0 \end{cases}$$

e substituindo nas equações 5.4 vem

$$\begin{cases} x_1 = -f \frac{X}{Z} \\ y_1 = -f \frac{Y}{Z} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x_2 = -f \frac{X - b}{Z} \\ y_2 = -f \frac{Y}{Z} \end{cases}$$

Fazendo agora  $px = x_2 - x_1$  virá

$$\begin{cases} X = -\frac{Yx_1}{f} \\ Y = \frac{fb}{px} \\ Z = \frac{Yy_1}{f} \end{cases} \quad (5.10)$$

#### 3.1.2. EQUAÇÕES DE COPLANARIDADE

A condição de coplanaridade diz-nos que: em duas fotografias com sobreposição, os dois centros de perspectiva  $C_1$  e  $C_2$ , o ponto objecto  $P$  qualquer e as suas correspondentes imagens  $p_1$  e  $p_2$  devem estar no mesmo plano.

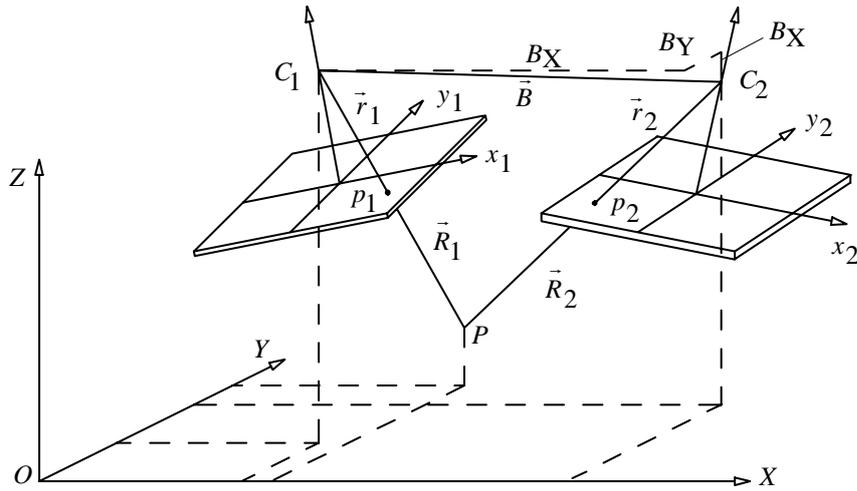


Figura 5.2. Equação de coplanaridade

Sejam (figura 5.2):

- $(X_{C_1}, Y_{C_1}, Z_{C_1})$  as coordenadas objecto do centro de exposição  $C_1$
- $(X_{C_2}, Y_{C_2}, Z_{C_2})$  as coordenadas objecto do centro de exposição  $C_2$
- $(x_{p_1}, y_{p_1})$  as fotocoordenadas do ponto imagem  $p_1$
- $(x_{p_2}, y_{p_2})$  as fotocoordenadas do ponto imagem  $p_2$
- $M_1$  a matriz de rotação da fotografia esquerda
- $M_2$  a matriz de rotação da fotografia direita
- $(B_X, B_Y, B_Z)$  as componentes do vector base  $\vec{B}$
- $(X_{R_1}, Y_{R_1}, Z_{R_1})$  as componentes do vector  $\vec{R}_1$  no sistema de coordenadas objecto
- $(X_{R_2}, Y_{R_2}, Z_{R_2})$  as componentes do vector  $\vec{R}_2$  no sistema de coordenadas objecto

A condição de coplanaridade na forma vectorial é dada por:

$$F_i = \vec{B} \cdot \vec{R}_1 \times \vec{R}_2 = 0$$

isto é

$$\begin{vmatrix} B_X & B_Y & B_Z \\ X_{R_1} & Y_{R_1} & Z_{R_1} \\ X_{R_2} & Y_{R_2} & Z_{R_2} \end{vmatrix} = 0$$

ou ainda

$$B_X(Y_{R_1}Z_{R_2} - Y_{R_2}Z_{R_1}) - B_Y(X_{R_1}Z_{R_2} - X_{R_2}Z_{R_1}) + B_Z(X_{R_1}Y_{R_2} - X_{R_2}Y_{R_1}) = 0$$

Esta equação estabelece simplesmente que os vectores  $\vec{B}$ ,  $\vec{R}_1$  e  $\vec{R}_2$  estão situados no mesmo plano. É consideravelmente mais complicada que a equação de colinearidade, visto envolver os parâmetros de orientação interna e externa das duas fotografias. Por outro lado tem a vantagem de não aparecerem as coordenadas dos pontos objecto, além do número de equações ser menor, para o mesmo número de pontos. Por exemplo, se considerarmos 6 pontos teremos 12 equações de colinearidade e 6 de coplanaridade.

O método dependente torna o procedimento de orientação relativa mais simples. De facto considerando

$$\begin{cases} \vec{R}_1 = s_1 M_1^T \vec{r}_1 \\ \vec{R}_2 = s_2 M_2^T \vec{r}_2 \end{cases} \quad \text{com } s_1 \text{ e } s_2 \text{ factores de escala}$$

e tomando para

$$\begin{cases} s_1 = s_2 = 1 \\ \omega_1 = \phi_1 = k_1 = Y_{C_1} = Z_{C_1} = 0 \\ B_Y = Y_{C_2} - Y_{C_1} \quad ; \quad B_Z = Z_{C_2} - Z_{C_1} \end{cases}$$

virá

$$\vec{R}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ -f \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{R}_2 = \begin{bmatrix} m_{11}x_2 + m_{21}y_2 - m_{31}f \\ m_{12}x_2 + m_{22}y_2 - m_{32}f \\ m_{13}x_2 + m_{23}y_2 - m_{33}f \end{bmatrix}$$

Substituindo em (5.13) teremos a seguinte equação de condição

$$F = (B_X Y_{R_1} - B_Y X_{R_1}) Z_{R_2} + (B_Z X_{R_1} - B_X Z_{R_1}) Y_{R_2} + (B_Y Z_{R_1} - B_Z Y_{R_1}) X_{R_2}$$

isto é

$$F = (B_X y_1 - B_Y x_1)(m_{13}x_2 + m_{23}y_2 - m_{33}f) + (B_Z x_1 + B_X f)(m_{12}x_2 + m_{22}y_2 - m_{32}f) - (B_Y f + B_Z y_1)(m_{11}x_2 + m_{21}y_2 - m_{31}f)$$

Para um ponto genérico  $i$  a equação anterior na forma explícita será:

$$\begin{aligned} F_i = & (B_X y_{i_1} - B_Y x_{i_1}) [x_{2i} (\sin \omega \sin k - \cos \omega \sin \phi \cos k) + y_{2i} (\sin \omega \cos k + \cos \omega \sin k) - \\ & - f (\cos \omega \cos \phi)] + \\ & + (B_X f + B_Z x_{i_1}) [x_{2i} (\cos \omega \sin k + \sin \omega \sin \phi \cos k) + y_{2i} (\cos \omega \cos k - \sin \omega \sin \phi \sin k) + \\ & + f (\sin \omega \cos \phi)] - \\ & - (B_Y f + B_Z y_{i_1}) [x_{2i} (\cos \phi \cos k) - y_{2i} (\cos \phi \sin k) - f (\sin \phi)] \end{aligned}$$

### 1. Linearização das equações de coplanaridade

A linearização<sup>6</sup> da equação anterior conduz-nos à seguinte equação geral:

$$A x + B v = t$$

onde:

<sup>6</sup> Considerando  $B_X = X_{C_2} - X_{C_1} = B_0 = 1$  fixo

$$\blacksquare \quad A = [a_{1\dots 5}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_i}{\partial \omega} & \frac{\partial F_i}{\partial \phi} & \frac{\partial F_i}{\partial k} & \frac{\partial F_i}{\partial B_Y} & \frac{\partial F_i}{\partial B_Z} \end{bmatrix} \quad ; \quad B = [b_{1\dots 4}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_i}{\partial x_1} & \frac{\partial F_i}{\partial y_1} & \frac{\partial F_i}{\partial x_2} & \frac{\partial F_i}{\partial y_2} \end{bmatrix}$$

isto é

$$a_1 = (B_X y_1 - B_Y x_1)(m_{12} x_2 + m_{22} y_2 - f m_{32}) + (B_X f + B_Z x_1)(-m_{13} x_2 - m_{23} y_2 + m_{33} f)$$

$$a_2 = (B_X y_1 - B_Y x_1)[(-\cos \omega \cos \phi \cos k) x_2 + (\cos \omega \cos \phi \sin k) y_2 + (\cos \omega \sin \phi) f] + \\ + (B_X f + B_Z x_1)[(\cos \phi \sin \omega \cos k) x_2 - (\sin \omega \cos \phi \sin k) y_2 - (\sin \omega \sin \phi) f] + \\ + (B_Y f + B_Z y_1)[(\sin \phi \cos k) x_2 - (\sin \phi \sin k) y_2 + (\cos \phi) f]$$

$$a_3 = (B_X y_1 - B_Y x_1)(m_{23} x_2 - m_{13} y_2) + (B_X f + B_Z x_1)(m_{22} x_2 - m_{12} y_2) - \\ - (B_Y f + B_Z y_1)(m_{21} x_2 - m_{11} y_2)$$

$$a_4 = -[x_1(m_{13} x_2 + m_{23} y_2 - m_{33} f) + f(m_{11} x_2 + m_{21} y_2 - m_{31} f)]$$

$$a_5 = x_1(m_{12} x_2 + m_{22} y_2 - m_{32} f) - y_1(m_{11} x_2 + m_{21} y_2 - m_{31} f)$$

$$b_1 = -B_Y(m_{13} x_2 + m_{23} y_2 - m_{33} f) + B_Z(m_{12} x_2 + m_{22} y_2 - m_{32} f)$$

$$b_2 = B_X(m_{13} x_2 + m_{23} y_2 - m_{33} f) + B_Z(m_{11} x_2 + m_{21} y_2 - m_{31} f)$$

$$b_3 = (B_X y_1 - B_Y x_1)(m_{13}) + (B_Z x_1 + B_X f)(m_{12}) - (B_Y f + B_Z y_1)(m_{11})$$

$$b_4 = (B_X y_1 - B_Y x_1)(m_{23}) + (B_Z x_1 + B_X f)(m_{22}) - (B_Y f + B_Z y_1)(m_{21})$$

$$\blacksquare \quad t = -(F_i)^0 \quad ; \quad v = (v_{x_1}, v_{y_1}, v_{x_2}, v_{y_2})^T \quad ; \quad x = (d\omega, d\phi, dk, dB_Y, dB_Z)^T$$

Se tivermos  $n$  pontos teremos

$$\begin{matrix} A & x & + & B & v & = & t \\ (n,5) & (5,1) & & (n,4n) & (4n,1) & & (n,1) \end{matrix}$$

A solução deste sistema é

$$x = (A^T M^{-1} A)^{-1} A^T M^{-1} t \quad \text{com} \quad M = B P^{-1} B^T$$

e a forma quadrática  $v^T P v$  é dada por

$$v^T P v = k^T M k \quad \text{com} \quad k = M^{-1} t - M^{-1} A x$$

Também podemos obter  $v^T P v$  em função de  $t$  e  $x$

$$v^T P v = t^T (M^{-1} - M^{-1} A N^{-1} A M^{-1}) t \quad \text{com} \quad N = A^T M^{-1} A$$

A variância à posteriori da unidade de peso é dada por:

$$\sigma_0^2 = \frac{v^T P v}{r}$$

onde:

- $r = m - u$  é o número de graus de liberdade,
- $m$  é o número de equações de condição
- $u$  é o número de parâmetros a determinar ( $u=5$ )
- $P$  é a matriz dos pesos

### 3.2. ORIENTAÇÃO ABSOLUTA

Depois de formado o modelo (i.e. orientado relativamente) é necessário transformar o seu sistema de coordenadas no sistema de coordenadas objecto (i.e. é necessário introduzir a escala e a orientação reais). Esta transformação que não é mais do que uma transformação de coordenadas tridimensional do sistema modelo  $X_1$  para o sistema objecto  $X_2$  é dada por:

$$X_2 = s M X_1 + T$$

Considerando as coordenadas objecto fixas (i.e.  $X_2$  fixo) a aplicação do método dos mínimos quadrados conduz-nos a

$$Ax - t = v$$

onde:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \omega} & \frac{\partial F_1}{\partial \phi} & \frac{\partial F_1}{\partial k} & \frac{\partial F_1}{\partial T_x} & \frac{\partial F_1}{\partial T_y} & \frac{\partial F_1}{\partial T_z} & \frac{\partial F_1}{\partial s} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \omega} & \frac{\partial F_2}{\partial \phi} & \frac{\partial F_2}{\partial k} & \frac{\partial F_2}{\partial T_x} & \frac{\partial F_2}{\partial T_y} & \frac{\partial F_2}{\partial T_z} & \frac{\partial F_2}{\partial s} \\ \frac{\partial F_3}{\partial \omega} & \frac{\partial F_3}{\partial \phi} & \frac{\partial F_3}{\partial k} & \frac{\partial F_3}{\partial T_x} & \frac{\partial F_3}{\partial T_y} & \frac{\partial F_3}{\partial T_z} & \frac{\partial F_3}{\partial s} \end{bmatrix}$$

$$x = [d\omega \quad d\phi \quad dk \quad dT_x \quad dT_y \quad dT_z \quad ds]^T$$

$$t = -(s_0 M_0 X_1 + T_0)$$

No caso de as fotografias serem aéreas, as aproximações iniciais<sup>7</sup> podem, por exemplo, ser calculadas do seguinte modo:

- $s_0$  é calculado utilizando as coordenadas de dois pontos em ambos os sistemas de coordenadas
- $\omega, \phi$  podem ser assumidos como zero,
- $T_x, T_y$  e  $T_z$  são calculados, por exemplo, utilizando as coordenadas de um ponto comum e fazendo  $M=I$ , isto é,  $T = X_2 - s_0 X_1$ ,
- $k$  pode ser calculado utilizando o valor dos ângulos que uma dada linha de controlo faz

com o eixo dos X em ambos os sistemas; isto é, fazendo  $\tan \alpha_1 = \frac{Y_1^B - Y_1^A}{X_1^B - X_1^A}$  e

$\tan \alpha_2 = \frac{Y_2^B - Y_2^A}{X_2^B - X_2^A}$ , onde  $(X_1^A, Y_1^A)$  e  $(X_2^B, Y_2^B)$  representam as coordenadas planimétricas

dos pontos A e B respectivamente, teremos  $k_0 = \alpha_2 - \alpha_1$ .

## 4. RESSECÇÃO E INTERSECÇÃO ESPACIAL

### 4.1. RESSECÇÃO

O termo ressecção espacial é o nome dado ao processo pelo qual a posição e orientação espacial de uma fotografia são determinadas, a partir das fotocoordenadas dos pontos objecto que aparecem na mesma fotografia.

<sup>7</sup> O subscripto (0) designa as aproximações iniciais

Para executarmos a ressecção espacial de uma fotografia, esta deverá conter no mínimo, as imagens de 3 pontos não colineares, dos quais se conhecem as suas coordenadas 3D. Nesta operação são determinadas as coordenadas  $(X_C, Y_C, Z_C)$  do centro de exposição e os ângulos de orientação  $\omega, \phi, k$ .

O método que a seguir apresentamos baseia-se nas equações de colinearidade. Retomando as equações (5.4)

$$\begin{cases} x = -f \frac{m_{11}(X_P - X_C) + m_{12}(Y_P - Y_C) + m_{13}(Z_P - Z_C)}{m_{31}(X_P - X_C) + m_{32}(Y_P - Y_C) + m_{33}(Z_P - Z_C)} \\ y = -f \frac{m_{21}(X_P - X_C) + m_{22}(Y_P - Y_C) + m_{23}(Z_P - Z_C)}{m_{31}(X_P - X_C) + m_{32}(Y_P - Y_C) + m_{33}(Z_P - Z_C)} \end{cases}$$

Nestas equações:  $x$  e  $y$  são as fotocoordenadas dos pontos de controlo já corrigidas dos diversos erros sistemáticos;  $f$  é a distância focal (ou distância principal);  $(X_P, Y_P, Z_P)$  são as coordenadas dos pontos de controlo (i.e pontos objecto). Todas estas quantidades são consideradas fixas e os seus valores são conhecidos à priori. Os restantes termos são as nossas incógnitas, isto é, as coordenadas do centro de exposição  $(X_C, Y_C, Z_C)$  e os elementos  $\omega, \phi, k$  da matriz de orientação  $M$ .

Seguindo o mesmo desenvolvimento da linearização das equações de colinearidade teremos:

$$\begin{cases} qx + rf = 0 \\ qy + tf = 0 \end{cases} \quad \text{isto é,} \quad \begin{cases} F_x(\omega, \phi, k, X_C, Y_C, Z_C) = 0 \\ F_y(\omega, \phi, k, X_C, Y_C, Z_C) = 0 \end{cases}$$

A linearização pela fórmula de Taylor dá

$$\begin{cases} F_x = F_x^\circ + dF_x \\ F_y = F_y^\circ + dF_y \end{cases}$$

Isto é

$$\begin{cases} F_x^\circ + \left(\frac{\partial F_x}{\partial x}\right)^\circ dx + \left(\frac{\partial F_x}{\partial \omega}\right)^\circ d\omega + \left(\frac{\partial F_x}{\partial \phi}\right)^\circ d\phi + \left(\frac{\partial F_x}{\partial k}\right)^\circ dk + \left(\frac{\partial F_x}{\partial X_C}\right)^\circ dX_C + \left(\frac{\partial F_x}{\partial Y_C}\right)^\circ dY_C + \left(\frac{\partial F_x}{\partial Z_C}\right)^\circ dZ_C = 0 \\ F_y^\circ + \left(\frac{\partial F_y}{\partial y}\right)^\circ dy + \left(\frac{\partial F_y}{\partial \omega}\right)^\circ d\omega + \left(\frac{\partial F_y}{\partial \phi}\right)^\circ d\phi + \left(\frac{\partial F_y}{\partial k}\right)^\circ dk + \left(\frac{\partial F_y}{\partial X_C}\right)^\circ dX_C + \left(\frac{\partial F_y}{\partial Y_C}\right)^\circ dY_C + \left(\frac{\partial F_y}{\partial Z_C}\right)^\circ dZ_C = 0 \end{cases}$$

E, portanto, tendo em conta as considerações anteriores

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} & b_{16} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} & b_{26} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\omega \\ d\phi \\ dk \\ dX_C \\ dY_C \\ dZ_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \end{bmatrix}$$

ou seja

$$v + B\dot{d} = \varepsilon$$

Os valores iniciais para os parâmetros  $\omega$ ,  $\phi$ ,  $k$ ,  $X_C$ ,  $Y_C$ ,  $Z_C$  podem ser determinados do seguinte modo:

- $Z_C$  é obtido no altímetro (no caso da fotografia aérea),
- $X_C$ ,  $Y_C$  são obtidos através da média das coordenadas  $X$  e  $Y$  dos pontos de controlo,
- $\omega_0$ ,  $\phi_0$  são assumidos como zero (no caso da fotografia aérea),
- $k$  é o ângulo, medido no sentido anti-horário, entre o eixo  $X$  objecto e o eixo  $x$  fotográfico. Se a linha de voo tiver a direcção E ou W,  $k=0^\circ$  ou  $k=180^\circ$ , respectivamente. Se tiver a direcção N ou S,  $k=90^\circ$  ou  $k=270^\circ$ , respectivamente. No entanto, um valor inicial pode ser calculado a partir do ângulo que uma dada recta de controlo faz com o eixo  $X$  objecto e do ângulo que essa mesma recta faz com o eixo  $x$  fotográfico. Assim tendo em conta a figura 5.3 vem

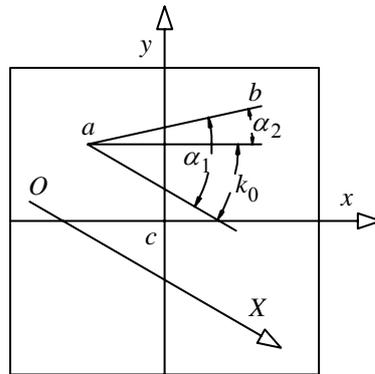


Figura 5.3. Determinação de  $k_0$

$$\tan \alpha_1 = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} \quad \text{e} \quad \tan \alpha_2 = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Portanto,

$$k_0 = \alpha_2 - \alpha_1$$

## 4.2. INTERSECÇÃO

O termo intersecção é o nome dado ao processo pelo qual as coordenadas dos pontos imagem são determinadas, a partir das fotocoordenadas desses mesmos pontos mediadas em duas ou mais fotografias.

Assim, dados os elementos de orientação de duas fotografias, as quais formam um estereomodelo, é possível calcular as coordenadas objecto dos pontos imagem a partir das fotocoordenadas desses pontos.

Considerando a figura 5.4 na qual conhecemos as coordenadas de  $C_1$  e as matrizes  $M_1$  e  $M_2$ .

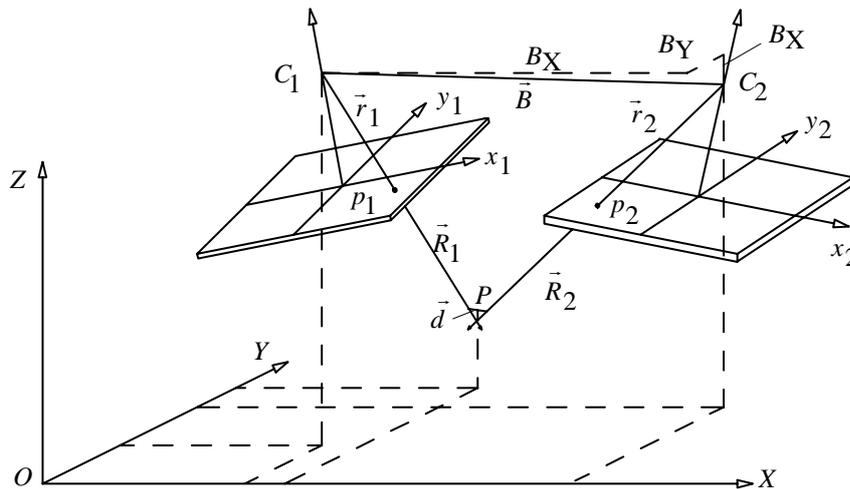


Figura 5.4. Intersecção

Geralmente, os dois raios correspondentes ao par de imagens conjugadas não se intersectam no espaço em virtude da presença de pequenos mas inevitáveis erros. Um procedimento prático consiste em escolher para ponto modelo o ponto médio do vector distância mínima  $\vec{d}$  entre os dois raios. Como o vector  $\vec{d}$  é perpendicular aos dois raios então:

$$\vec{d} = \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 \quad \text{com} \quad d = (dx, dy, dz)^T$$

Isto é:

$$\vec{d} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{vmatrix} = (v_1 w_2 - v_2 w_1) \vec{i} + (u_2 w_1 - u_1 w_2) \vec{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1) \vec{k}$$

onde  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  os vectores unitários nas direcções  $X, Y, Z$  respectivamente, e

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{bmatrix} = M_1^T \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ -f \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{bmatrix} = M_2^T \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ -f \end{bmatrix}$$

Depois de termos determinado as componentes do vector  $\vec{d}$ , vamos calcular os escalares  $\lambda_1, \lambda_2$  e  $k$  que verificam a condição:

$$\vec{B} = \lambda_1 \vec{r}_1 + k \vec{d} - \lambda_2 \vec{r}_2$$

Na forma matricial, virá:

$$\begin{bmatrix} B_X \\ B_Y \\ B_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{C_2} - X_{C_1} \\ Y_{C_2} - Y_{C_1} \\ Z_{C_2} - Z_{C_1} \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} - \lambda_2 \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

Isto é

$$\begin{bmatrix} u_1 & dx & -u_2 \\ v_1 & dy & -v_2 \\ w_1 & dz & -w_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ k \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_X \\ B_Y \\ B_Z \end{bmatrix}$$

Finalmente as coordenadas de  $P$  serão dadas por:

$$P = C_1 + \lambda_1 \vec{r}_1 + \frac{1}{2} k \vec{d}$$

ou seja

$$\begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{C_1} \\ Y_{C_1} \\ Z_{C_1} \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} k \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}$$

A intersecção espacial executada através do procedimento anterior constitui apenas uma aproximação, visto que se selecciona, arbitrariamente, um ponto do vector  $\vec{d}$ . No entanto, na prática esta aproximação é perfeitamente aceitável para a maioria dos projectos fotogramétricos.

Uma indicação da amplitude do erro de intersecção dos dois raios conjugados é dada através da norma do vector  $\vec{d}$ , isto é:

$$\|\vec{d}\| = p_r = k \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

A este valor dá-se o nome de paralaxe residual.

A intersecção espacial pode ser realizada de forma rigorosa aplicando o método dos mínimos quadrados às equações de colinearidade. Desta forma podemos calcular a intersecção de  $n$  raios conjugados provenientes de  $n$  fotos dos quais se conhecem os seus elementos de orientação. A dedução destas equações é análoga ao caso anterior. De facto, as equações de colinearidade são agora:

$$\begin{cases} qx + rf = 0 \\ qy + tf = 0 \end{cases} \quad \text{isto é,} \quad \begin{cases} F_x(X_P, Y_P, Z_P) = 0 \\ F_y(X_P, Y_P, Z_P) = 0 \end{cases}$$

A linearização pela fórmula de Taylor dá:

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{17} & b_{18} & b_{19} \\ b_{27} & b_{28} & b_{29} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \end{bmatrix}$$

isto é

$$v + \ddot{B} \ddot{d} = \varepsilon$$

No caso de termos a intersecção de  $n$  raios (provenientes de  $n$  fotos) virá:

$$\underset{(2n,1)}{v} + \underset{(2n,3)}{B} \underset{(3,1)}{d} = \underset{(2n,1)}{\varepsilon}$$

## Capítulo 6

# Redução de Coordenadas Fotográficas

---

As coordenadas fotográficas medidas não estão isentas de erros. Existe um certo número de erros sistemáticos, provenientes de diversas fontes cujo efeito é preciso eliminar ou pelo menos atenuar, uma vez que a sua eliminação é bastante difícil, senão impossível.

Contudo, estas correções só serão aplicadas se a precisão do trabalho assim o exigir. Por isso, é necessário efectuar um estudo do efeito das correções, afim de se desprezarem aquelas que não introduzem alterações significativas ao resultado final.

Os erros sistemáticos existentes são:

1. Eixos fiduciais não se intersectam no ponto principal,
2. Expansão ou contração (i.e. deformação) do material fotográfico,
3. Distorções das lentes,
4. Distorções devidas à refacção atmosférica,
5. Distorções devidas à curvatura terrestre,
6. Distorções devidas ao deslocamento da imagem.

As correções são aplicadas tendo em vista a eliminação do efeito destes erros.

### 6.1. REDUÇÃO AO PONTO PRINCIPAL

Geralmente, o ponto principal não coincide com a intersecção das linhas fiduciais. No entanto, é conveniente reduzir as coordenadas medidas num sistema de eixos fiduciais, em coordenadas relativas a um sistema cuja origem seja o ponto principal.

Consideremos a figura 6.1 onde  $x'$  e  $y'$  representam os eixos do novo sistema com origem no ponto principal e sejam  $x_c$  e  $y_c$  as suas coordenadas relativas ao sistema de eixos fiduciais, obtidas na calibração da camara.

Para qualquer ponto imagem  $a$ , a redução do eixo principal para o ponto principal é:

$$\begin{cases} x'_a = x_a - x_c \\ y'_a = y_a - y_c \end{cases} \quad (6.1)$$

Se a camara estiver bem calibrada, o ponto principal coincide com a intersecção das linhas fiduciais, não sendo necessário, portanto, esta correcção.

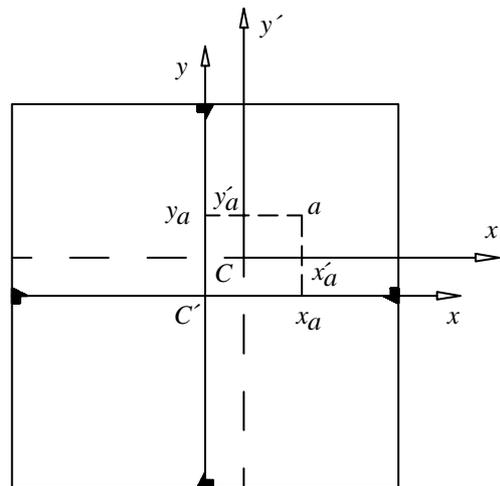


Figura 6.1: Redução das coordenadas ao ponto principal

## 6.2. DEFORMAÇÃO DO FILME

As fotocoordenadas medidas contêm pequenos erros devidos à contracção ou expansão do material fotográfico que suporta a emulsão do negativo e positivo. Antes de serem utilizadas em qualquer cálculo fotogramétrico, deverão ser corrigidas destes erros, dado que podem ter efeito no resultado final. A grandeza do erro final dependerá da magnitude do erro de expansão ou contracção que, por sua vez, depende do tipo de material utilizado.

Uma grande variedade de materiais é usada na elaboração de positivos fotográficos. Entre eles podemos destacar o vidro e o papel. O primeiro possui uma grande estabilidade dimensional pelo que se pode considerar isento de deformações. Pelo contrário o papel apresenta uma grande instabilidade dimensional, facto este que o exclui de qualquer trabalho fotogramétrico preciso.

A quantidade de expansão ou contracção presente numa fotografia pode ser determinada comparando as distâncias fotográficas medidas, entre marcas fiduciais opostas, com os seus valores correspondentes, determinados na altura da calibração da camara. Estas distorções podem classificar-se em três categorias:

1. Distorções uniformes - quando as distorções são constantes para qualquer direcção. Considera-se apenas um factor escala  $s_1$

$$\begin{cases} x' = s_1 x \\ y' = s_1 y \end{cases} \quad (6.2)$$

2. Distorções diferenciais - muitas vezes podemos observar uma distorção sistemática na direcção longitudinal do filme e uma outra distorção sistemática diferente na direcção transversal do filme, produzindo as duas uma deformação afim da fotografia. Este problema pode ser ultrapassado através de uma transformação afim das fotocoordenadas.

3. Distorções irregulares - podem ser devidas a várias causas, por exemplo: propriedades elásticas do material, falta de planaridade da superfícies da emulsão, etc. Estes erros podem ser complexos e não seguem uma distribuição linear. O efeito destes erros pode ser minimizado utilizando as seguintes equações:

$$\begin{cases} x' = x + a_1 + b_1 x + c_1 y + d_1 xy \\ y' = y + a_2 + b_2 x + c_2 y + d_2 xy \end{cases} \quad (6.3)$$

Os parâmetros  $a_i, b_i, c_i, d_i$  podem corrigir vários factores ao mesmo tempo: estabelecer uma translacção ( $a_1, a_2$ ), originar uma rotação e uma transformação afim ( $b_1, b_2, c_1, c_2$ ) e por último estabelecer uma correcção quadrática ou curvilínea ( $d_1, d_2$ ) da distorção do filme (i.e. da base da emulsão).

### 6.3. DISTORÇÃO DAS LENTES

O relatório de calibração da camara contem valores tabelados da distorção da lente ( $\Delta r$ ) como função da distância radial ( $r$ ) de qualquer ponto ao ponto principal, a qual é dada por

$$r^2 = x^2 + y^2$$

onde  $x$  e  $y$  são as fotocoordenadas de um ponto imagem qualquer.

Se  $r$  é a distância radial observada e  $\Delta r$  a distorção correspondente, obtida por leitura numa curva ou por interpolação numa tabela, o valor correcto da distância radial é:

$$r' = r - \Delta r$$

As coordenadas fotográficas ( $x', y'$ ) são então:

$$\begin{cases} x' = \left(\frac{r'}{r}\right)x \\ y' = \left(\frac{r'}{r}\right)y \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} x' = \left(1 - \frac{\Delta r}{r}\right)x \\ y' = \left(1 - \frac{\Delta r}{r}\right)y \end{cases} \quad (6.4)$$

Um método alternativo é o polinomial que consiste numa aproximação da curva de distorção por um polinómio do tipo:

$$\Delta r = k_0 r + k_1 r^3 + k_2 r^5 + k_3 r^7 \quad (6.5)$$

Os coeficientes  $k$ , que definem a forma da curva, são obtidos através de um ajustamento pelo método dos mínimos quadrados, em que se utiliza a equação (6.5) com os valores de  $r$  e  $\Delta r$ , conhecidos da calibração da camara. Depois de determinados os  $k$ 's, a distorção radial  $\Delta r$  é determinada para qualquer valor de  $r$  aplicando de novo a equação (6.5) tendo agora como incógnita a variável  $\Delta r$ .

Utilizando este método polinomial, as coordenadas corrigidas serão:

$$\begin{cases} x' = (1 - k_0 - k_1 r^2 - k_2 r^4 - k_3 r^6)x \\ y' = (1 - k_0 - k_1 r^2 - k_2 r^4 - k_3 r^6)y \end{cases} \quad (6.6)$$

Note-se que em todos os métodos expostos neste parágrafo, considerou-se que a distorção radial das lentes é simetrica em relação ao ponto principal.

### 6.4. REFRACÇÃO ATMOSFÉRICA

Teoricamente, um raio de luz que atravesse a atmosfera deverá seguir uma linha recta. Mas na realidade, ele é desviado e descreve uma curva, devido à diminuição da densidade atmosférica com o aumento da altitude.

O efeito da refração é deslocar todos os pontos da imagem, radialmente, a partir do ponto nadiral fotográfico (ponto principal de uma fotografia vertical) em direcção ao exterior, sendo, a distorção nula nesse ponto.

Na figura 6.2, se o raio de luz que vem do ponto objecto *A* seguir uma linha recta, a sua imagem deverá aparecer em *a'* e não em *a* como acontece. A distorção angular devida à refração é  $\theta$  e a distorção linear na fotografia é *dr*.

A grandeza da distorção aumenta com a altitude de vôo e com o ângulo  $\alpha$  entre a vertical e o raio de luz. Da figura 6.2 vem

$$\overline{Ca} = \frac{f}{\cos \alpha} \quad \text{e} \quad dr = \frac{\overline{Ca} \theta}{\cos \alpha} \quad (\theta \text{ pequeno})$$

Isto é

$$dr = \frac{f \theta}{\cos^2 \alpha}$$

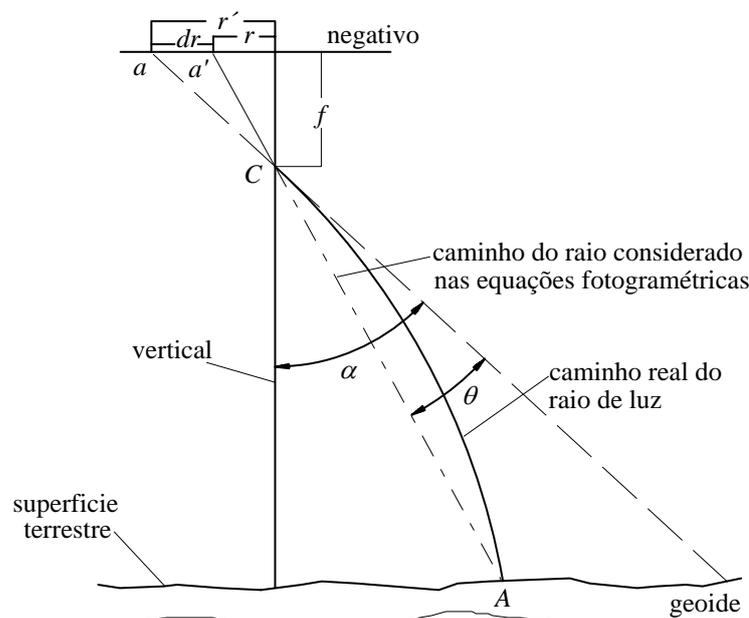


Figura 6.2: Refracção atmosférica fotogramétrica

Para corrigir um dado ponto imagem da distorção devida à refração atmosférica, calcula-se, primeiro ângulo  $\alpha$ , a partir das fotocoordenadas medidas e da distância focal da câmara

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{r}{f} \quad \text{com} \quad r^2 = x^2 + y^2$$

Em seguida, é calculada a distorção angular  $\theta$  considerando uma atmosfera padrão, para uma certa altitude de vôo, elevação média do solo e ângulo  $\alpha$ . As fórmulas adoptadas por vários autores para o cálculo de  $\theta$  podem reduzir-se à forma:

$$\theta = k \tan \alpha$$

na qual todas as variáveis, excepto  $\alpha$ , são consideradas constantes para uma dada fotografia e estão implícitas no factor  $k$ .

Bertram, em 1965, apresentou uma fórmula para calcular  $k$ , baseada na atmosfera modelo ARDC 1959:

$$k = \left[ \frac{2410 \times H}{H^2 - 6H + 250} - \frac{2410 \times h}{h^2 - 6h + 250} \frac{h}{H} \right] \times 10^{-6}$$

na qual,  $H$  é a altitude de vôo (em kilometros) acima do nível médio das águas do mar e  $h$  é a elevação média do solo (tambem em kilometros).

Finalmente, as coordenadas fotográficas correctas  $x'$  e  $y'$  são dadas por:

$$\begin{cases} x' = (1 - \frac{dr}{r})x \\ y' = (1 - \frac{dr}{r})y \end{cases} \quad (6.7)$$

### 6.5. CURVATURA TERRESTRE

Esta correcção é aplicada quando se pretendem determinar as posições de pontos no espaço objecto num sistema de coordenadas plano.

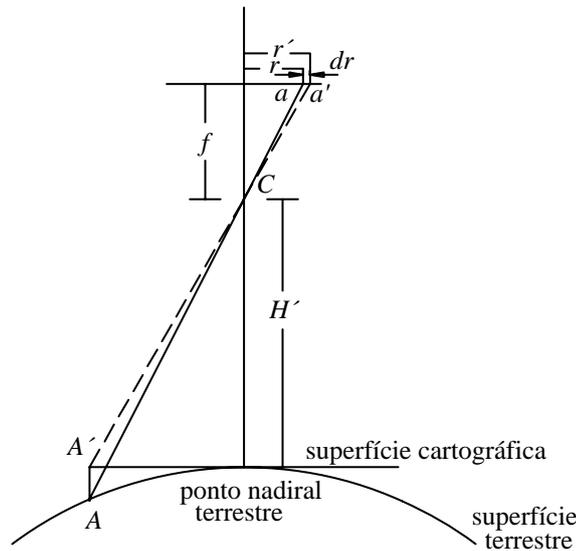


Figura 6.3: Curvatura Terrestre

Na figura 6.3,  $A$  é um ponto do terreno e  $A'$  é a sua posição num mapa plano tangente à superfície da Terra no ponto nadiral terrestre (o ponto do solo situado na vertical que passa pelo estação de exposição).

A equação para calcular a distorção devida à curvatura terrestre ( $dr$ ) é

$$dr = \frac{H'r^3}{2Rf^2}$$

Nesta equação:  $H'$  é a altitude de vôo acima do solo,  $r$  é a distância radial do ponto principal ao ponto imagem  $a$ ,  $R$  é o raio de curvatura terrestre e  $f$  é adistância focal da camara.

A distância radial correcta  $r'$ , para um ponto imagem é

$$r' = r + dr$$

E, portanto, as coordenadas fotográficas correctas são dadas por:

$$\begin{cases} x' = (1 - \frac{dr}{r})x \\ y' = (1 - \frac{dr}{r})y \end{cases} \quad (6.8)$$

### 6.6. DESLOCAMENTO DA IMAGEM

As várias espécies de deslocamentos da imagem, são as principais causas de degradação da qualidade das fotografias aéreas. O deslocamento, a rotação e a vibração da aeronave durante o momento de exposição podem causar uma falta de nitidez na imagem, o que por sua vez pode resultar na degradação da resolução e deslocamento do ponto imagem. Assim, as camaras são projectadas de forma a incluírem um dispositivo de compensação do deslocamento da imagem, o qual provoca um deslocamento do filme durante a exposição.

Existem, basicamente, 3 métodos de compensação do deslocamento da imagem:

1. através do movimento (simultâneo) do filme,
2. através do movimento do cone de lentes,
3. utilizando um obturador no plano focal.

De modo geral, combina-se o terceiro método com um dos dois primeiros. De facto, enquanto que o primeiro e o segundo método provocam uma distorção da geometria interior da camara, o terceiro cria uma situação semelhante à camara fotográfica de faixa continua, isto é representa um número infinito de fotografias relativamente a um centro de perspectiva em contínuo movimento.

No entanto no uso normal das fotografias aéreas verticais para cartografia a escalas pequenas e grandes, a utilização do dispositivo de compensação do deslocamento da imagem pode não ser necessário. No caso especial de trabalhos de grande precisão, podemos considerar o deslocamento da imagem de duas espécies:

1. devido a deslocamentos lineares,
2. devido a deslocamentos rotacionais.

Neste curso estudaremos, apenas, os deslocamentos lineares da imagem. Considerando que a aeronave voa a uma altitude e velocidades constantes e admitindo que não existem rotações da camara a velocidade do filme é dada por:

$$v_F = \frac{fv}{H}$$

A velocidade da imagem é:

$$v_i = \frac{fv}{H-h}$$

Nestas expressões:  $f$  é a distância focal,  $H$  é a altura de vôo acima do datum,  $h$  é a cota do terreno acima do datum e  $v$  é a velocidade da aeronave.

A velocidade relativa é:

$$\Delta v = f v \frac{h}{(H-h)H} \quad (6.9)$$

Se o tempo de exposição for  $t_e$  então a mancha do ponto imagem na direcção do deslocamento é dada por:

$$dr = \Delta v t_e$$

# Capítulo 7

## Triangulação Fotogramétrica

---

### 1. INTRODUÇÃO



# Capítulo 8

## Planeamento e Execução de Projectos

### Fotogramétricos

---

#### 1ª Parte: Fotogrametria Aérea

##### 1. INTRODUÇÃO

O planeamento de um projecto aerofotogramétrico consiste, essencialmente, em três fases:

- cálculo do plano de voo a ser utilizado posteriormente na tomada de exposições,
- planeamento, inspecção e reconhecimento de campo necessários a satisfazer com precisão as necessidades exigidas para o projecto,
- estimativa dos custos envolvidos no projecto.

O plano de voo e o respectivo reconhecimento de campo são duas operações sucessivas, pois os vários parâmetros do projecto tais como: a escala da foto, a escala do mapa, a precisão pretendida e o tipo de instrumentos a serem utilizados são especificados previamente pelo autor do projecto. No entanto, a estimativa de custos do projecto envolve uma avaliação algo subjectiva, por parte do estimador, e baseia-se essencialmente na experiência adquirida na execução de projectos anteriores.

##### 2. PLANEAMENTO DE VOO

Os elementos básicos de um plano de voo são

- a altura de voo acima de uma determinada superfície de referência, normalmente o nível médio das águas do mar,
- a distância entre duas exposições sucessivas e o espaçamento no terreno entre as linhas de voo.

Depois de determinados estes elementos (baseados em factores que estudaremos neste capítulo), as linhas de voo são cuidadosamente projectadas no melhor mapa disponível da área a ser fotografada. A carta torna-se então numa carta de linhas de voo ou mapa de voo.

No planeamento de um mapa de voo deve-se ter em conta os seguintes factores:

- finalidade da fotografia,
- escala da fotografia,
- variação de escala admissível,
- deslocamento do relevo,
- inclinação (tilt) e deriva fotográfica,

- altura de voo,
- direcção ou orientação da fotografia.

Alguns destes factores estão muito interligados (ver tabela 7.1). Por exemplo, se a escala fotográfica desejada for conhecida e se for seleccionada uma câmara com uma dada distância focal, a altura de voo é dada por:

$$S = \frac{f}{H_0 - h_m}$$

onde:  $S$  é a escala da fotografia,  $f$  é a distância focal,  $H_0$  é a altura de voo relativamente à superfície de referência e  $h_m$  é a cota média do terreno.

### 3. FINALIDADE DA FOTOGRAFIA

A maior parte das actividades fotogramétricas envolvem a compilação de cartas topográficas em instrumentos de estereo-restituição. Se pretendermos produzir cartografia através de fotografias com uma relação base/altura ( $B/H$ ) que garanta a suficiente precisão vertical, então temos de usar uma câmara com uma grande-angular ( $f = 152 \text{ mm}$ ). Se a topografia da região for bastante plana então podemos utilizar uma supergrande-angular ( $f = 88 \text{ mm}$ ). Se a área for coberta por floresta, então para permitir ao operador a melhor visualização possível da zona abaixo das copas das arvores devemos utilizar antes uma angular normal ( $f = 210 \text{ mm}$ ) que uma grande-angular. Normalmente, 60% da sobreposição longitudinal e 15 a 30% de sobreposição lateral é bastante satisfatório para a produção de cartas topográficas, pois oferece uma cobertura estereoscópica completa e permite uma sobreposição lateral suficientemente boa na prevenção de falhas (espaços vazios) entre fotografias sucessivas ou adjacentes. A orientação das linhas de voo é estabelecida tendo em conta mais os aspectos económicos que as considerações geométricas.

A fotografia utilizada em mosaicos aéreos deverá, teoricamente, ser feita à altura máxima possível e deverá conter uma sobreposição proporcional à topografia da região. Se o terreno for relativamente plano então é suficiente 60% de sobreposição longitudinal e 15 a 30% de sobreposição lateral. No entanto, se o terreno for relativamente acidentado é necessário aumentar ambas as sobreposições. O objectivo principal consiste em minimizar os efeitos do deslocamento do relevo.

As fotografias tiradas para a produção de ortofotos podem também ser utilizadas na produção de cartografia. A orientação mais favorável das linhas de voo é aquela que torna o rastreamento do ortofoto perpendicular à tendência geral da topografia da região (isto no caso de o aparelho de ortofotografia operar sob o princípio do elemento da linha fixa). Contudo, isto pode não corresponder ao plano de voo mais económico. Se o objectivo é a construção de um ortomosaico com os ortofotos, as fotografias devem ser tiradas com um ângulo de exposição solar constante e na mesma época do ano. Caso contrário, as variações de tom e textura entre os diferentes ortofotos serão bastante pronunciadas e censuráveis.

Se o projecto de cartografia for apoiado por aerotriangulação o plano de voo é regido por questões de índole topográfica. No entanto, para assegurar a precisão da aerotriangulação em bloco, as linhas de voo podem ser dispostas de modo a formarem 60% de cobertura em ambas as direcções. Na figura 7.1 qualquer ponto de ligação situado na área sombreada irá aparecer em 9 fotografias o que fornecerá, por sua vez, 9 pares de equações de colinearidade.

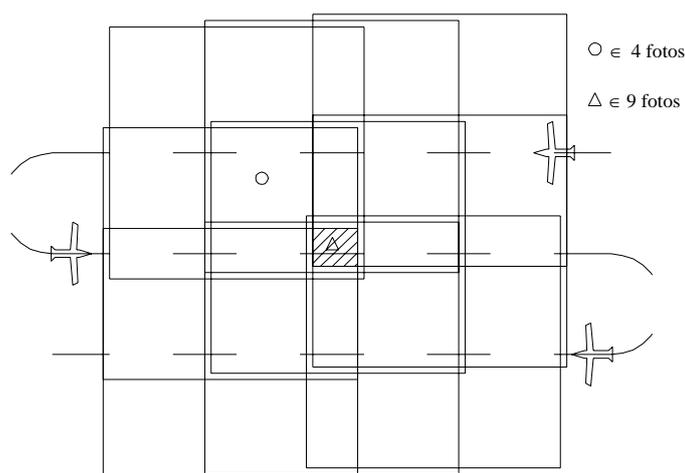


Figura 7.1. Sobreposição lateral e longitudinal

Uma vez que a sobreposição de 60% em ambas as direcções permite uma aerotriangulação em bloco bastante coesa esta é também na determinação de pontos de controlo para levantamentos cadastrais e no estabelecimento do apoio topográfico. Note-se que cada ponto interno do bloco irá aparecer, no mínimo, em 4 fotografias.

#### 4. ESCALA FOTOGRÁFICA

Se a fotografia for utilizada na construção de mosaicos ou em interpretação genérica, a escala da fotografia é normalmente especificada pelo utilizador de forma a que este possa assegurar a identificação dos mínimos pormenores. É claro que isto varia com o tipo de projecto e depende em parte da experiência adquirida.

No entanto, a escala fotográfica necessária à compilação de cartas topográficas depende do tipo de estereorestituidor a ser utilizado. A tabela 7.1 indica as relações existentes entre a escala fotográfica e a escala topográfica para o caso standard das fotografias (23×23cm) tiradas com uma grande angular ( $f = 150 \text{ mm}$ ) e com uma sobreposição de 60%.

Escala Fotográfica	Altura de Voo (m)	Escala da Carta Topograf.	Factor de Ampliação	Equidistância Curvas Nível (m)
1:3 000	450	1:500	6 ×	0.5
1:5 000	750	1:1 000	5 ×	1
1:10 000	1 500	1:2 500	4 ×	2
1:25 000	3 750	1:10 000	2.5 ×	5
1:50 000	7 500	1:50 000	1 ×	10
1:80 000	12 000	1:100 000	0.8 ×	20

Tabela 7.1. Relações entre escala fotográfica e escala da carta topográfica

#### 5. VARIAÇÃO DE ESCALA ADMISSÍVEL

A variação de escala numa fotografia, ou entre fotografias é devida quer à variação de cotas do terreno, quer à variação da altura de voo, quer a ambas. Por exemplo, a figura 7.2.a) e b) mostra duas fotografias tiradas num terreno com cota média de 120m acima da superfície de referência e com cotas a variar desde os 50m até aos 180m. Em qualquer caso, a escala média que se pretende obter é 1:2500. Se utilizarmos uma lente com distância focal  $f = 152 \text{ mm}$  a altura de voo será:

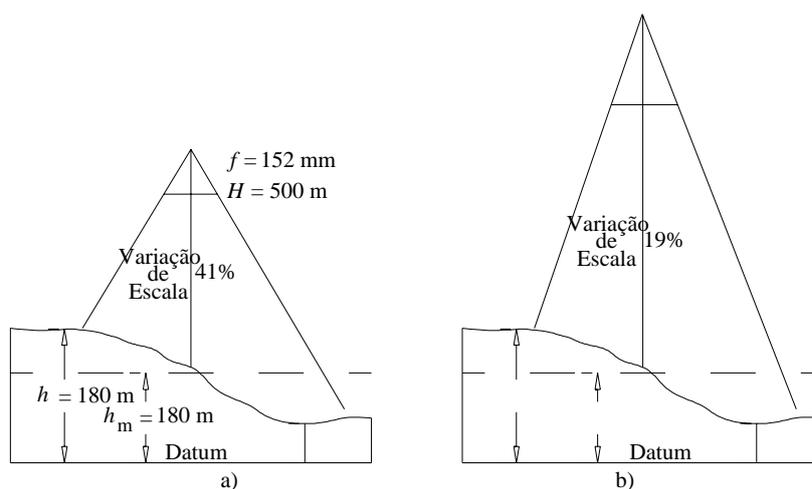


Figura 7.2. Variação de escala

$$S = \frac{f}{H} = 380 \text{ mm}$$

Isto é,  $H_0 = 380 + 120 = 500$  m acima da superfície de referência.

Assim, a escala da fotografia à cota 50 será

$$S_{50} = \frac{f}{H_0 - h} = \frac{0.152}{500 - 50} = \frac{1}{2960}$$

e a escala à cota 180 será

$$S_{180} = \frac{0.152}{500 - 180} = \frac{1}{2105}$$

A variação da escala é

$$\Delta S = \frac{2960 - 2105}{2105} = 0.406 = 41\%$$

No entanto, se utilizarmos uma lente com uma distância focal de 305 mm a variação de escala é reduzida para 19%.

A variação de escala afecta também a cobertura fotográfica, isto deve-se à subida ou descida do terreno relativamente à altura de voo e é um factor importante a considerar quando se tiram fotografias para fins cartográficos a baixa altitude. Na figura 7.3 a altura de voo é constante e a cota do terreno cresce continuamente da esquerda para a direita. Neste caso podem observar-se dois efeitos:

1. Se as fotografias forem tiradas em intervalos de tempo constantes a cobertura entre fotografias sucessivas diminui continuamente da esquerda para a direita,
2. A largura do terreno coberto pelas fotografias diminui à medida que aumenta a cota do terreno.

O primeiro efeito pode ser corrigido utilizando antes a ocular da câmara que o intervalómetro, de forma a obter uma sobreposição apropriada. O segundo efeito deverá ser considerado quando se estabelecer o espaçamento entre as linhas de voo, o qual corresponderá à sobreposição mínima admissível para as cotas máxima do terreno. Caso contrário, nas partes mais altas do terreno poderão ocorrer espaços vazios (falhas) entre as fiadas do voo.

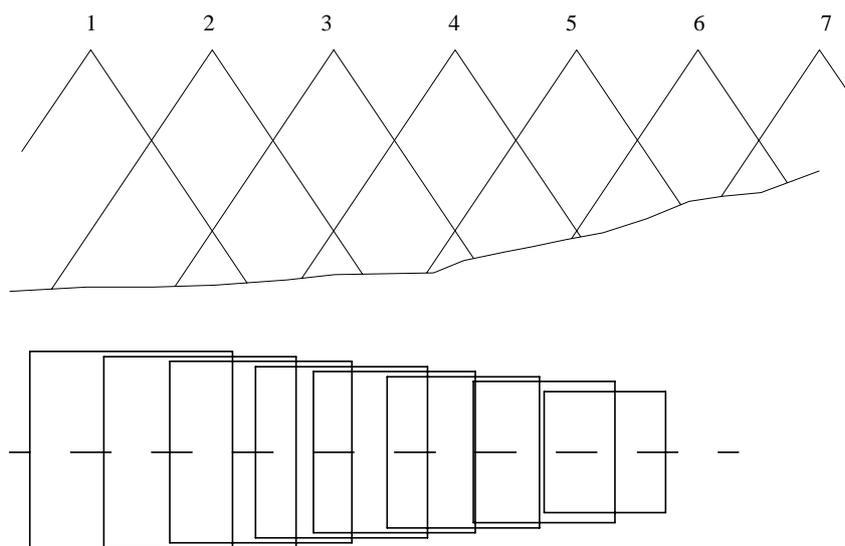


Figura 7.3. Efeito das cotas na escala fotográfica

## 6. DESLOCAMENTO DO RELEVO

Já vimos que a finalidade da fotografia é um dos factores que influenciam o planeamento de voo. Também foi referido o facto de que o deslocamento do relevo afecta a construção de mosaicos. Dado que a construção de um mosaico consiste na junção de fotografias adjacentes de modo a formarem uma imagem composta, deslocamentos de relevo excessivos, em fotografias sucessivas, tornam ou mesmo impossibilitam a formação de uma imagem contínua e ininterrupta. Os deslocamentos de relevo em qualquer par de fotografias adjacentes ocorrem sempre em direcções opostas, pois este tipo de deslocamento irradia sempre, em cada fotografia, para um ponto próximo do centro.

A equação  $dr = \frac{rh}{H}$  mostra que o deslocamento do relevo diminui à medida que aumenta a altura de voo. É também evidente que para manter uma determinada escala, à medida que se aumenta a altura de voo deve aumentar-se a distância focal. Assim, quando se projectar o plano de voo devemos ter em conta estas considerações.

Em geral o deslocamento do relevo não tem efeitos secundários na compilação de mapas topográficos em instrumentos de estereo-restituição. De facto, à medida que o efeito do relevo se torna mais pronunciado, mais facilmente se medem as cotas no instrumento.

## 7. TILT E DERIVA FOTOGRÁFICA

O tilt de uma fotografia pode ser decomposto em duas componentes. Uma segundo a direcção da linha de voo e a outra segundo uma direcção normal à linha de voo. A primeira é denominada de tilt-y ou ângulo  $\phi$  e a segunda de tilt-x ou ângulo  $\omega$ .

Quando uma fotografia for sujeita a um tilt-y a sobreposição longitudinal de um dos lados será maior do que o valor pretendido e a sobreposição no lado oposto será menor do que esse valor. Duas exposições fotográficas sucessivas com tilt-y opostos provocam um aumento ou uma diminuição da sobreposição; com tilt-y na mesma direcção, esse aumento ou diminuição será em grande medida cancelado.

O tilt-x numa fotografia provoca, num dos lados da linha de voo, um aumento da sobreposição lateral e no lado oposto uma diminuição da sobreposição.

O efeito do tilt-y pode ser corrigido utilizando a ocular da câmara no controlo do valor da sobreposição. Se por intermédio de um intervalómetro fixarmos um intervalo de tempo entre as exposições, o efeito do tilt-y na sobreposição deverá ser considerado, diminuindo sensivelmente o intervalo de exposição de forma a produzir um ligeiro aumento da sobreposição teórica pretendida.

O efeito do tilt-x na sobreposição lateral pode ser corrigido pela diminuição do espaço entre as linhas de voo de forma a produzir um ligeiro aumento na sobreposição lateral pretendida. Este ajustamento ajuda, por um lado, a garantir a correcta cobertura e, por outro, a prevenir alguns deslocamentos de relevo anormais.

A deriva é o termo dado ao ângulo formado pela linha de voo e pelas margens da fotografia, na direcção da linha de voo. É devido ao facto de o plano focal não estar alinhado no momento da exposição, com a direcção da linha de voo.

Em condições normais de voo a câmara pode ser corrigida do efeito da deriva pela rotação desta, de um determinado ângulo, em torno do seu eixo vertical. A deriva tem como consequência a redução da largura efectiva da cobertura fotográfica. Felizmente que a sobreposição lateral permite, em alguns casos, prevenir as falhas entre as fiadas do voo causadas pela deriva.

## 8. SELECÇÃO DA ALTURA DE VOO

Depois de se estabelecerem os valores das sobreposições longitudinais e laterais a serem utilizados nas fotos, o elemento final necessário ao cálculo do plano de voo é a altura de voo a partir da qual se vão realizar as exposições. Alguns dos factores que afectam directamente a selecção da altura de voo, tais como a escala desejada o deslocamento do relevo e o tilt foram já estudados anteriormente. Outros factores a considerar são a precisão do equipamento fotogramétrico utilizado na produção de cartografia a partir das fotografias, limitações físicas do instrumento de estereo-restituição e alguns problemas inerentes à própria cartografia de escalas grandes (>1:10 000).

Os vários tipos de instrumentos fotogramétricos utilizados no processo de compilação de mapas topográficos têm uma precisão que é inerente a cada tipo de instrumento e a qual difere de instrumento para instrumento. Em geral, quanto maior for a precisão do sistema maior poderá ser a altura de voo. Esta relação é muito vantajosa, pois ao duplicarmos a altura de voo aumentamos em quatro vezes a cobertura do terreno e reduzimos consideravelmente o necessário apoio topográfico (pontos de controlo). Uma vez que a precisão vertical num mapa topográfico é um dos factores limitadores no processo fotogramétrico, a altura de voo é muitas vezes relacionada com a equidistância das curvas de nível. A relação é expressa como um factor de precisão e é designada como sendo o factor-C do equipamento fotogramétrico (incluindo o operador). Portanto<sup>8</sup>

$$\text{Factor - C} = \frac{\text{Altura de voo}}{\text{Equidistancia das curvas de nivel}}$$

O factor-C é entendido como o valor que é utilizado para calcular a altura de voo, a qual permite realizar fotografias necessárias à obtenção duma dada precisão vertical no mapa topográfico.

O factor-C só poderá ser atribuído a um sistema fotogramétrico depois de este ter produzido um número suficiente de cartas topográficas que permitam uma análise da precisão vertical obtida. Nos actuais sistemas fotogramétricos o factor-C toma valores

<sup>8</sup> Nota- nesta relação a altura de voo é medida relativamente ao terreno.

entre os 750 e 2500. É claro que o valor deste factor depende das condições que englobam a compilação completa da carta topográfica.

## 9. CÁLCULO DO PLANO DE VOO

Os dados necessários ao cálculo das quantidades que permitem delinear o mapa das linhas de voo, determinar o intervalo de tempo entre as sucessivas exposições fotográficas (se for utilizado um intervalómetro) e determinar a quantidade de filme necessário à sessão fotográfica são:

- a distância focal das lentes da câmara,
- altura de voo acima da superfície de referência (normalmente o nível médio das águas do mar),
- formato das fotografias,
- área da zona a fotografar. Se a região tiver um perfil irregular o seu perfil deve ser considerado ao determinar a melhor direcção para as linhas de voo,
- posição das outras linhas de voo relativamente ao limite da região,
- sobreposição longitudinal,
- sobreposição lateral,
- escala do mapa de voo,
- velocidade do avião em relação ao solo (se for utilizado um intervalómetro)

O método de cálculo do plano de voo é ilustrado nos três exemplos seguintes.

**Exemplo 1.** Uma área com 24 km de comprimento na direcção Norte-Sul e com 13.6 km de largura na direcção Este-Oeste vai ser fotografada com uma câmara de distância focal  $f = 305$  mm. O formato das fotografias é  $23 \times 23$  cm. A escala média efectiva é 1:12 000 para uma cota média de 210 m acima do nível médio das águas do mar. As sobreposições longitudinal e lateral serão, no mínimo, 60% e 35% respectivamente. Para controlar o intervalo de tempo entre as exposições será utilizado um intervalómetro. A velocidade do avião relativamente ao solo será mantida constante e igual a 240 km/h. As fiadas serão marcadas num mapa 1:50 000 na direcção Norte-Sul. Duas delas irão coincidir com os limites Oeste e Este da área em questão. Nestas condições determine os valores do plano de voo.

Solução:

i) Altura de voo.

$$S = \frac{f}{H_0 - h_m} \Rightarrow H_0 = 3870 \text{ m}$$

ii) Distância no terreno entre as fiadas.

$$d_{\text{lat}} = 0.65 \times 0.23 = 0.1495 \text{ m} \Rightarrow D_{\text{lat}} = 0.1495 \times 12000 = 1794 \text{ m}$$

iii) Número de fiadas.

$$L = 13600 \text{ m} \Rightarrow \text{N. fiadas} = \frac{13600}{1794} + 1 = 8.6 \approx 9$$

iv) Distância ajustada entre as linhas de voo.

Como não temos um número inteiro de fiadas (8.6) o espaçamento entre as fiadas ( $D_{\text{lat}}$ ) é ligeiramente superior. Assim, tendo em conta as 9 fiadas o espaçamento entre elas será:

$$D_{\text{lat}} = \frac{13600}{9 - 1} = 1700 \text{ m}$$

A sobreposição lateral será neste caso ligeiramente maior que 35% ( $S_l = 38\%$ )

v) Distância no mapa de voo entre as fiadas.

$$d_s = \frac{1700}{50000} = 3.4 \text{ cm}$$

vi) Distância no terreno entre as fiadas.

$$D_{\text{long}} = (0.40 \times 0.23) \times 12000 = 1104 \text{ m}$$

vii) Intervalo de tempo entre as exposições.

$$e = vt \Rightarrow t = 16 \text{ s}$$

viii) Distância ajustada entre as exposições.

$$e = vt \Rightarrow D.\text{expos.} = 1066 \text{ m}$$

ix) Número total de exposições (fotografias)

$$N.\text{fotos} = \frac{24000}{1066} + 4 = 26.5 \approx 27$$

**Exemplo 2.** Uma faixa de terreno com relevo muito suave e de dimensões: 730m de largura e 11.6 km de comprimento, vai ser fotografada, com uma única fiada, a fim de ser produzida a respectiva cartografia. O tamanho das fotografias é 23×23cm, a distância focal da câmara é de 147.3 mm e a sobreposição longitudinal é de 65% e a cobertura efectiva é de 90%. As exposições serão projectadas num mapa à escala 1:10 000 e no final da fiada serão feitas duas exposições adicionais. Sendo assim, faça o cálculo do respectivo plano de voo.

Solução:

i) Altura de voo.

Como pretendemos realizar uma única fiada e atendendo a que a cobertura lateral efectiva será de 90% então a cobertura efectiva na fotografia será:

$$C.\text{efectiva} = 23 \times 0.9 = 207.0 \text{ mm}$$

Logo a escala da fotografia virá  $S = \frac{0.207}{730} = \frac{1}{3527} \approx \frac{1}{3530}$ . Mas como  $S = \frac{f}{H}$  virá

$$H = 519.6 \approx 520 \text{ m acima da cota média do terreno}$$

ii) Distância no terreno entre as exposições.

Como a sobreposição longitudinal é de 65% a distância na fotografia entre os dois centros é:

$$\overline{C_1 C_2} = (1 - 0.65) \times 230 = 80.5 \text{ mm}$$

Esta mesma distância será no terreno

$$D_{\text{long}} = 80.5 \times \frac{520}{147.3} = 284 \text{ m}$$

iii) Distância no mapa de voo entre as exposições.

$$d_{\text{long}} = \frac{284}{10000} = 28.4 \text{ mm}$$

iv) Número total de fotografias.

$$N.\text{fotos} = \frac{11600}{284} + 4 = 44.9 \approx 45$$

**Exemplo 3.** Queremos cobrir uma zona de área aproximadamente igual a 45 000 ha, com um voo executado a 2 000 m de altura, com uma câmara de distância focal igual a 204.4 mm e com fotografias de formato 18×18cm. Procurando que o voo satisfaça às sobreposições  $S_v = 60\%$  e  $S_l = 25\%$ , determinar o número de fotos necessárias à cobertura da área.

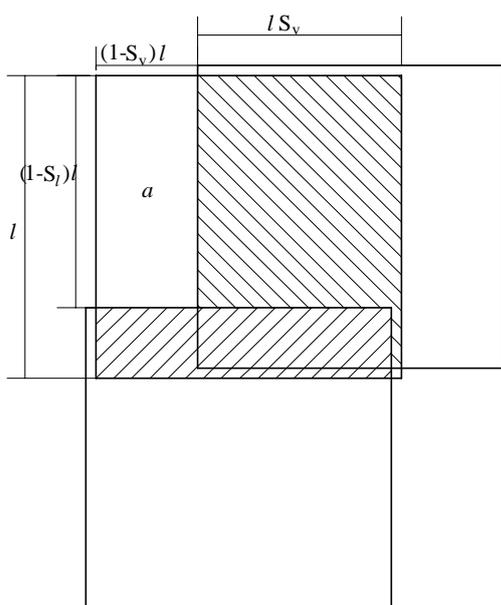


Figura 7.4. Área restituível

Solução:

A área que é possível restituir numa foto e que não é comum a fotografia seguinte, ou seja a área não comum entre dois modelos consecutivos é dada por:

$$a = l(1 - S_v)l(1 - S_l) = l^2(1 - S_v)(1 - S_l)$$

A correspondente área no terreno é

$$A = a \times (\text{Den}_s)^2 = \frac{l^2(1 - S_v)(1 - S_l)}{\left(\frac{f}{H}\right)^2}$$

$$= 930603.3 \text{ m}^2$$

Portanto, o número de fotos é

$$N^\circ \text{ de fotos} = \frac{45000}{93} = 483$$

## 2ª Parte: Fotogrametria Terrestre/Elcovision 10

Por campanha de exposições entende-se todas as medidas requeridas nas exposições fotográficas de um objecto necessárias à restituição posterior desse objecto.

A campanha engloba duas fases:

- A fase de planeamento, que inclui: o planeamento das exposições e a determinação do sistema de coordenadas objecto e a medição de distâncias para a determinação da escala.
- A fase de execução, que inclui, obviamente, a execução das exposições no espaço e tempo reais

### 10. PLANEAMENTO DAS EXPOSIÇÕES

#### 1. AQUISIÇÃO DE INFORMAÇÃO INICIAL SOBRE O OBJECTO E SITUAÇÃO ESPACIAL:

- dimensões do objecto,
- classificação espacial das áreas a restituir (projeções planas, verticais, etc),
- espaço disponível em volta do objecto,
- acessibilidade ao objecto,
- distâncias possíveis ao objecto,
- condições de luz.

#### 2. ESCOLHA DAS ESTAÇÕES DE EXPOSIÇÃO:

Antes de planear as estações de exposição, o utilizador deverá considerar, em qualquer caso antes da primeira exposição o modo como os fotogramas poderão ser posteriormente identificados.

Utilizando o Databack temos a possibilidade de codificar o negativo com 6 dígitos diferentes:

- 2 dígitos para identificar o projecto,
- 2 dígitos para identificar a lente utilizada,
- 2 dígitos para numerar consecutivamente as exposições.

**i) Algumas notas sobre a precisão do sistema**

Dada a precisão da digitalização de um ponto na fotografia ( $\sigma_{\text{dig}}$ ) e a precisão pretendida para o objecto ( $\sigma_{\text{obj}}$ ) a escala fotográfica necessária para atingir esta precisão é dada pela seguinte fórmula:

$$S = \frac{\sigma_{\text{dig}}}{\sigma_{\text{obj}}}$$

De um modo geral, a precisão da digitalização (i.e. na medição de fotocoordenadas) depende da precisão da mesa digitalizadora e da ampliação da foto (i.e. do formato do negativo). Como nas mesas digitalizadoras actuais é habitual conseguir-se uma precisão da ordem dos 0.1 mm (ou 0.3 mm em opção), então a precisão da digitalização para uma foto A4 (factor de ampliação 8) é:

$$\sigma_{\text{dig}} = \frac{0.1}{8} \approx 0.015 \text{ mm}$$

Portanto, se pretendermos 1 cm na precisão da digitalização de um objecto, a escala fotográfica deverá ser

$$S = 1:667$$

Para conseguirmos a precisão pretendida na escala fotográfica desejada as dimensões máximas do objecto a fotografar ( $L$ ) são calculadas a partir de

$$L = \frac{l}{S}$$

A distância a que teremos de realizar estas exposições é dada por

$$D = \frac{L}{l} f$$

onde  $f$  é a distancia focal da câmara fotogrametrica.

**ii) Escolha das lentes**

O utilizador pode optar por dois tipos de lentes

- A grande-angular (24mm ou 35mm) a qual cobre uma área relativamente grande do objecto a pequenas distâncias de exposição,
- A pequena-angular (50mm ou 80 mm) para distâncias idênticas cobre áreas relativamente pequenas,

De um modo geral  $S = \frac{f}{D}$  onde  $f$  é a distância focal e  $D$  é a distância do objecto ao centro de exposição.

Se utilizarmos uma fotografia ampliada de um factor  $A$  a escala é  $S = \frac{f_A}{D}$  onde  $f_A = f A$

**Exemplo 4.** Para que um objecto seja fotografado à escala 1:1 numa fotografia de 150×102 mm qual deverá ser a distância do centro de exposição de uma lente de 24 mm ao referido objecto?

Solução: Na fotografia 150×102 mm

$$A = \frac{M_{11} M_{57}}{m_{11} m_{57}} = 4.6 \Rightarrow D = \frac{24 \times 4.6}{1} = 110.4 \text{ mm}$$

Se utilizarmos uma objectiva de 50 mm a distância será  $D = 50 \times 4.6 = 230$  mm. Isto é ( $f_{A_1} > f_{A_2} \Rightarrow D_1 > D_2$ ), para obter a mesma escala fotográfica terei de me aproximar mais do objecto se utilizar uma grande angular.

**Exemplo 5.** Qual será a escala fotográfica de um objecto numa fotografia de formato A4, cuja distância do objecto ao centro de exposição é de 10 m.

Solução:

A distância focal ampliada é

$$f_A = 211.2 \text{ mm} \quad \text{com} \quad A = \frac{M_{11} M_{57}}{m_{11} m_{57}} = 8.8$$

e a escala da fotografia será

$$S = \frac{f_A}{D} = \frac{1}{47}$$

Exercício: Qual será a área ocupada pelo modelo formado por 2 fotos A4 à escala 1/50 e com sobreposição longitudinal de 90%

Posto isto a escolha das lentes deverá ter em conta:

- a) Disponibilidade do espaço que circunda o objecto.
  - se me aproximar do objecto devo utilizar uma grande-angular,
  - se me afastar do objecto devo utilizar uma pequena-angular,
- b) Dimensões do objecto no espaço fotográfico. O objecto ou a cena a fotografar deverá preencher tanto quanto possível todo o formato do fotograma.
- c) Profundidade de campo do objecto na direcção de exposição. A grandeza de profundidade de campo do objecto influi mais na escolha das lentes do que a proximidade ao objecto. A razão deve-se à necessidade de cobertura de áreas importantes do objecto:
  - se a profundidade de campo for grande devo utilizar uma pequena-angular (grande distância focal),
  - aumentar o planeamento das estações de exposição com exposições adicionais
- d) Abertura. Além do dispositivo de tempo de exposição automático a Leica R5 tem também um diafragma automático. Isto significa que o tempo de disparo é seleccionado automaticamente para fornecer uma exposição óptima para uma dada abertura, ou inversamente a menor abertura possível é seleccionada automaticamente para um dado tempo de exposição. Portanto, deve-se ter em conta que:
  - Quanto menor for a abertura (maior número de abertura,  $a_{11} = \frac{1}{11} < a_{5.6} = \frac{1}{5.6}$ ) maior será a profundidade de focagem.

Na maior parte dos casos as fotografias podem ser tiradas com a profundidade de focagem no infinito.

### iii) Distâncias de exposição

O critério mais importante na selecção da distância de exposição é que o objecto deverá preencher tanto quanto possível a totalidade da fotografia. No entanto, esta escolha é influenciada pela lente utilizada e pelo comprimento da base fotográfica que forma o modelo.

### iv) Sobreposição de duas fotos no modelo

Na realização das exposições deveremos ter em conta:

- a) Se possível, ambas as fotos do modelo deverão cobrir o objecto (ou a mesma parte deste), ou seja 100% de sobreposição longitudinal.
- b) A distância entre as duas fotografias (i.e base) não deverá ser muito grande. A relação recomendada entre a base  $B$  e a distância ao objecto  $D$  é  $B = \frac{1}{3}D$  (ou 30%).
- c) A distância de exposição ( $D$ ) em ambas as fotografias deverá ser tanto quanto possível a mesma. De contrário aparecerão grandes diferenças nas escalas das fotografias o que pode tornar a orientação (externa) impossível.

Em conclusão, o utilizador deverá optar por uma configuração das estações de exposição similar às exposições stereo sem contudo manter a rigidez necessária nestas últimas exposições. Desta forma podemos garantir que os modelos formados serão susceptíveis de serem restituídos.

Note-se que numa disposição normal das fotografias é possível encontrar uma precisão de  $\frac{1}{1000}$ . Isto significa que na restituição de uma fachada de 10m podemos obter a precisão de 1 cm na determinação de um ponto

### 3. DEFINIÇÃO DO SISTEMA DE COORDENADAS

Para definir o sistema de coordenadas objecto o Elcovision 10 oferece duas possibilidades:

- Através de pontos de controlo. Na transformação através de pontos de controlo não é necessário introduzir aproximações iniciais. No mínimo serão necessários 3 pontos (são recomendados entre 5 e 6) bem distribuídos pelo modelo. Estes pontos deverão ser definidos com precisão e serem bem visíveis nos modelos.
- Através de pontos objecto (definição de um sistema de coordenadas local). Aqui é necessário:
  - i) determinar a escala. Se o sistema de coordenadas objecto for definido pelo operador através da medição no modelo, de pontos objecto então é necessário observar, no mínimo, uma distância de valor conhecido. Para uma boa definição da escala é recomendado observar entre 2 ou 3 unidades em diferentes posições espaciais (note-se que 3 observações levantam qualquer ambiguidade entre elas).
  - ii) Definir a direcção dos eixos coordenados. Num sistema de coordenadas local os eixos coordenados são determinados no próprio objecto. Para isso é necessário em primeiro lugar, observar dois pontos que definirão o primeiro eixo coordenado. Assim, para definir o eixo horizontal de uma fachada é necessário observar dois pontos pertencentes a uma linha de fachada que seja o mais horizontal possível. Uma solução elegante para nivelar o sistema de coordenadas consiste em colocar no objecto um fio de prumo afim de definir o eixo vertical. É importante marcar previamente no fio 2 pontos para serem identificados posteriormente nas fotografias.

### 11. REALIZAÇÃO DAS EXPOSIÇÕES

Na realização das exposições convem verificar os seguintes tópicos:

1. Set-up da câmara
  - sensibilidade do filme,
  - databack.
2. Escolha das lentes
  - focagem para o infinito,
3. Escolha das estações de exposição
  - dimensões do objecto na fotografia,

- relação base/distância,
  - idêntica distância de exposição em ambas as fotografias.
4. Escolha da abertura
    - estimar a profundidade de campo da lente,
    - observar a escala de focagem e optar pela abertura mínima possível.
  5. Preparação do objecto
    - colocação da escala,
    - marcação de pontos no objecto.
  6. Verificar a focagem para o infinito.

## **12. ORIENTAÇÃO DE UM BLOCO DE FOTOGRAFIAS**

### **1. SEM AJUSTAMENTO SIMULTÂNEO**

#### 1) Procedimento:

- i) O.R. do modelo\_1,
- ii) Estabelecimento do sistema de coordenadas objecto através de pontos de controlo ou de pontos objecto,
- iii) Medição (observação) de pontos de ligação na área de sobreposição do modelo seguinte
- iv) O.R. do modelo\_2
- v) O.A. do modelo\_2 através de pontos de ligação (controlo)
- vi) Orientação dos restantes modelos (3,4,...).

### **2. COM AJUSTAMENTO SIMULTÂNEO**

#### 1) Tipo de observações:

- i) Coordenadas de pontos de controlo obtidas por métodos topográficos,
- ii) Distâncias definidas entre dois pontos objecto.

#### 2) Pré-requisitos:

- i) O bloco de fotografias deve estar orientado num único sistema de coordenadas objecto.

#### 3) Procedimento:

- i) O.R. do modelo\_1,
- ii) O.A. do modelo\_1 através de pontos de controlo ou através de pontos objecto definidos pelo operador,
- iii) Medição (observação) de pontos de ligação na área de sobreposição do modelo seguinte,
- iii) O.R. do modelo\_2,
- iv) O.A. do modelo\_2 através de pontos de ligação (controlo),
- v) Orientação dos restantes modelos,
- vi) Orientação global dos modelos através de pontos de controlo e de distâncias medidas no objecto.

---