



# **GeoGebra em Aula**

## **XI Dia**

### **GeoGebra**

### **Iberoamericano**

# GeoGebra em Aula

Livro de resumos do XI Dia GeoGebra Iberoamericano

Outubro, 2023

Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra

José Manuel Dos Santos Dos Santos (Organização e edição)

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta obra pode ser reproduzida sem que se obedeça a licença CC BY-NC-ND. É permitido o download dos trabalhos e a partilha desde que sejam atribuídos os devidos créditos, não podendo os conteúdos ser alterados nem utilizados para fins comerciais. Os originais desta publicação estão disponíveis nas lojas online da Apple e da Google e nos sites da Universidade de Coimbra.

ISBN: 978-972-8564-54-4

Este material é distribuído de acordo com a licença:

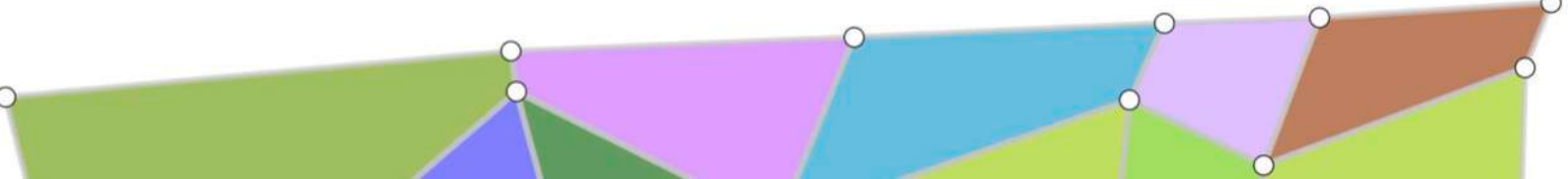


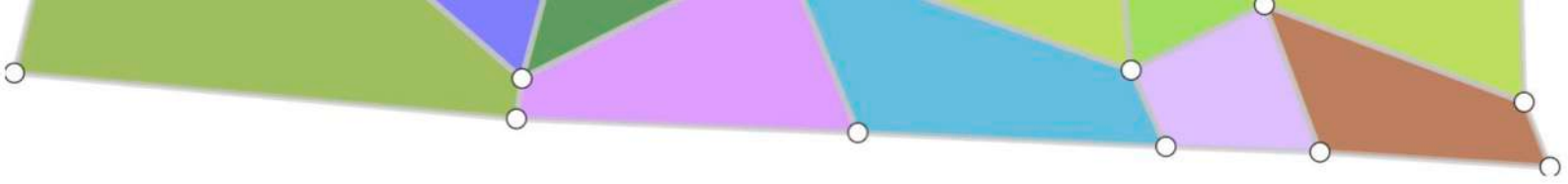


*GeoGebra* em Aula  
XI Dia *GeoGebra* Iberoamericano  
Coimbra, 2023

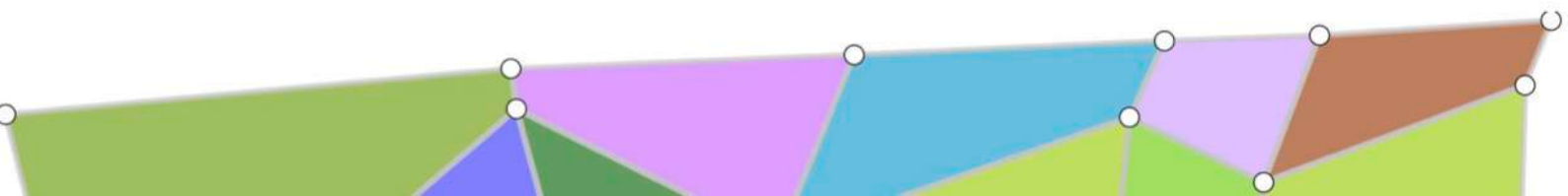
José Manuel Dos Santos Dos Santos (Organização)

27 de outubro de 2023





# Organização e Apoios



# Iniciativa

Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática



<https://fisem.org/>

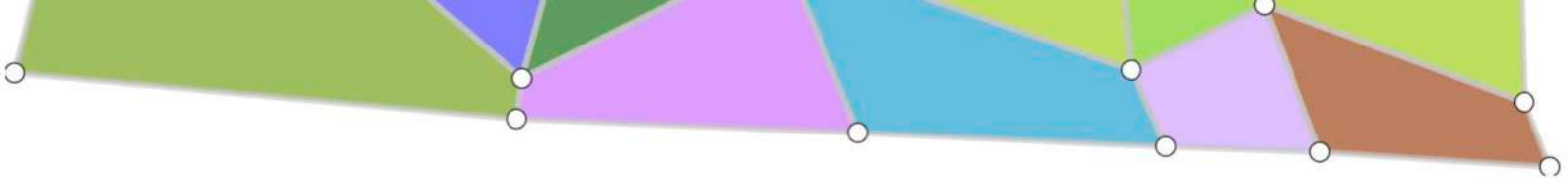
*Mestrado em Ensino de Matemática no 3º ciclo do Ensino Básico e no Secundário,  
Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologias da Uni-  
versidade de Coimbra*



<https://www.uc.pt/fctuc/dmat>



<https://www.uc.pt/fctuc>



## Apoios

Centro de Matemática da Universidade de Coimbra



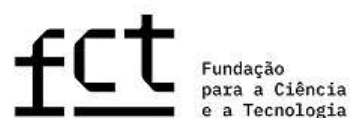
<https://cmuc.mat.uc.pt/rdonweb/>

Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas



<https://fespm.es/>

Fundação Para a Ciência e a Tecnologia



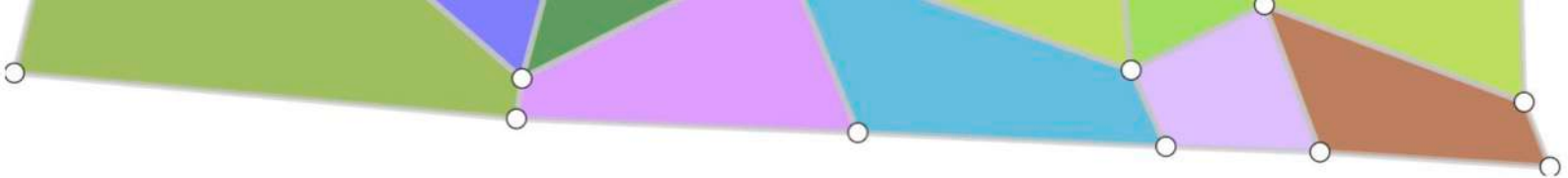
UIDB/00324/2020

<https://www.fct.pt/>

Organização de Estados Ibero-americanos para a Educação, a Ciência e a Cultura



<https://oei.int/pt/escritorios/portugal>



## Comissão Científica

*Ana Maria Reis D'Azevedo Breda*, Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro, Aveiro, Portugal

*Helena Maria Mamede Albuquerque*, Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade de Coimbra, Coimbra, Portugal

*Tomás Jesús Recio Muñiz*, Universidad Antonio de Nebrija, Madrid, Espanha

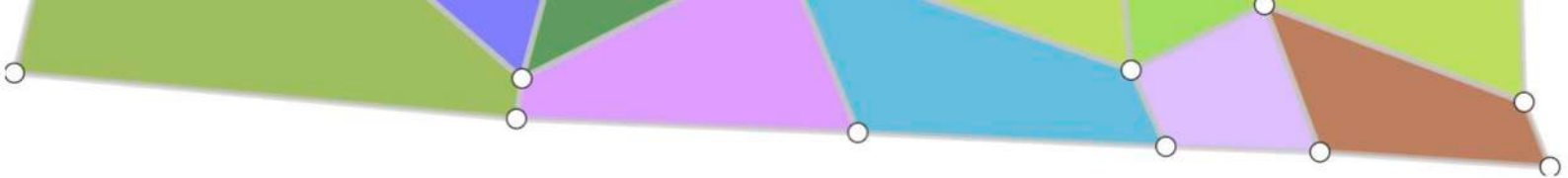
## Comissão Organizadora

*Agustín Carrillo de Albornoz y Torres*, Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática

*Jaime Carvalho e Silva*, Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade de Coimbra, Coimbra, Portugal

*José Manuel Dos Santos Dos Santos*, Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade de Coimbra, Coimbra, Portugal

*Manuel Marques Pissarro*, Mestrado em Ensino de Matemática no 3º ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário do Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade de Coimbra, Coimbra, Portugal



# Mensagem de Boas Vindas

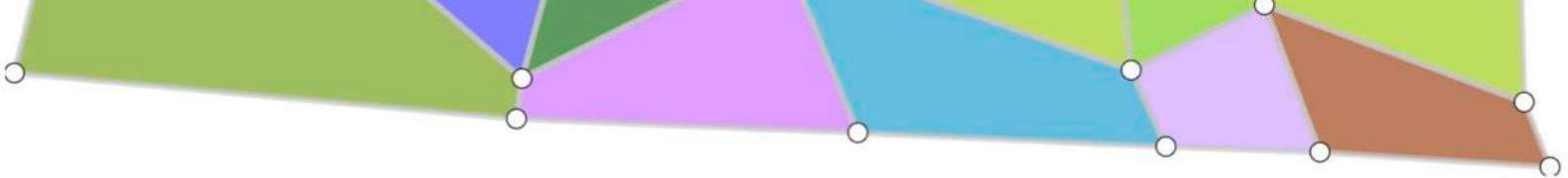
A Faculdade de Matemática da Universidade de Coimbra foi criada em 1772 aquando da reestruturação do sistema de ensino português definida pela Reforma Pombalina e que levou à criação do primeiro curso de Matemática. É no Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra (DM da UC) que hoje se leciona o sucessor do então criado curso de Matemática. Este departamento é detentor de uma história longa e riquíssima, apresenta uma oferta formativa que responde aos grandes desafios sociais da atualidade. Os seus docentes estão maioritariamente integrados no Centro de Matemática da Universidade de Coimbra (CMUC) onde se desenvolve investigação nas diversas áreas da Matemática. O CMUC tem granjeado as mais altas classificações atribuídas no âmbito da avaliação das unidades de investigação e desenvolvimento financiadas pela Fundação para a Ciência e Tecnologia.

O DM da UC saúde todos os participantes do *XI Dia Geogebra Iberoamericano - GeoGebra em Aula*, 27 e 28 de outubro de 2023 e, a quem deseja uma frutífera participação e uma excelente estadia nesta instituição e, finalmente, agradece à Equipa Organizadora e à Comissão Científica a iniciativa e o trabalho desenvolvido.

A Direção do Departamento de Matemática



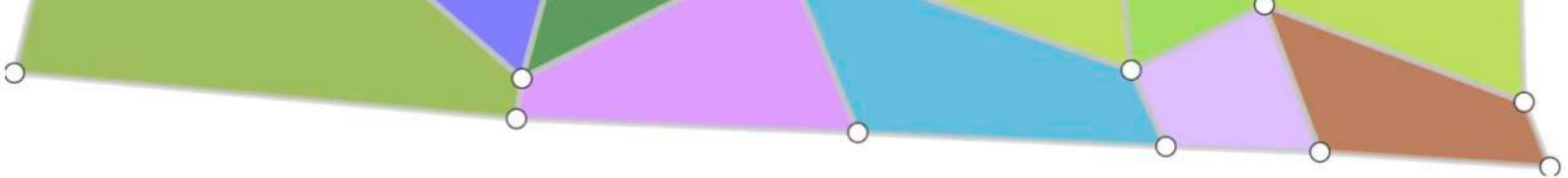
<https://www.uc.pt/fctuc/dmat>



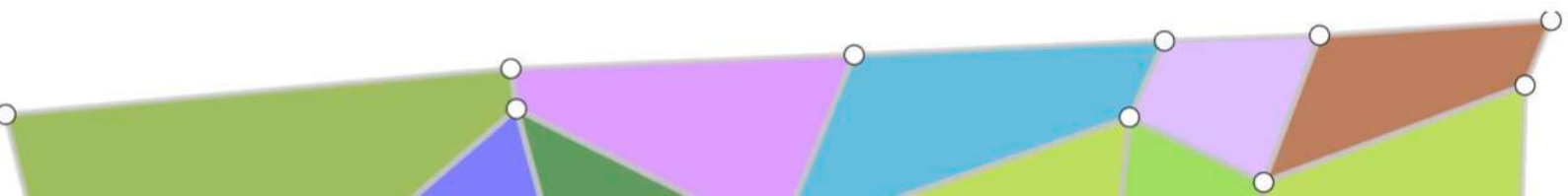
# Conteúdo

|                                                                                                                                                                        |           |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Organização e Apoios</b>                                                                                                                                            | <b>ii</b> |
| Iniciativa . . . . .                                                                                                                                                   | iii       |
| Apoios . . . . .                                                                                                                                                       | iv        |
| Comissão Científica . . . . .                                                                                                                                          | v         |
| Comissão Organizadora . . . . .                                                                                                                                        | v         |
| <b>Mensagem de Boas Vindas</b>                                                                                                                                         | <b>vi</b> |
| <b>Conferência Plenária I - GeoGebra &amp; STEAM</b>                                                                                                                   | <b>1</b>  |
| GeoGebra & STEAM - Presenter ( <i>Tomas Recio</i> ) . . . . .                                                                                                          | 2         |
| Empowering Teachers As Innovators: Integrating Augmented/Virtual Reality And 3d Printing Into Teacher Education ( <i>Zsolt Lavicza &amp; Branko Andjic</i> ) . . . . . | 4         |
| <b>Painel Plenário - GeoGebra &amp; Tecnologia nos Currículos de Matemática</b>                                                                                        | <b>7</b>  |
| GeoGebra & Tecnologia nos Currículos de Matemática - Moderação ( <i>Helena Albuquerque</i> ) . . . . .                                                                 | 8         |
| GeoGebra & Tecnologia nas Aprendizagens Essenciais da Matemática em Portugal ( <i>Jaime Silva</i> ) . . . . .                                                          | 10        |
| GeoGebra Tecnología en currículo de Matemáticas em España ( <i>Agustín Carrillo</i> ) . . . . .                                                                        | 15        |
| <b>Conferência Plenária II - GeoGebra &amp; Prova</b>                                                                                                                  | <b>19</b> |
| GeoGebra & Prueba, Conferencia com debate, Moderación ( <i>Tomas Recio</i> )                                                                                           | 20        |
| Explorando Sistemas de Geometria Dinâmica com Demonstradores de Teoremas Integrados ( <i>Pedro Quaresma</i> ) . . . . .                                                | 22        |
| <b>Mesa Redonda - GeoGebra em Aula</b>                                                                                                                                 | <b>27</b> |
| “GeoGebra em aula ...” - Moderadora ( <i>Ana Breda</i> ) . . . . .                                                                                                     | 28        |
| GeoGebra em aula em Angola: uma abordagem na visão de contributo para a predisposição dos alunos para a Matemática. ( <i>Kengana Andre João</i> ) . . . . .            | 32        |

|                                                                                                                                                                                                                        |           |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| Educação <i>STEAM</i> suportada pelo <i>GeoGebra</i> : Inovação da prática pedagógica em prol da melhoria da Educação Matemática e Ciências em Cabo Verde e Moçambique ( <b><i>Astrigilda Silveira</i></b> ) . . . . . | 38        |
| Nota Biográfica . . . . .                                                                                                                                                                                              | 41        |
| GeoGebra em aula no Brasil : A Abordagem Documental do Didático para a construção de recursos com GeoGebra ( <b><i>Celina Abar &amp; Adriana Dias</i></b> ) . . . . .                                                  | 42        |
| GeoGebra em aula em Espanha ( <b><i>Juan Antonio Reyes Delgado</i></b> ) . . . . .                                                                                                                                     | 46        |
| GeoGebra em aula em Portugal ( <b><i>Paulo Correia</i></b> ) . . . . .                                                                                                                                                 | 49        |
| <b>Sessões Práticas</b>                                                                                                                                                                                                | <b>53</b> |
| Secções No Cubo, Uma Tarefa no Contexto das Aprendizagens do Ensino Secundário ( <b><i>Irene Gonçalves, Oscarina Nogueira, Mário Santos &amp; José Manuel Dos Santos</i></b> ) . . . . .                               | 54        |
| Aulas com o <i>GeoGebra Classroom</i> no 2º e 3º ciclos do Ensino Básico ( <b><i>Ilda Marisa de Sá Reis &amp; José Manuel Dos Santos</i></b> ) . . . . .                                                               | 59        |
| Explorando o Pensamento Computacional no <i>GeoGebra</i> : Modelação 3D a partir de Imagens Reais ( <b><i>Alexandre Trocado &amp; Nuno Guimarães</i></b> )                                                             | 63        |
| Tarefas com o <i>GeoGebra</i> para trabalhar números racionais e suas operações ( <b><i>Joana Teles</i></b> ) . . . . .                                                                                                | 66        |
| Resolução de problemas de otimização com recurso ao <i>GeoGebra</i> ( <b><i>Carla Martinho</i></b> ) . . . . .                                                                                                         | 68        |
| Proyecto MATESGG Matemáticas y GeoGebra ( <b><i>Juan Antonio Reyes Delgado &amp; Steven Van Vaerenbergh</i></b> ) . . . . .                                                                                            | 72        |
| FotoGebra: Uso de Fotografías y <i>GeoGebra</i> . para Explorar las Matemáticas ( <b><i>Karina Rizzo</i></b> ) . . . . .                                                                                               | 75        |
| <b>Participação Virtual</b>                                                                                                                                                                                            | <b>79</b> |
| Inovação da prática pedagógica suportada pelo <i>GeoGebra</i> em contexto da Educação <i>STEAM</i> e melhoria do ensino e aprendizagem de Química ( <b><i>Aldovanda Vidade &amp; Alcinda Mafuiana</i></b> ) . . . . .  | 80        |
| Referências . . . . .                                                                                                                                                                                                  | 82        |
| GeoGebra aplicado ao ensino de Física. Caso de estudo da cinemática. ( <b><i>Ézar Esau Nharreluga</i></b> ) . . . . .                                                                                                  | 84        |
| <b>Minicursos</b>                                                                                                                                                                                                      | <b>89</b> |
| Geometria 2D com o <i>GeoGebra</i> ( <b><i>José Manuel Dos Santos Dos Santos</i></b> )                                                                                                                                 | 90        |
| Geometria 3D com o <i>GeoGebra</i> ( <b><i>Alexandre Emanuel Batista Trocado</i></b> )                                                                                                                                 | 94        |
| Cálculo Simbólico con GeoGebra <i>GeoGebra</i> ( <b><i>José María Chacón Íñigo</i></b> )                                                                                                                               | 97        |



# Conferência Plenária I - GeoGebra & STEAM



27 de outubro  
15:30 GMT  
Sala  
Pedro Nunes  
DMUC

## GeoGebra & STEAM - Presenter

Tomas Recio

Universidad Antonio de Nebrija, Madrid, Espanha

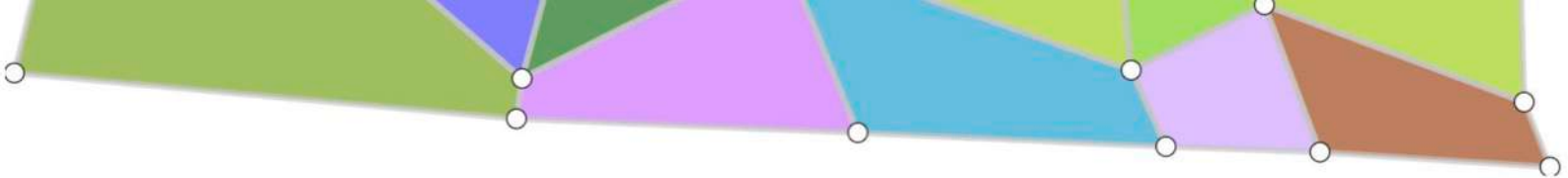


Prof. Zsolt Lavicza is a world-leader concerning both the development of a STEM focused education and on exploring the use of *GeoGebra* in mathematics education. The conference of Prof. Zsolt Lavicza (work in cooperation with Branko Andrić, both from JKU-Linz) exhibits his dual expertise:

- on the one hand, focusing on the potential impact of the current readiness at school level of 3D technology, for presenting educational tasks related to the mathematical or technological challenges involved in the digital or physical 3D modelling of relevant objects in science, engineering, arts...
- on the other, regarding the inclusion of augmented/virtual reality instruments, such as the ones already available in GeoGebra, to the collection of 3D tools ready to be part of classroom didactical material.

But his lecture is not only a (impressive, impacting, suggestive) journey through a large collection of contexts and methodologies that could profit from these new devices. It also brings information and feedback about pedagogical experiences (from teacher training courses or from secondary and primary education schools classrooms) in Europe, Asia, Africa and America.

**In conclusion:** as declared in its title, Prof. Lavicza conference will empower all of us as future innovators, contributing towards a better STEAM-education.



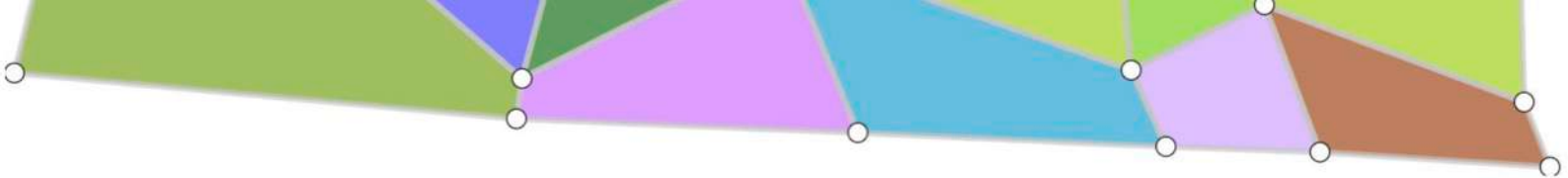
## Nota Biográfica



**Tomás Jesús Recio Muñiz**

Is Magistral Profesor at the Grupo Nebrija de Matemáticas y sus Aplicaciones, in the Departamento de Ingeniería Industrial/Escuela Politécnica of the University Antonio de Nebrija, Madrid. Tomas does research in Automated Theorem Proving in Geometry, Computational Algebraic Geometry, and Mathematics Education. His current project is “Theorem proving tools in GeoGebra.”

---



## Empowering Teachers As Innovators: Integrating Augmented/Virtual Reality And 3d Printing Into Teacher Education

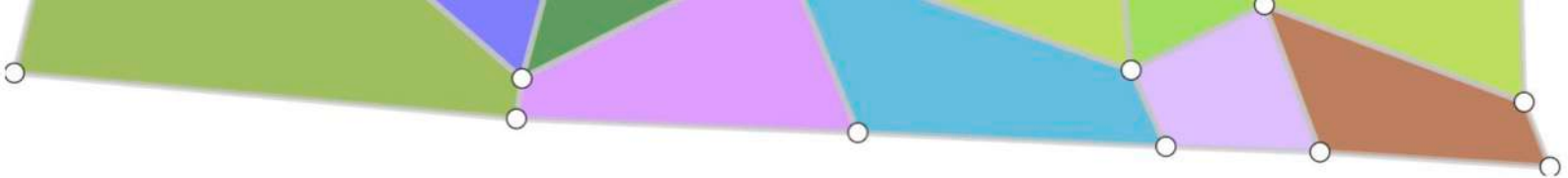
27 de outubro  
15:35 GMT  
Sala  
Pedro Nunes  
DMUC

Zsolt Lavicza<sup>1</sup> & Branko Andjic<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Johannes Kepler University Linz, Linz School of Education, Austria; <sup>2</sup> Phd Researcher at Johannes Kepler University Linz, Austria

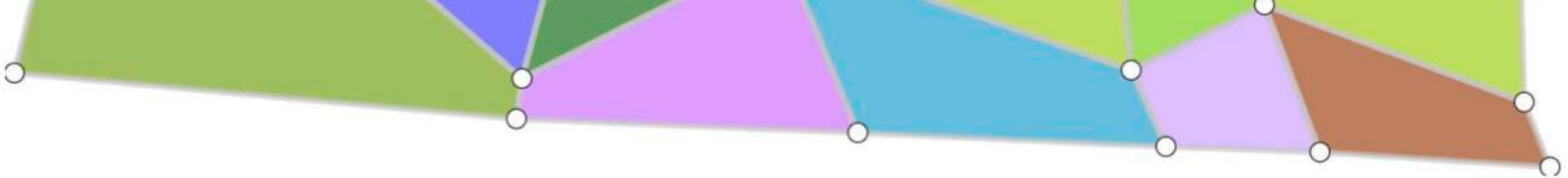


The rapid development of 3D-related technologies started to offer versatile platforms for 3D modelling in both electronic and physical formats. As 3D modelling is becoming increasingly important in the industry including, for instance, medicine, construction, and technology design, its potentials within education are starting to be more extensively explored (Andjic, Ulbrich, et al., 2023). In our talk, we will outline several studies carried out by the STEAM education research group at the Linz School of Education, Johannes Kepler University, Austria. We will outline studies to introduce Augmented/Virtual Reality and 3D printing applications to teacher education in several countries (Ulbrich et al., 2023); explore teachers' perceptions and perspectives of these technologies (Andjic et al., 2023); understand the necessary educational ecosystem for 3D-based technologies (Haas et al., 2023); cultivate and evaluation of diverse pedagogical approaches for incorporating 3D modelling into classrooms (Haas et al., 2021); motivate students through integrating arts and culture into such educational environments (Bedewy et al., 2023); create 3D resources for students with disabilities as well as from disadvantaged communities and countries (Andjic, Lavicza, et al., 2023); and engage girls in STEM studies through 3D modelling (Budinski et al., 2022). One of the central aims of our studies is to empower teachers and students to become innovators and creators utilising such powerful and novel technologies. We also aim to address that such studies require new theoretical and methodological approaches. Thus, we will highlight extending our work from mathematics to STEAM through arts and culture, introducing a STEAM+X approach (El Bedewy & Lavicza, 2023) as well as supplementing Design Based Research (DBR) approaches with User Experience (UX) research methodologies to better address rapid changes in technology development (Lavicza et al., 2022). Subsequently, we spotlight exemplars of exemplary practices drawn from secondary and primary education in Europe, Asia, Africa and Latin America.



## References

- Andjić, B., Lavicza, Z., Vučković, D., Maričić, M., Ulbrich, E., Cvjetićanin, S., & Petrović, F. (2023). The Effects of 3D Printing on Social Interactions in Inclusive Classrooms. *International Journal of Disability, Development and Education*, 1–25.
- Andjić, B., Ulbrich, E., Dana-Picard, T. N., Cvjetićanin, S., Petrović, F., Lavicza, Z., & Maričić, M. (2023). A Phenomenography Study of STEM Teachers' Conceptions of Using Three-Dimensional Modeling and Printing (3DMP) in Teaching. *Journal of Science Education and Technology*, 32(1), 45–60.
- Bedewy, S. E., Haas, B., Lavicza, Z., & Houghton, T. (2023). 3D Transformations for Architectural Models as a Tool for Mathematical Learning. *Learning Mathematics in the Context of 3D Printing: Proceedings of the International Symposium on 3D Printing in Mathematics Education*, 17–49.
- Budinski, N., Lavicza, Z., & Houghton, T. (2022). Opportunities for 3D printing in Hybrid Education. *Open Education Studies*, 4(1), 339–344. El Bedewy, S., & Lavicza, Z. (2023). STEAM+ X-Extending the transdisciplinary of STEAM-based educational approaches: A theoretical contribution. *Thinking Skills and Creativity*, 48, 101299.
- Haas, B., Kreis, Y., & Lavicza, Z. (2021). Case Study on Augmented Reality, Digital and Physical Modelling with Mathematical Learning Disabilities Students in an Elementary School in Luxembourg. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, 28(3), 125–132.
- Haas, B., Lavicza, Z., Houghton, T., & Kreis, Y. (2023). Can you create? Visualising and modelling real-world mathematics with technologies in STEAM educational settings. *Current Opinion in Behavioral Sciences*, 52, 101297.
- Lavicza, Z., Weinhandl, R., Prodromou, T., Andjić, B., Lieban, D., Hohenwarter, M., Fenyvesi, K., Brownell, C., & Diego-Mantecón, J. M. (2022). Developing and Evaluating Educational Innovations for STEAM Education in Rapidly Changing Digital Technology Environments. *Sustainability*, 14(12), 7237.
- Ulbrich, E., Andjić, B., & Lavicza, Z. (2023). Possibilities for STEAM Teachers Using 3D Modelling and 3D Printing. *Learning Mathematics in the Context of 3D Printing: Proceedings of the International Symposium on 3D Printing in Mathematics Education*, 163–185.



## Biographic Note



**Zsolt Lavicza**

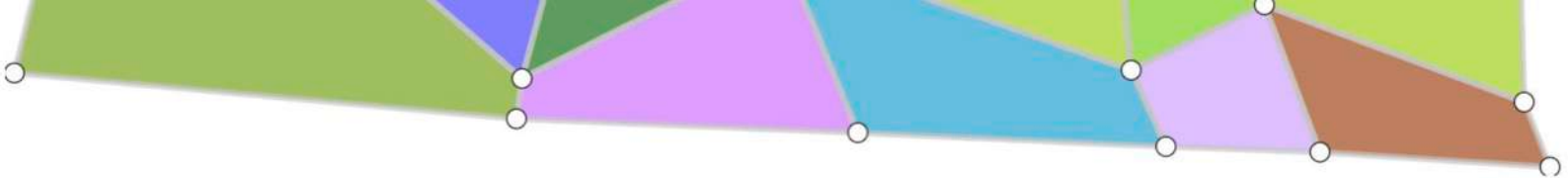
After receiving his degrees in mathematics and physics in Hungary, Zsolt began his postgraduate studies in applied mathematics at the University of Cincinnati. While teaching mathematics at the University of Cincinnati he became interested in researching issues in the teaching and learning mathematics. In particular, he focused on investigating issues in relation to the use of technology in undergraduate mathematics education. Since then, both at the University of Michigan and Cambridge, working with Deborah Ball, Hyman Bass, Paul Andrews, and Kenneth Ruthven, he has worked on several research projects examining technology and mathematics teaching in a variety of classroom environments. Currently, Zsolt Lavicza is working in numerous research projects worldwide related to technology integration into schools; offering educational research training courses at a number of universities; leading a doctoral programme in STEM education at Johannes Kepler University; and coordinates research projects within the International GeoGebra Institute.



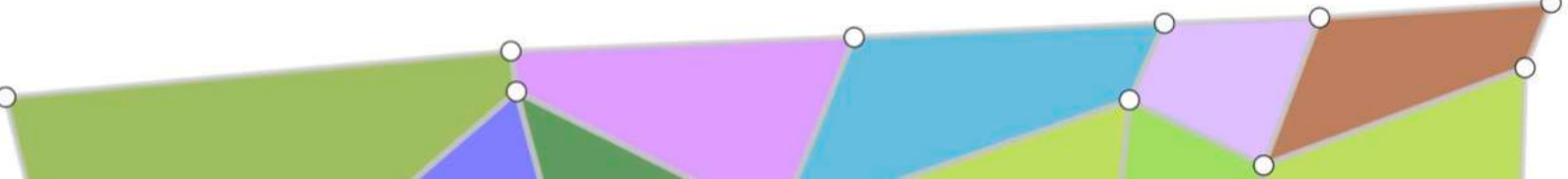
**Branko Andjic**

Is a Phd Researcher at Johannes Kepler University Linz since september of 2021. He received his Ph.D.in 2020 in the field of STEAM education for visual impairment students. During his doctoral research, he stayed for professional and scientific training at five European universities in Austria, England, Slovenia, Montenegro, and Serbia. He is the author of a textbook in Biology for preuniversity level education, as well as a manual for teachers. He is the author of several scientific papers in international peer-review journals. So far, he has been involved in international and national projects in the field of education.

---



# Painel Plenário - GeoGebra & Tecnologia nos Currículos de Matemática



## GeoGebra & Tecnologia nos Currículos de Matemática - Moderação

27 de outubro  
16:30 GMT  
Sala  
Pedro Nunes  
DMUC

Helena Albuquerque

Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologias da Universidade  
de Coimbra

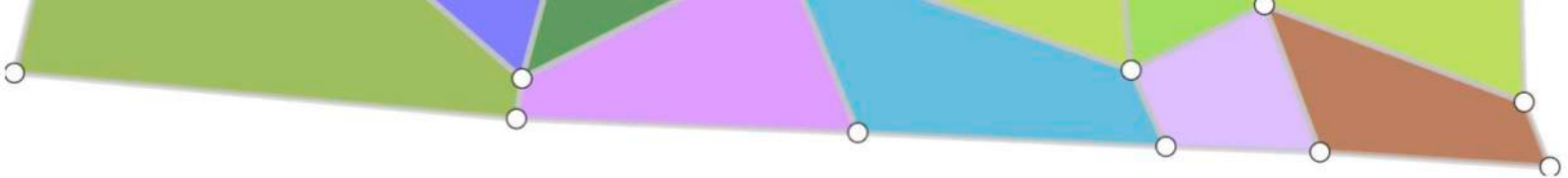


Existem vários estudos que provam que o uso de tecnologia no ensino, em particular do programa *GeoGebra*, é decisivo para a inclusão, socialização e desenvolvimento da aprendizagem dos alunos com deficiência.

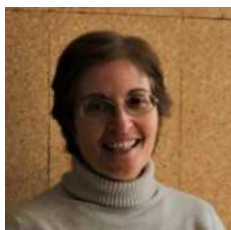
O programa *GeoGebra* surge assim como um facilitador não só na execução de determinadas tarefas escolares, que alguns alunos com deficiência não conseguiriam realizar sem este recurso, mas também como fator determinante para a participação em atividades coletivas que promovam a sua socialização permitindo-lhes assim uma igualdade de acesso ao conhecimento.

O uso de tecnologia no ensino, nomeadamente do *GeoGebra* representa muitas vezes sobretudo na deficiência física e sensorial, o caminho ideal para uma inclusão educativa e social. Na deficiência intelectual o uso deste programa pode ser fundamental para desenvolver o pensamento mais abstrato e o desempenho escolar destes alunos, facilitando a sua autonomia e promovendo a sua inclusão escolar.

Como tal, é para TODOS os alunos deveras importante a utilização do *GeoGebra* nos programas escolares de Matemática como fator decisivo de compreensão dos conceitos mais abstratos, da igualdade de acesso e de oportunidades ao conhecimento e de construção de uma escola verdadeiramente inclusiva.



## Nota Biográfica



### Helena Albuquerque

Dedica a sua investigação à Álgebra e Combinatória, área na qual publica e tem orientado teses de mestrado e doutoramento. No Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologias da Universidade de Coimbra têm lecionado várias disciplinas, nomeadamente, no Mestrado em Ensino de Matemática no 3º ciclo do Ensino Básico e no Secundário leciona as cadeiras de Didática da Álgebra e Metodologia da Matemática, para além de ser Orientadora Científica de núcleos de Estágio. É Presidente da Associação Portuguesa de Pais e Amigos do Cidadão Deficiente Mental de Coimbra.

---

27 de outubro  
16:30 GMT  
Sala  
Pedro Nunes  
DMUC

## GeoGebra & Tecnologia nas Aprendizagens Essenciais da Matemática em Portugal

Jaime Silva

Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologias e CMUC da  
Universidade de Coimbra



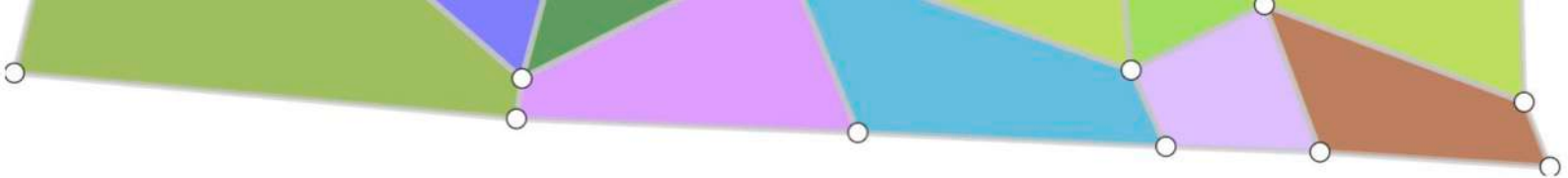
As novas Aprendizagens Essenciais (AE) para o Ensino Secundário valorizam consideravelmente o uso da tecnologia, em múltiplas dimensões. Nas referências é até citado um interessante livro em formato *GeoGebra* de Jorge Cássio. Nas Aprendizagens Essenciais para o 10<sup>o</sup> ano de escolaridade da disciplina de Matemática A podemos ler:

A abordagem exploratória de ideias e conceitos matemáticos apresenta-se como determinante, o que pressupõe levar o aluno a participar ativamente num processo de construção e aprofundamento, motivado por questões desafiadoras, problemas e procura de justificações. A integração da tecnologia é considerada como indispensável nesse processo, pelas possibilidades que oferece de experimentação, visualização, representação, simulação, interatividade, bem como, evidentemente, de cálculo numérico e simbólico. O recurso a ambientes de geometria dinâmica (AGD), à folha de cálculo e a aplicativos digitais, explorados em computadores, smartphones ou calculadora gráfica, deve ser feito de forma sistemática. As atividades de programação devem ser integradas com uma complexidade progressiva, sendo relevantes para o desenvolvimento de processos algorítmicos, de um pensamento estruturado e do raciocínio lógico, proporcionando um vasto campo de aplicação da Matemática e envolvendo genuinamente a formulação e a resolução de problemas, além de promover o desenvolvimento do pensamento computacional.

O recurso a ambientes de geometria dinâmica (AGD) ocupa, pois, uma posição de destaque. Já programas anteriores se referiam a estes ambientes, mas nestas últimas AE existe uma opção por apontar o uso do software *GeoGebra* explicitamente devido à sua qualidade, facilidade de utilização e de não ter custos envolvidos. As referências explícitas são numerosas.

### 10<sup>o</sup> ano – tema Funções

Explorar o conceito de função em contextos reais e matemáticos em que faça sentido, nomeadamente como relação de covariação, incluindo a possibilidade de definição de funções em ambientes gráficos (calculadoras gráficas ou *GeoGebra*) ou em ambientes de programação (Python).



**10º ano – tema Geometria analítica no plano** Promover o uso do *GeoGebra* em explorações, por exemplo:

- procurar coordenadas do transformado de um ponto, por uma reflexão de eixo vertical ou horizontal, ou por uma meia-volta de centro na origem;
- analisar condições que possam definir conjuntos de pontos e perceber como diferentes condições geram conjuntos de pontos diferentes (incluindo o conjunto vazio).

**10º ano – tema Geometria analítica no espaço**

Estimular os alunos a utilizar o *GeoGebra* 3D para visualizar, explorar e estabelecer conjecturas, envolvendo geometria no espaço, por exemplo, problemas envolvendo interseções de planos paralelos aos planos coordenados com esferas.

**10º ano – tema Vetores no plano e no espaço**

Propor aos alunos a utilização do *GeoGebra* para explorar:

- a relação entre vetor diretor de uma reta e paralelismo de retas;
- o efeito dos parâmetros, da equação reduzida de uma reta, na sua representação gráfica.

Nestes quatro exemplos observamos como a “abordagem exploratória de ideias e conceitos matemáticos” é essencial. Os alunos explorando com uma ferramenta fácil de usar e em que se podem facilmente fazer variar os parâmetros que estão na base da construção com o *GeoGebra* podem observar relações e propriedades que depois estudarão de forma mais consciente e empenhada com outras ferramentas mais teóricas e abstratas. Eis mais referências explícitas, desta vez no 11º ano de escolaridade.

**11º ano – tema Produto Escalar**

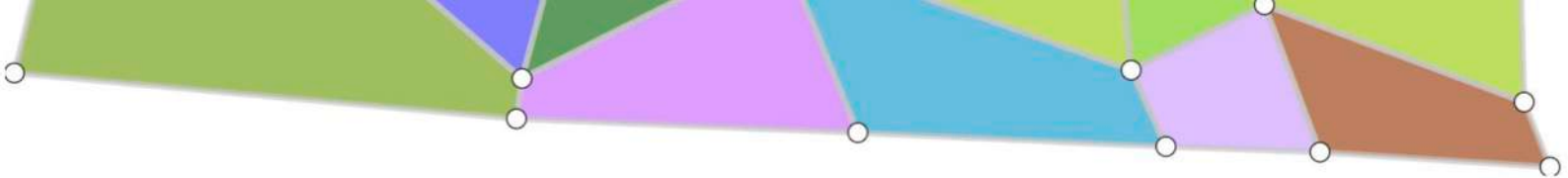
Estimular os alunos a utilizar o *GeoGebra* para visualizar, explorar e estabelecer conjecturas, envolvendo por exemplo:

- a relação entre a inclinação e o declive de uma reta;
- a relação do ângulo de dois vetores e o sinal do produto escalar;
- o ângulo de duas retas;
- a posição relativa de retas.

**11º ano – tema Equações cartesianas de planos no espaço**

Estimular os alunos a utilizar o *GeoGebra* 3D para visualizar, explorar e estabelecer conjecturas, envolvendo planos e retas no espaço, por exemplo explorar secções determinadas por cortes de planos num cubo ou numa pirâmide.

Nos possíveis aprofundamentos das AE (ou seja, temas a lecionar caso haja tempo), também são propostas abordagens de temas envolvendo o *GeoGebra* Por exemplo



**11º ano – tema Geometria** Resolver problemas beneficiando de visualizações interativas em 3 dimensões que se podem efetuar usando o software *GeoGebra* na sua versão 3D. Eis alguns exemplos possíveis:

- Paralelismo: <https://www.geogebra.org/m/eFMvcngj>
- Interseção de uma esfera: <https://www.geogebra.org/m/Mz7eCBFs>
- Janela 3D - Esfera seccionada - vista 2D do plano: <https://www.geogebra.org/m/acmtajta>
- Plano e Equação: <https://www.geogebra.org/m/ajzr6gh2>
- Planos no espaço: <https://www.geogebra.org/m/PfhVP4U8>

**11º ano – tema Funções – Cálculo Diferencial**

Fomentar a visualização gráfica e a interpretação da taxa média de variação recorrendo a ferramentas computacionais, como por exemplo, o *GeoGebra*

- <https://www.geogebra.org/m/RCGp7JjK>
- <https://www.geogebra.org/m/aC9j8ZrE>

No **12º ano da disciplina de Matemática A** também aparecem algumas sugestões de trabalho explícito com o *GeoGebra* embora menos numerosas. Todas as referências são no tema opcional Matrizes, onde encontramos:

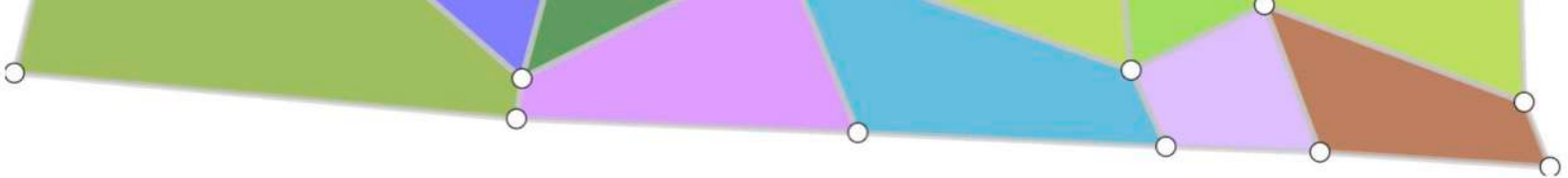
Recorrer a construções do *GeoGebra* para ilustrar as transformações geométricas realizadas sobre uma figura. O estudo das transformações geométricas a partir da sua representação matricial pode ser feito de forma interativa a partir de recursos disponíveis em várias páginas. Por exemplo:

- 2x2 matrix transformation: <https://www.geogebra.org/m/QxWrMgBV>
- Matrix Representation of a "Stretch": <https://www.geogebra.org/m/AhNWDWPu>

Em todos estes exemplos encontramos a característica fundamental que tem um software como o *GeoGebra* de ajudar na “abordagem exploratória de ideias e conceitos matemáticos”. O importante é que o recurso a estas ferramentas “deve ser feito de forma sistemática”.

Todas as referências explícitas nas AE aparecem para ajudar o professor a concretizar as AE na sala de aula embora não tenham um carácter prescritivo. Na realidade muitos outros softwares de geometria dinâmica cumprem as mesmas funções, embora não sejam de tão fácil acesso ou tenham carácter comercial, limitando assim muito as opções numa escola. Para além das referências explícitas a um software gratuito como o *GeoGebra* este e outros softwares podem ser utilizados em múltiplas ocasiões pois as AE esclarecem que não há nenhum que seja oficialmente obrigatório:

Quando nas Aprendizagens Essenciais se refere recurso a tecnologia gráfica, deve

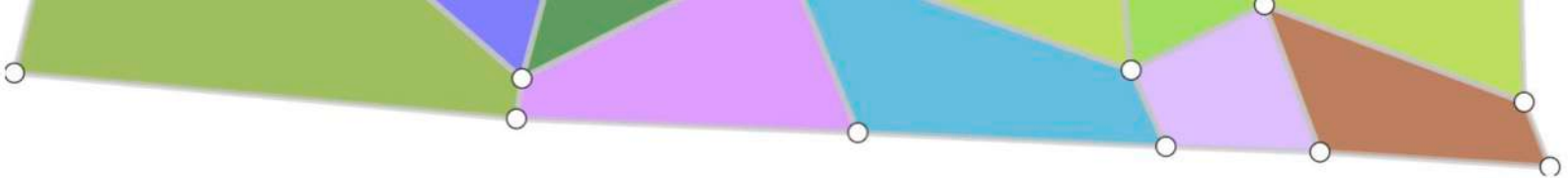


entender-se a utilização de folhas de cálculo ou qualquer versão de calculadora gráfica, física ou sob a forma de emulador, bem como o uso do *GeoGebra* ou outro Ambiente de Geometria Dinâmica, nas suas diversas versões disponíveis em qualquer dispositivo digital. Considera-se também o recurso a aplicativos digitais específicos (apliquetas), disponíveis na Internet ou em fóruns temáticos.

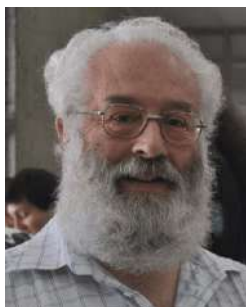
Para que o sistema educativo seja totalmente coerente será de esperar que os alunos possam usar nos exames nacionais alguma versão local do *GeoGebra* embora sem possibilidade de ligação à Internet. Tal já acontece com os exames nacionais na Finlândia e por isso a sua viabilidade técnica está confirmada.

## Referências

- Carvalho e Silva, J. (2021). Opções curriculares num Programa de Matemática para o Ensino Secundário. *Educação & Matemática*, nº 161, p. 26-30. <https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/2720>
- Carvalho e Silva, J. (Coord.), Albuquerque, C., Almiro, J., Cruchinho, C., Carreira, S., Correia, P., Domingos, A., Espadeiro, G. E., Filipe, N., Gabriel, L., Martins, H., Martins, M.E.G., Rodrigues, A., & Santos, M. T. (2022) *Aprendizagens essenciais - articulação com o perfil dos alunos. 10.º ano - Ensino Secundário*. República Portuguesa: Educação. Lisboa. [http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens\\_Essenciais/mat\\_a\\_10\\_-\\_vf.pdf](http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/mat_a_10_-_vf.pdf)
- Cássio, J. (2019). *Aprendendo Geometria Plana com a Plataforma Geogebra*. Obtido de <https://www.geogebra.org/m/hsXHDX7>
- The Matriculation Examination Board (2023). *Matriculation Examination - Digital Test Environment*. Helsinki. <https://www.ylioppilastutkinto.fi/en/matriculation-examination/digital-test-environment>



## Nota Biográfica



### Jaime Carvalho e Silva

Professor Associado do Departamento de Matemática da FCT da Universidade de Coimbra. Responsável por disciplinas do 1<sup>o</sup> ano de cursos de Engenharia, Ciências e Gestão e do Mestrado em Ensino de Matemática da FCTUC. Orientador de estágio de futuros professores de Matemática.

Co-autor dos programas de Matemática para o Ensino Secundário de 1997, 2001 e 2023, incluindo Matemática A e B, Matemática Aplicada às Ciências Sociais e Matemática dos Cursos Profissionais e Artísticos. Coordenador do Grupo de Trabalho de Matemática nomeado pelo Ministério da Educação (2018-2023).

Membro da Comissão Executiva e Secretário-Geral do ICMI-Comissão Internacional para a Instrução Matemática (2008-2010 e 2010-2012 respetivamente).

Coordenador do Centro de Competência TIC "Softciências" (Coimbra). Membro do Conselho Geral do SNHM-Seminário Nacional de História da Matemática (Sociedade Portuguesa de Matemática). Membro da Comissão de Acompanhamento do Centro de Investigação e Inovação em Educação (inED) da ESE do Porto. Membro do Conselho Geral do Agrupamento de Escolas Martim de Freitas, Coimbra, e do Conselho Geral do Agrupamento de Escolas Coimbra Centro.

Membro do Comité para a Matemática do Planeta Terra de Portugal. Delegado em Portugal do The International Mathematical Modeling Challenge, IM2C. Representante da APM na Subcomissão nacional ICMI.PT e na Junta Diretiva da Federação Iberoamericana de Sociedades de Professores de Matemática (FISEM).

---

# GeoGebra Tecnología en currículo de Matemáticas em España

Agustín Carrillo

Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas FESPM &  
Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática



27 de outubro  
16:30 GMT  
Sala  
Pedro Nunes  
DMUC

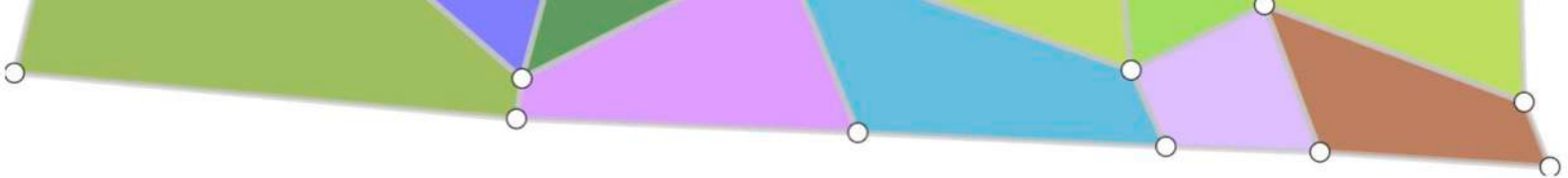
## Introducción

La situación de la enseñanza en España tiene un hecho destacable como es que en los últimos cincuenta y dos años se han promulgado ocho leyes educativas: Ley General de Educación (LGE, 1970), Ley Orgánica Reguladora del Estatuto de Centros Escolares (LOECE, 1980), Ley Orgánica del Derecho a la Educación (LODE, 1985), Ley Orgánica de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE, 1990), Ley Orgánica de Calidad de la Educación (LOCE, 2002), Ley Orgánica de Educación (LOE, 2006), Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE, 2013) y la Ley Orgánica de Modificación de la Ley Orgánica de Educación (LOMLOE, 2022). Demasiadas leyes en tan pocos años y excesivas si contabilizamos solo los últimos veinte años, todo ello debido a los cambios de gobierno que se ha producido en el país que llevaba a una modificación de la ley del gobierno anterior, en lugar de buscar un pacto por la educación que daría estabilidad a la norma y cierta tranquilidad a toda la comunidad educativa.

Cada una de estas leyes suponía un cambio en la estructura de la enseñanza y por supuesto promovían modificaciones en cuanto a la metodología de trabajo en el aula, con cambios en el currículum que afectaban más a aquellas materias cuyo contenido se puede considerar de índole más ideológica, de lo que podemos estar agradecidos que las matemáticas no tengan esta consideración.

Como es lógico, desde la llegada de las tecnologías su uso aparece contemplado en el currículum de las matemáticas en los distintos niveles, con continuas referencias que han ido creciendo en las últimas versiones como consecuencia de su implantación en todos los ámbitos de la sociedad y por tanto, también en el ámbito educativo.

Hay que destacar que aunque el currículum sea de obligado cumplimiento para el docente y contemple el uso de la tecnología, no significa que el profesorado haya modificado su metodología en la enseñanza de las matemáticas y por tanto, las haya incorporado. Situación lamentable considerando los esfuerzos que los distintos gobiernos, tanto nacionales como autonómicos (tienen competencias en educación) han realizado en los últimos años con diferentes planes para dotar de material informático a los centros para promover el uso de las tecnologías.



## Competencias claves según la nueva ley educativa

Un aspecto importante de las últimas leyes educativas es el trabajo por competencias, entre las que se incluyen la competencia digital.

Así en educación infantil, la competencia digital establece: “Se inicia, en esta etapa, el proceso de alfabetización digital que conlleva, entre otros, el acceso a la información, la comunicación y la creación de contenidos a través de medios digitales, así como el uso saludable y responsable de herramientas digitales. Además, el uso y la integración de estas herramientas en las actividades, experiencias y materiales del aula pueden contribuir a aumentar la motivación, la comprensión y el progreso en la adquisición de aprendizajes de niños y niñas.” En Educación Primaria, Educación Secundaria y Bachillerato determina “La competencia digital implica el uso seguro, saludable, sostenible, crítico y responsable de las tecnologías digitales para el aprendizaje, para el trabajo y para la participación en la sociedad, así como la interacción con estas. Incluye la alfabetización en información y datos, la comunicación y la colaboración, la educación mediática, la creación de contenidos digitales (incluida la programación), la seguridad (incluido el bienestar digital y las competencias relacionadas con la ciberseguridad), asuntos relacionados con la ciudadanía digital, la privacidad, la propiedad intelectual, la resolución de problemas y el pensamiento computacional y crítico.”

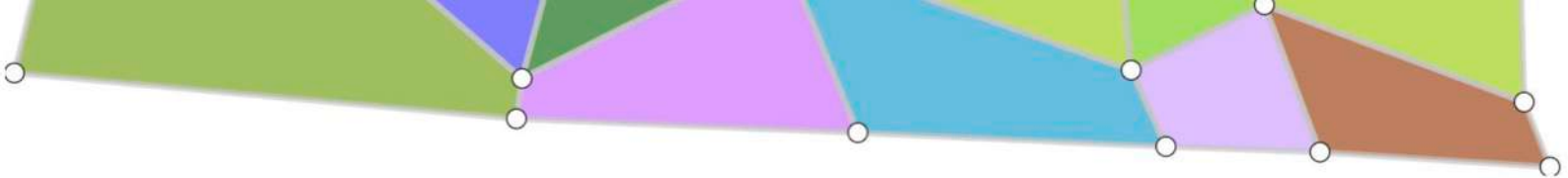
La competencia matemática y competencia en ciencia, tecnología e ingeniería (competencia STEM por sus siglas en inglés) en los distintos niveles, desde Primaria a Bachillerato, entraña la comprensión del mundo utilizando los métodos científicos, el pensamiento y representación matemáticos, la tecnología y los métodos de la ingeniería para transformar el entorno de forma comprometida, responsable y sostenible.

Por tanto, el currículum en la nueva ley de educación contempla de manera destacada el uso de la tecnología como parte importante de las competencias que debe adquirir el alumnado.

## El uso de la tecnología en matemáticas

El currículum de matemáticas contempla el uso de competencias específicas que desarrollan las distintas competencias claves, encontrando entre ellas la que hace referencia al uso de medios tecnológicos. Así en Secundaria, en los tres primeros cursos podemos encontrar como competencia específica “Representar, de forma individual y colectiva, conceptos, procedimientos, información y resultados matemáticos, usando diferentes tecnologías, para visualizar ideas y estructurar procesos matemáticos” que se corresponden con los criterios de evaluación siguientes:

- Representar conceptos, procedimientos, información y resultados matemáticos de modos distintos y con diferentes herramientas, incluidas las digitales, vi-



sualizando ideas, estructurando procesos matemáticos y valorando su utilidad para compartir información.

- Elaborar representaciones matemáticas que ayuden en la búsqueda de estrategias de resolución de una situación problematizada.

Los conocimientos que el alumno debe adquirir en cada curso aparecen bajo la denominación de saberes básicos que están agrupados en distintos sentidos: numérico, de la medida, espacial, algebraico, estocástico y socio-afectivo, en los que se contempla de uso de distintas herramientas tecnológicas que van desde la calculadora a distintos programas tanto genéricos como hojas de cálculo como específicos, entre los que por supuesto podemos considerar el uso de GeoGebra.

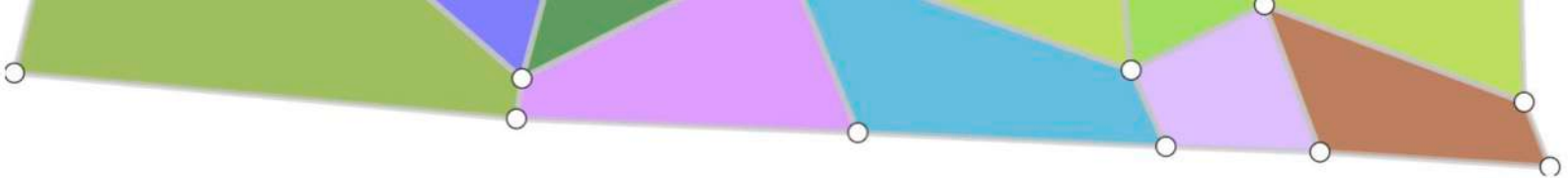
Como es evidente en el currículum no parece el nombre de un determinado programa, aunque si el uso de programas de geometría dinámica.

## Conclusión

A pesar de las continuas referencias que se encuentran en el currículum al uso de las tecnologías y en concreto de programas de geometría dinámica o de representación de funciones, entre los que evidentemente consideramos a GeoGebra, su implantación entre los docentes no se ha producido o al menos no en la medida esperada.

Nos puede parecer que GeoGebra está implantado en la enseñanza en los distintos niveles educativos, pero la realidad es otra. A pesar de todas las acciones de formación realizadas en los últimos años para dar a conocer las posibilidades de este software, acciones realizadas tanto de manera oficial como por otras entidades entre las que se encuentra la FESPM, su uso en el aula no está integrado en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Esto no significa que no se utilice GeoGebra, se conoce y se emplea para tareas concretas, pero su integración se conseguirá cuando se convierta en un recurso más que permita cambiar la metodología de la enseñanza de las matemáticas y permita al profesorado y al alumnado desempeñar otros roles en el aula, favoreciendo aspectos como el descubrimiento o la investigación que tan fácil puede resultar con este software.



## Nota Biográfica



### **Agustín Carrillo de Albornoz Torres**

Licenciado en Matemáticas por la Universidad de Granada, profesor de Educación Secundaria desde 1984, ha sido Catedrático de Educación Secundaria de Matemáticas, en la actualidad en situación de jubilado.

Ha impartido cursos de formación para el profesorado, tanto presenciales como a distancia, sobre distintos aspectos relacionados con la enseñanza de las matemáticas y sobre la utilización de las TIC como recurso didáctico en Centros de Formación del Profesorado de toda España así como en distintas Universidades.

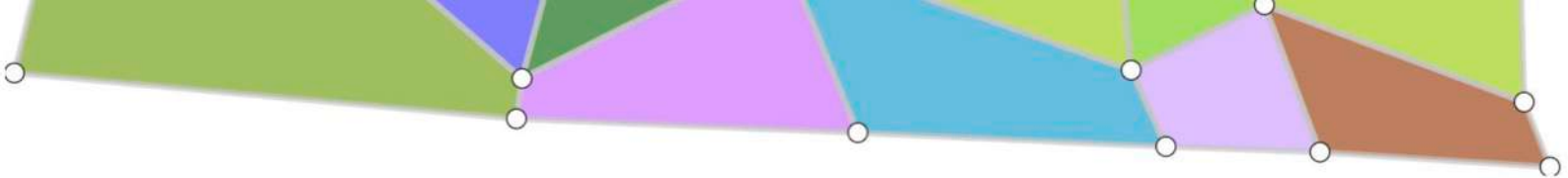
En 2009 participó en la creación del Instituto GeoGebra de Andalucía, del que actualmente es su director.

Ha coordinado e impartido cursos de formación convocados por la Organización de Estados Iberoamericanos (OEI), sobre formación para el profesorado de matemáticas en distintos países y sobre el uso de las TIC, con especial dedicación a GeoGebra. Ha publicado varios libros en la Editorial Ra-Ma sobre las posibilidades didácticas de programas de cálculo simbólico (DERIVE, MATHEMATICA, MAPLE) y de geometría dinámica (CABRI GÉOMÈTRE, GeoGebra), y con la editorial Catarata en la colección “Miradas Matemáticas”, así como artículos en revistas como SUMA, EPSILON o UNIÓN entre otras, relacionados con las aplicaciones de las TIC a la enseñanza de las matemáticas.

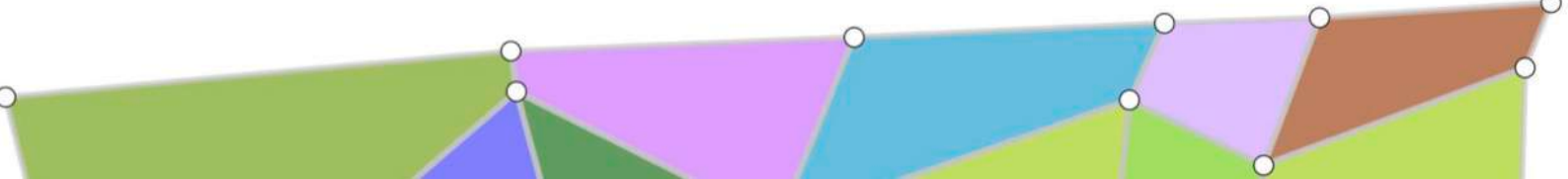
Ha participado en congresos en Bolivia, Chile, Colombia, Cuba, Uruguay, Argentina, Perú, Brasil, Ecuador, República Dominicana, Honduras, Puerto Rico y El Salvador, impartiendo conferencias y cursos.

Secretario general de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FISEM) y secretario general de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM).

---



## Conferência Plenária II - GeoGebra & Prova



28 de outubro  
09:00 GMT  
Sala  
Pedro Nunes  
DMUC

## GeoGebra & Prueba, Conferencia com debate, Moderación

Tomas Recio

Universidad Antonio de Nebrija, Madrid, Espanha



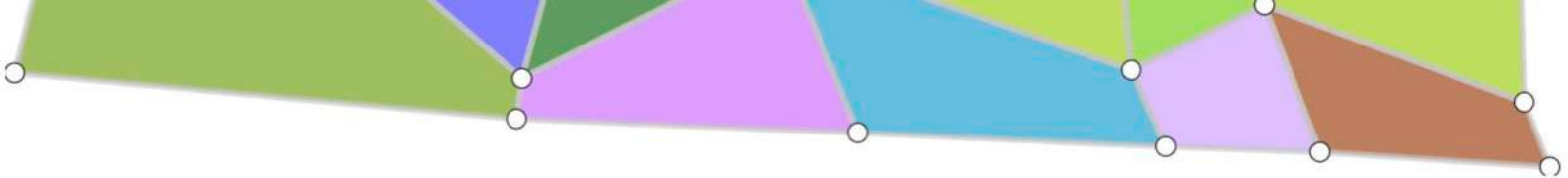
La conferencia del prof. Quaresma (trabajo conjunto con J. Teles, V. Santos y N. Baeta) es especialmente singular, por varios motivos muy relevantes. Así, el Prof. Quaresma es (y lo es desde hace mucho tiempo) uno de los principales investigadores mundiales en el tema de la demostración automática de teoremas de geometría y, en particular, en la consideración de la integración de tales herramientas en los sistemas de geometría dinámica. Pero también resulta de particular interés la elección, por el prof. Quaresma, de GeoGebra y JGEX para ejemplificar el funcionamiento actual de los demostradores automáticos; y la referencia a potenciales mejoras que tales sistemas deberían considerar (o están ya empezando a considerar, como es el caso del comando ShowProof en GeoGebra Discovery <sup>1</sup>).

En todo caso, la importancia de abrir una discusión sobre las consecuencias educativas del tema de la conferencia (el desarrollo de demostradores de teoremas en programas populares de geometría dinámica) ha sido puesta ya de manifiesto por personalidades del mundo educativo como Gila Hanna, por ejemplo, en su reciente trabajo con Xiaoheng Yan, señala:

“GeoGebra ...has gained in popularity over the last twenty years and is now widely used... GeoGebra has recently added an Automated Reasoning Tool (ART) to help students conjecture that a given property holds for a specific geometric object and then to find a proof that their conjecture is true...It is perhaps too early for empirical studies of classroom experience using the enhancements to GeoGebra... While it is reasonable to expect proof technology to foster students' proving abilities, and there is certainly supporting anecdotal evidence, its potential advantages have not yet been systematically assessed. Proof assistants that meet the requirements of these stakeholders....will never be developed in the absence of initiative on the part of mathematics educators and a demonstrated demand fuelled by increased use. Secondly, success also requires new and effective teaching strategies. These two efforts stand in a reciprocal relationship, so that the full benefit of proof assistants will be seen only over time as new teaching strategies effect the demand for new tool features and vice versa. The responsibility for both efforts

---

<sup>1</sup>veáse, por ejemplo, <https://adg2023.matf.bg.ac.rs/downloads/slides/ShowingProofs/ZoltanRecioVelez.pdf>



rests squarely on the shoulders of educators...The key is to make a start, beginning with exploratory studies of the potential of these new tools..”

Tal vez estos párrafos y estas últimas palabras

“La clave es empezar, iniciando estudios que exploren el potencial de estas nuevas herramientas...”

puedan contribuir significativamente al debate que, ineludiblemente, suscita la conferencia del Prof. Quaresma!!

## Referencias

Hanna, G., & Yan, X. (2021). Opening a discussion on teaching proof with automated theorem provers. *For the Learning of Mathematics*, 41(3), 42-46. ( Preprint disponible en [https://www.researchgate.net/publication/356223490\\_Opening\\_a\\_discussion\\_on\\_teaching\\_proof\\_with\\_automated\\_theorem\\_provers#fullTextFileContent](https://www.researchgate.net/publication/356223490_Opening_a_discussion_on_teaching_proof_with_automated_theorem_provers#fullTextFileContent) )

## Nota Biográfica



**Tomás Jesús Recio Muñiz**

Is Magistral Profesor at the Grupo Nebrija de Matemáticas y sus Aplicaciones, in the Departamento de Ingeniería Industrial/Escuela Politécnica of the University Antonio de Nebrija, Madrid. Tomas does research in Automated Theorem Proving in Geometry, Computational Algebraic Geometry, and Mathematics Education. His current project is “Theorem proving tools in GeoGebra.”

---

28 de outubro  
09:05 GMT  
Sala  
Pedro Nunes  
DMUC

## Explorando Sistemas de Geometria Dinâmica com Demonstradores de Teoremas Integrados

Pedro Quaresma

CISUC / Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra, Portugal, <sup>2</sup>

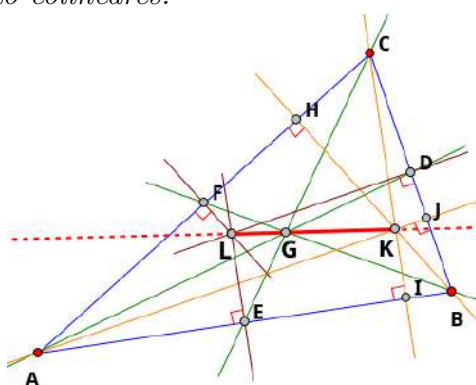


Devido às suas propriedades formais, lógicas e espaciais, a geometria é adequada para a exploração de novos conhecimentos, novas conjecturas que surgem de diferentes construções e novas conjecturas sobre construções já conhecidas, para o explorar das demonstrações de novas e velhas conjecturas.

Com um Sistema de Geometria Dinâmica (DGS) obtemos um ambiente onde construções geométricas não são mais figuras estáticas, configurações fixas de pontos, linhas e arcos, mas conjuntos desses elementos geométricos relacionados entre si por propriedades geométricas. Construções geométricas são construídas usando pontos, os quais podem ser movidos para qualquer posição no plano Euclidiano. Outros elementos geométricos são adicionados à construção tendo em atenção as propriedades geométricas, entre elementos, próprias da construção. Os pontos livres podem ser movidos dinamicamente, de acordo com seus graus de liberdade, e toda a construção se moverá, sempre preservando as propriedades que aí foram definidas.

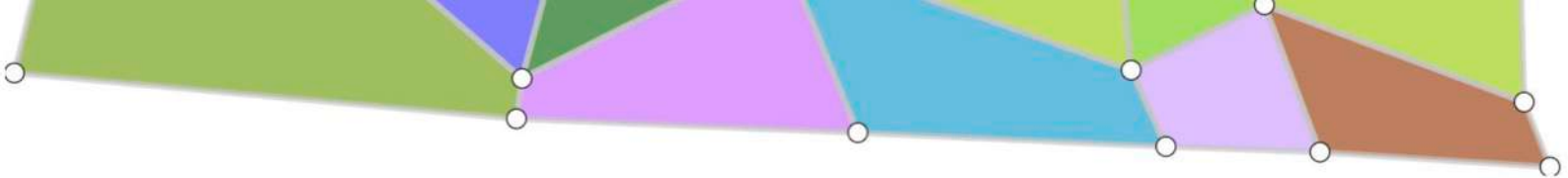
Usando um DGS, é fácil formular conjecturas geométricas.

**Theorem 1 (Recta de Euler)** *Em um qualquer triângulo o ortocentro ( $K$ ), centróide ( $G$ ) circuncentro ( $L$ ) são colineares.*



Este teorema está em linha com os novos programas de matemática para o 10.º ano, em Portugal.

<sup>2</sup>Trabalho conjunto com: Joana Teles, Vanda Santos e Nuno Baeta



Depois de completada a construção podemos mover qualquer um dos vértices do triângulo, verificando, visualmente, que os pontos permanecem sempre colineares. Esta “demonstração visual” não é uma demonstração formal, mas somente uma verificação da validade da conjectura para um conjunto finito de configurações.

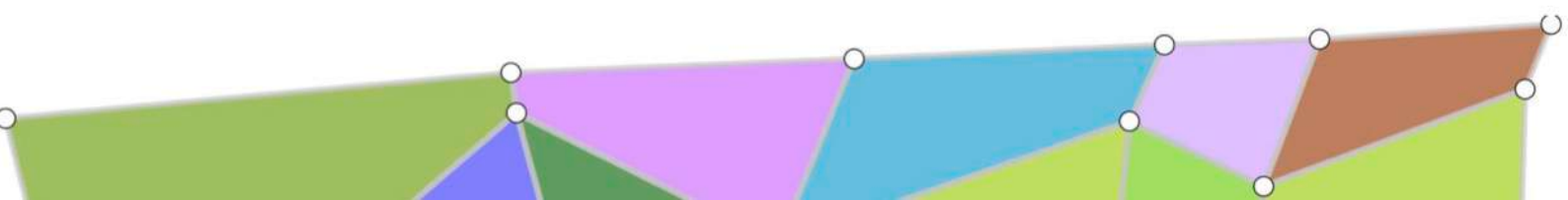
Para uma demonstração formal é necessário recorrer a um demonstrador automático de teoremas geométricos (GATP), o qual nos permite obter uma demonstração formal da conjectura. Vários métodos têm sido estudados e desenvolvidos para demonstrar automaticamente teoremas geométricos. Há duas abordagens distintas, a geométrica e a algébrica. Os demonstradores sintéticos (geométricos) usam sistemas axiomáticos, sendo capazes de construir uma demonstração legível tanto por alunos e professores, como por especialistas na área. Perdem em eficiência assim como em abrangência. Os métodos algébricos desenvolvem as demonstrações através de manipulações algébricas, são mais eficientes do que os sintéticos e mais abrangentes. O preço a pagar, quando se usam os métodos algébricos, é a ausência de demonstrações geométricas, mesmo quando produzem uma demonstração algébrica (e não um simples, sim/não), as mesmas são somente legíveis por especialistas (Quaresma, 2022).

Nos dois ambientes seguintes, em que as duas componentes, DGS e o GATP, estão presentes, o *GeoGebra* e o *JGEx*, analisa-se as suas possibilidades de exploração de novas conjecturas e demonstrações usando para tal o teorema acima mencionado, tendo em mente a sua utilização em um ambiente de aprendizagem (Quaresma,2022; Quaresma & Santos,2022; Teles *et al.*, 2023).

## ***GeoGebra* e o Proveedor Portfólio**

O *GeoGebra* é um DGS bem conhecido. O “Portfolio Prover” é um conjunto de ferramentas no *GeoGebra* que permite aos utilizadores demonstrar formalmente conjecturas geométricas. O *Portfolio Prover* usa uma variedade de métodos, como o *método de Wu*, o *método Buchberger-Kapur*, o *método da Área* e o *método da verificação exata de Recio*. Para um determinado problema, o *Portfolio Prover* seleciona um método mais apropriado. No futuro, o objectivo de seus programadores, é implementar um comando *ShowProof* que apresente a demonstração completa de um teorema em um formato legível para alunos e professores (Kovacs *et al.*,2022).

**Teorema da Recta de Euler** Para utilizar a ferramenta *Relation* do *GeoGebra*, o utilizador deve primeiro selecionar os objetos que deseja analisar e depois “clique” no botão *Relation* (ícone na barra de ferramentas). Alternativamente, o utilizador pode usá-lo digitando, na linha de comando, *Relation(object, object,...)*. Em ambos os casos, o *GeoGebra* irá exibir uma caixa de diálogo que fornece informações sobre a relação entre os objetos selecionados. Este comando permite ao utilizador determinar numericamente (isto é, com base nas coordenadas algébricas atribuídas



a cada ponto) se a referida propriedade é verdadeira ou não.

Se houver suporte para uma demonstração formal irá ser visível um botão rotulado “CHECK SYMBOLICALLY”. Isto significa que a conjectura pode ser validada formalmente, e não apenas para as coordenadas geométricas exibidas na construção. Clicar neste botão exibirá outra caixa de diálogo com mais detalhes sobre a relação, como as condições de não-degenerescência.

Na Figura 1, é exibida a primeira caixa de diálogo do comando *Relation* à esquerda. À direita, a caixa de diálogo que aparece após clicar o botão “CHECK SYMBOLICALLY” é mostrado. As informações fornecidas por essas duas caixas é semelhante ao comando *ProveDetails*.

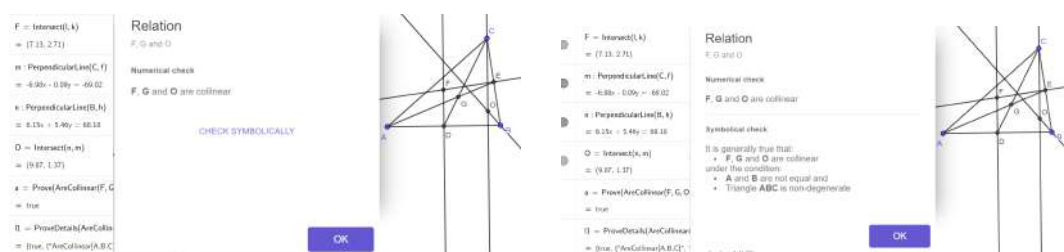


Figura 1: Recta de Euler em *GeoGebra 6*

## JGEx

*JGEx* é um software que combina um DGS e alguns GATP para criar e manipular dinamicamente construções geométricas, permitindo de seguida a sua demonstração formal, com suporte para uma interpretação visual das mesmas. Os GATP incluídos são: *método da Área*, *método do ângulo total*, *método das Bases de Dados Deductivas em Geometria* (GDD), *método de Wu* e *método das Bases de Gröbner* (Ye et al., 2011).

**Teorema da Recta de Euler** Feita a construção é possível seleccionar a conjectura escolhendo a propriedade e os pontos envolvidos nela. De seguida pode-se escolher o GATP que se pretende usar. Escolhendo o demonstrador GDD, a demonstração consiste em 27 passos, conforme se pode ver na figura 2. No lado esquerdo da figura, podemos ver os detalhes da construção e da conjectura que se pretende demonstrar, o que é destacado visualmente clicando em “To prove...” (aparece um segmento de linha vermelha conectando os três pontos). Cada passo é justificado pelo uso das hipóteses, do conhecimento já inferido, ou pela aplicação de uma das regras de inferência implementadas. No lado direito da figura, podemos ver mais de perto o *Passo 19*. Ao clicar no resultado da igualdade do ângulo, aparece uma janela com sua justificação, e os ângulos são marcados na figura. Neste passo a regra

2 foi usada, o clicar na etiqueta referente a esta regra vai exibir sua definição, em uma sub-janela.

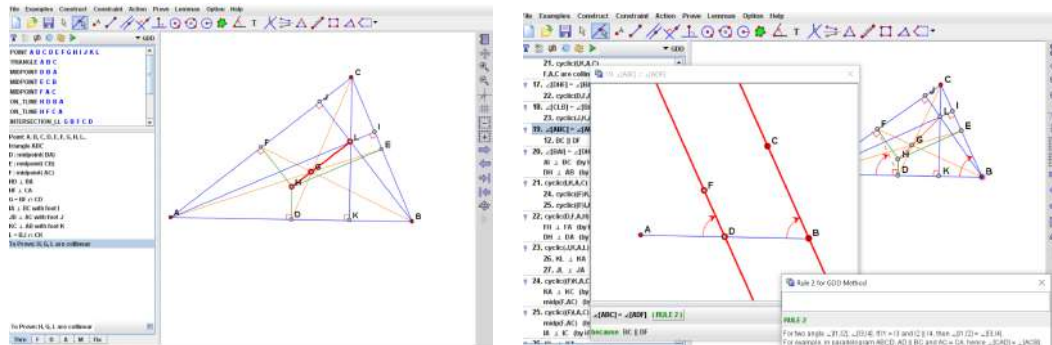
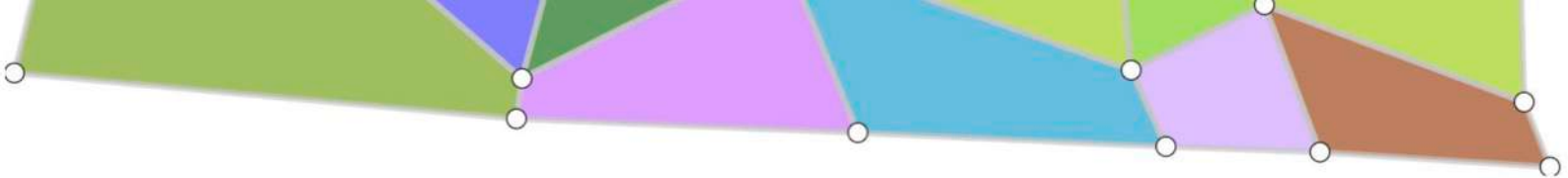


Figura 2: Recta de Euler, em *JGEx*, utilizando Método das Bases de Dados Geométricas

Uma melhoria significativa, para uso posterior pelos professores, seria a capacidade de selecionar o conjunto apropriado de regras implementadas, permitindo a sua adaptação ao escalão de ensino em que se pretende desenvolver o trabalho (Baeta & Quaresma, 2023).

## Referências

- Baeta, N., & Quaresma, P. (2023). Towards a geometry deductive database prover. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, (pp. 1-13). <https://doi.org/10.1007/s10472-023-09839-0>
- Kovács, Z., Recio, T., & Vélez, M. P. (2022). Automated Reasoning Tools with GeoGebra: What Are They? What Are They Good For?. In *Mathematics Education in the Age of Artificial Intelligence: How Artificial Intelligence can Serve Mathematical Human Learning* (pp. 23-44). Cham: Springer International Publishing.
- Quaresma, P. (2022a). Evolution of Automated Deduction and Dynamic Constructions in Geometry. In *Mathematics Education in the Age of Artificial Intelligence: How Artificial Intelligence can Serve Mathematical Human Learning* (pp. 3-22). Cham: Springer International Publishing.
- Quaresma, P., & Santos, V. (2022). Four Geometry Problems to Introduce Automated Deduction in Secondary Schools. *EPTCS*, 354:(pp. 27-42). Open Publishing Association.
- Santos, V., & Quaresma, P. (2021). Exploring Geometric Conjectures with the help of a Learning Environment-A Case Study with Pre-Service Teachers. *The Electronic Journal of Mathematics and Technology*, 16,(1).



Teles, J., Santos, V., & Quaresma, P. (2023). A rule based theorem prover: an introduction to proofs in secondary schools. *EPTCS*, 375:(pp. 24-37). Open Publishing Association.

Ye, Z., Chou, SC., & Gao, XS. (2011). An Introduction to Java Geometry Expert. In: Sturm, T., Zengler, C. (eds) Automated Deduction in Geometry. ADG 2008. *Lecture Notes in Computer Science()*, vol 6301. (pp. 189-195). Springer, Berlin, Heidelberg. [https://doi.org/10.1007/978-3-642-21046-4\\_10](https://doi.org/10.1007/978-3-642-21046-4_10)

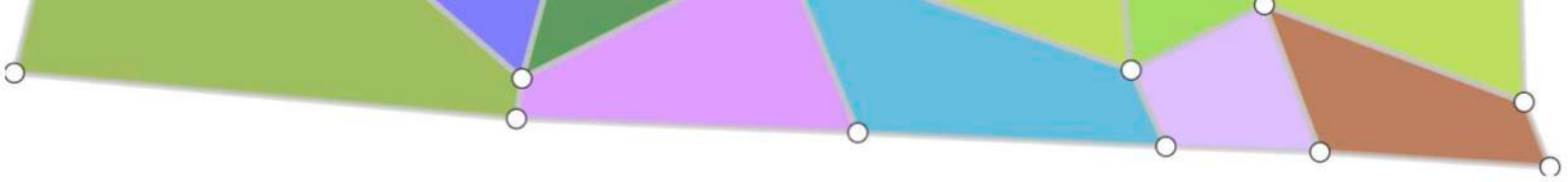
## Nota Biográfica



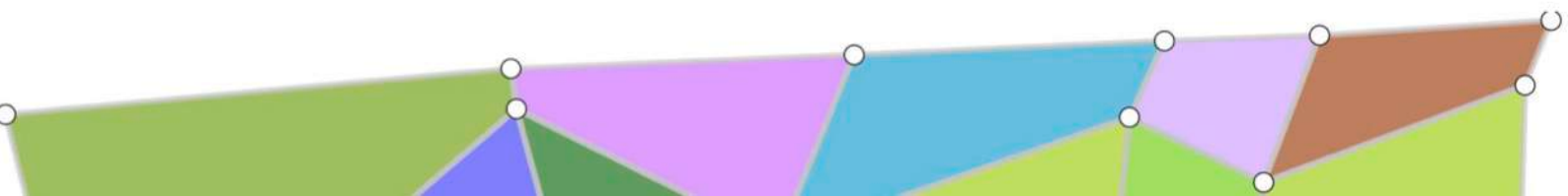
### Pedro Quaresma

Doutorado em Informática, área de conhecimento de Fundamentos da Computação, pela Universidade do Minho em 1998, tem 79 trabalhos publicados sob revisão de pares, dos quais 16 artigos em revistas indexadas (ISI e/ou Scopus), 10 artigos nas *Lecture Notes in Artificial Intelligence* (LNAI), 6 capítulos de livro, 2 dos quais por convite, tem também 16 publicações como editor dos quais 1 volume das LNAI e 8 volumes das Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science (EPTCS). Dirige o grupo de trabalho *GeoTiles*, integrado no grupo de investigação *Cognitive and Media Systems* do centro de investigação *Center for Informatics and Systems of the University of Coimbra* (CISUC).

---



# Mesa Redonda - GeoGebra em Aula



28 de outubro  
16:00 GMT  
Sala  
Pedro Nunes  
DMUC

## “GeoGebra em aula ...” - Moderadora

Ana Breda

Universidade de Aveiro, Portugal



O panorama laboral do século XXI relega para segundo plano competências exclusivamente manuais ou rotineiras. Em vez disso, enfatizam-se a capacidade de comunicar-se de forma eficaz, a gestão criteriosa, a partilha e análise de informações, a abordagem colaborativa e inovadora na resolução de problemas, e o domínio tecnológico que potencia a geração de novos conhecimentos e fomenta a capacidade crítica, criativa e produtiva (McKelvey School of Engineering, 2022)

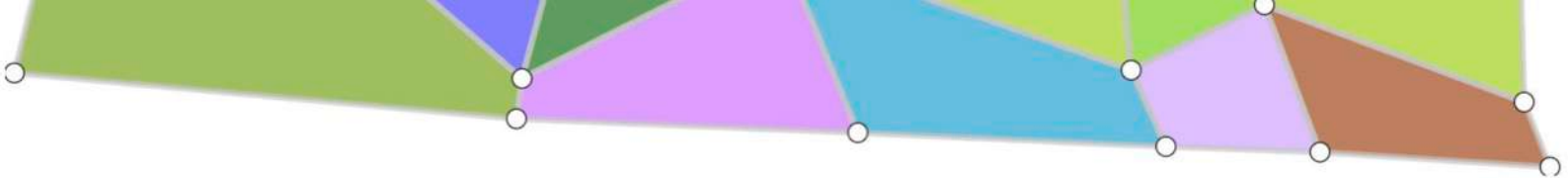
A evolução tecnológica, que nos acompanha, tem provocado uma mudança significativa em diversas áreas profissionais, fazendo emergir novas profissões, difíceis de imaginar. Temos como exemplos os gestores de redes sociais, os profissionais voltados ao marketing digital focados na utilização e otimização de motores de busca, e até mesmo os pilotos de drones. Quem poderia antecipar, por exemplo, o papel crucial que os drones desempenhariam em conflitos como o que se observa entre a Rússia e a Ucrânia?

Relativamente à importância da matemática no contexto da sociedade digital, esta é simultaneamente omnipresente (está em todo o lado) e é discreta. A matemática presente nos inúmeros dispositivos tecnológicos que usamos no nosso quotidiano opera de forma “oculta” para quase todos os que os utilizam.

As operações matemáticas ensinadas nos diversos graus de ensino, do primário ao superior, podem ser executadas, na sua grande maioria, por computadores. Contudo, isto não implica que os fundamentos matemáticos que sustentam esses processos deixem de ser vitais para a aprendizagem matemática. Antes, sugere a necessidade de (re)definir, para cada nível de ensino, os conteúdos matemáticos relevantes e a(s) forma(s) mais adequadas para os ensinar.

No panorama atual, surgem várias questões que avaliamos como fundamentais:

1. Face às orientações oficiais de vários países visando a promoção de uma atitude favorável à aprendizagem da Matemática, como interpretar o aparente desapego dos jovens, a nível global, por esta área do conhecimento?
2. Quais os fatores chave que influem a uma postura positiva dos alunos em relação à matemática? Estará a integração da tecnologia em sala de aula entre estes fatores?
3. Estará a sociedade educativa a comunicar de forma eficaz a importância e a função da matemática na era atual?

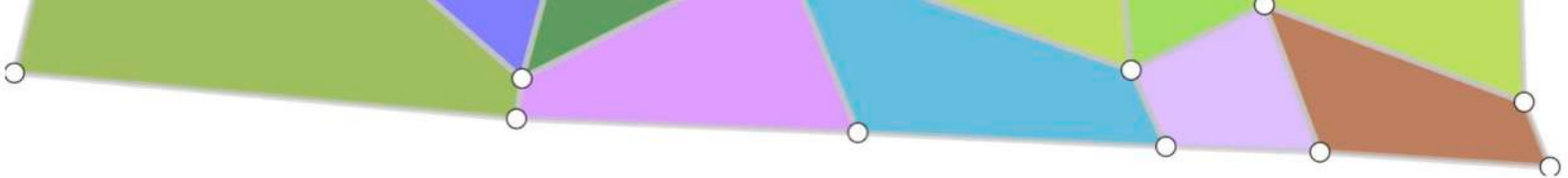
- 
4. Estará a abordagem instrucional alinhada com as expectativas e interesses da nova geração?
  5. Ao integrar a tecnologia nas metodologias de ensino, em particular, o *GeoGebra* que oportunidades e obstáculos se apresentam?
  6. Como podem os docentes desenvolver uma reflexão mais crítica sobre a utilização de novas ferramentas, nomeadamente o *GeoGebra*, tendo em consideração o impacto, benefícios e limitações no seu desenvolvimento profissional e na aprendizagem dos estudantes?

Um dos recursos mais comuns para integração de tecnologia no ensino é o software de geometria dinâmica *GeoGebra*, uma ferramenta amplamente por todo o mundo. Trata-se de um programa que possibilita a combinação simultânea de representações gráficas (2D e 3D) com algébricas, num ambiente interativo e amigável. Esta particularidade vai ao encontro do preconizado em vários estudos, (Biçer, 2021; Post & Prediger, 2022), que ressaltam a importância do uso de múltiplas representações não só para a introdução de conceitos, mas e sobretudo para a interligação destes, realçando que a transição entre diferentes representações fornece um meio privilegiado para o aprofundamento e compreensão desses mesmos conceitos e de exploração de relações matemáticas.

Mais do que um meio que permite a mera visualização de objetos, o *GeoGebra* promove, nos estudantes, o desenvolvimento dos pensamento e raciocínio matemáticos e potencia os pensamentos criativo e crítico. O *GeoGebra* integra ainda uma outra funcionalidade poderosa, a funcionalidade CAS, permitindo, entre outras, a manipulação simbólica de expressões matemáticas.

Para assegurar uma utilização eficaz deste software na sala de aula, é essencial que os professores possuam uma base científica robusta e recebam formação específica para a sua operacionalização. A falta de uma capacitação adequada pode conduzir a uma subutilização das capacidades da ferramenta ou, em cenários mais problemáticos, ao seu uso de modo inapropriado. Embora exista uma vasta oferta de cursos online gratuitos de *GeoGebra*, a singularidade dos sistemas educativos de cada país enfatiza a necessidade de formações adaptadas a contextos específicos (Dos Santos, Silveira, & Lavicza, 2022). Além disso a sua integração nos processos de ensino e aprendizagem da matemática está intrinsecamente ligada a metodologias de ensino ativas, muitas vezes desconhecidas de muitos professores ou com interpretações dúbias, ou mesmo erróneas quanto ao seu real significado (Breda, Garcia & Santos, in press).

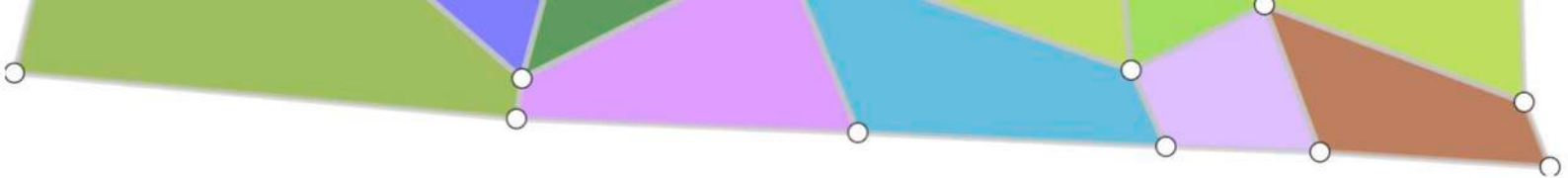
A interação entre professores de matemática e investigadores especializados em educação matemática é da maior importância. A partilha de experiências, metodologias e estudos relacionados com a aplicação do *GeoGebra* em sala de aula promove uma contínua melhoria e adaptação das práticas pedagógicas. Esta troca



de conhecimentos adquire ainda maior relevância quando efetuada com professores e investigadores provenientes de distintos contextos culturais e educativos. Uma multiplicidade diferenciada de perspectivas associada a um debate construtivo possibilita uma compreensão mais profunda e abrangente dos desafios e potencialidades da integração eficaz do *GeoGebra* em sala de aula, adaptada às distintas realidades educacionais.

## Referências

- Biçer, A. (2021). Multiple representations and mathematical creativity. *Thinking Skills and Creativity*, 42, 100960. <https://doi.org/10.1016/j.tsc.2021.100960>
- Breda, A., Garcia V., Santos, N. (in press) Cape Verde Teachers' Perception of STEAM Education, *International Journal of Technology in Education*.
- Dos Santos Dos Santos, J. M., Silveira, A., & Lavicza, Z. (2022). Abordagem STEAM e GeoGebra - Aprendizagem e ensino das Ciências na formação de professores de Cabo Verde. *Sensos-E*, 9 (2), 58–71. <https://doi.org/10.34630/sensose.v9i2.4302>
- McKelvey School of Engineering. (2022, October 17). 21st century skills that every learner needs. [Blog post]. Retrieved from <https://mckelveyconnect.wustl.edu/blog/2022/10/17/21st-century-skills-that-every-learner-needs/>
- Post, M., & Prediger, S. (2022). Teaching practices for unfolding information and connecting multiple representations: the case of conditional probability information. *Mathematics Education Research Journal*. <https://doi.org/10.1007/s13394-022-00431-z>



## Nota Biográfica



### **Ana Maria Reis D'Azevedo Breda**

Professor Associado com Agregação da Universidade de Aveiro, doutorada em Matemática Pura, na especialização de Geometria e Topologia, pelas Universidades de Southampton, Reino Unido, e Universidade de Coimbra, Portugal. É professora associada com agregação do Departamento de Matemática (DMat) da Universidade de Aveiro. Coordenadora da Linha Temática GEOMETRIX, do Centro de Investigação e Desenvolvimento em Matemática e Aplicações (CIDMA), membro do ICMI-Portugal, é autora de diversas publicações científicas e didáticas tendo ocupado vários cargos, dos quais se destacam os seguintes: presidente da Sociedade Portuguesa de Matemática da Região Centro, Vice Presidente da Sociedade Portuguesa de Matemática, presidente do Conselho Diretivo e coordenadora da Comissão Científica do DMat e diretora da licenciatura em Matemática. Responsável pelo Percurso em Matemática Educacional do Programa Doutoral em Matemática da Universidade de Aveiro.

---

# ***GeoGebra* em aula em Angola: uma abordagem na visão de contributo para a predisposição dos alunos para a Matemática.**

28 de outubro  
16:00 GMT  
Sala  
Pedro Nunes  
DMUC

**Kengana Andre João**

Escola Superior Pedagógica do Bengo, Angola



## **Contexto**

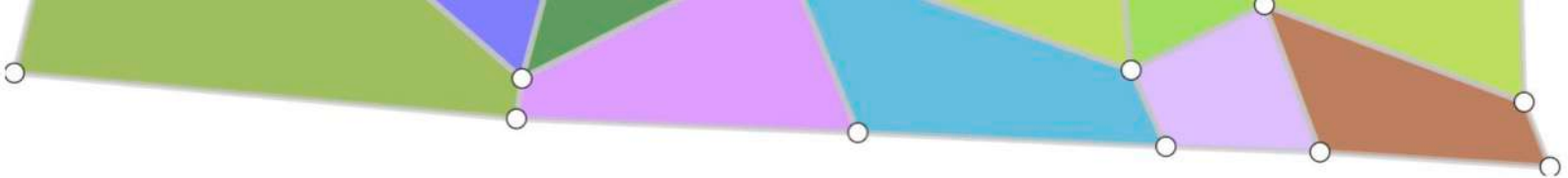
Desde a década dos anos 80, Angola tem vivido uma situação incaracterística, onde poucos jovens interessam-se em optar por realizar cursos médios ou superiores onde a disciplina de matemática é base. Tudo isso acontece por estes não terem desenvolvido o gosto ou ainda predisposição para a matemática logo nas classes iniciais ou nas classes intermédias.

Nos últimos anos, o governo de Angola, por intermédio do Presidente da República, o próprio Ministério da Educação, têm se desdobrado em sucessivos apelos e incentivos para que os jovens adiram a esses cursos com grande pendor em Matemática, mas a situação atual ainda não é das melhores. É preciso realçar que essa situação pode ter como causa a forma como o processo de Ensino e aprendizagem da matemática em Angola é caracterizado, isto é, fortemente pela transmissão, absorção e reprodução de conceitos e procedimentos matemáticos, assim como exercícios de aplicação destes conceitos e procedimentos.

A característica do processo de Ensino e aprendizagem da matemática em Angola, descrita no parágrafo anterior, começa a ser desenvolvida logo nos primeiros anos de escolaridade, ou seja, nos primeiros anos que o aluno entra em contacto com a matemática como disciplina. Como consequência desta abordagem, o aluno começa a criar concepções de uma disciplina muito rotineira, onde o professor é o único detentor do conhecimento e o aluno como um mero recetor e reproduzidor do conhecimento, despoletando assim o desinteresse, diminuição da curiosidade e criatividade ou ainda predisposição para matemática.

Em linha com Sá (1995), citado por Gaspar (2015), o aluno para compreender e envolver-se em diferentes atividades e tarefas matemática é-lhe requerido o desenvolvimento de uma certa predisposição para a matemática.

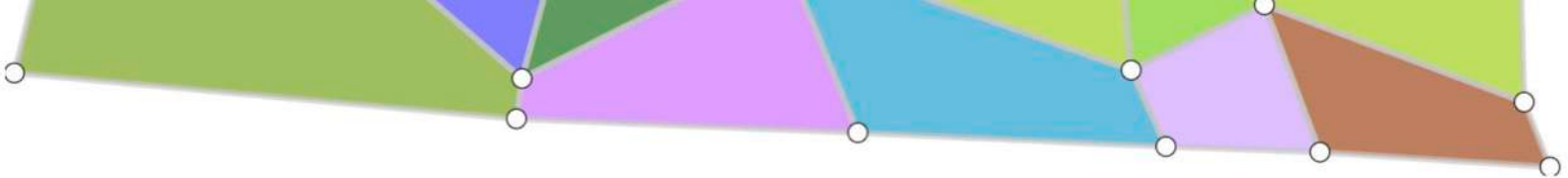
Por sua vez, em 2018 a Secretaria de Estado da educação de Portugal terá homologado um documento curricular relativo às Aprendizagens Essenciais no Ensino básico, no caso específico da matemática apresenta oito objetivos que todos os alunos devem conseguir atingir, destes é notório em primeiro lugar o objetivo em que os alunos devem:



Desenvolver uma predisposição positiva para aprender Matemática e relacionar-se de forma produtiva com esta disciplina nos diversos contextos em que surge como necessária. Isto pressupõe a possibilidade de crianças e jovens aprenderem Matemática usufruindo dela com gosto e acompanhadas de um sentimento crescente de autoconfiança na sua capacidade de lidar de modo autónomo com a Matemática. O gosto e a autoconfiança são ambos fatores essenciais que interferem positivamente com a predisposição para a aprendizagem, pelo que o seu desenvolvimento deve ser estrategicamente cuidado, de forma continuada, no desenrolar do processo de ensino da Matemática (Despacho normativo n.º6944-A/2018,2018).

Em Angola, infelizmente, ao ler o programa do Ensino primário elaborado pelo Instituto Nacional de avaliação e de Desenvolvimento da educação (INADE), em nenhuma página se encontra um objetivo igual ou similar que orienta para se desenvolver uma predisposição para os alunos aprenderem a matemática ou ainda criar o gosto e a autoconfiança na aprendizagem desta disciplina. Desenvolver nos alunos o interesse, o gosto ou a predisposição para a matemática não é uma situação fácil, ou que se resume na introdução deste objetivo nos programas, mas é na prática contextualizada que o professor deve procurar criar um bom ambiente e diversificar recursos de ensino para que os alunos possam aprender a matemática com gosto (Jacinto,2021). A falta de interesse, o gosto, criatividade e de curiosidade para aprender a matemática é um dos caminhos que pode propiciar o insucesso da matemática escolar, mas “O uso de ferramentas matemáticas e de tecnologia como recursos essenciais para ajudar os alunos a aprender e perceber as ideias matemáticas, raciocinar matematicamente e comunicar o seu raciocínio” (NCTM,2017, p.79), quando for bem empregue pelo professor, pode devolver o interesse, criatividade e curiosidade no aluno ou a predisposição em aprender a matemática, reabrindo assim o caminho para o sucesso da matemática escolar.

Apegando-se nas ideias descritas nos últimos dois parágrafos anteriores, assim como em uma das conclusões resultantes de uma recente investigação relacionado ao uso do software *GeoGebra* em sala de aula, que “despertou o interesse dos alunos por se tratar de uma forma inovadora de ensino, e eles tiveram a oportunidade de participar, de forma ativa, como principais responsáveis pela construção do seu aprendizado” (Bohrer & Tinti,2021, p.86). Assim, pretende-se com esta comunicação escrita, apresentar alguns resultados da implementação, que ainda decorre, de um projeto “*GeoGebra* em salas de aulas para desenvolver a predisposição dos alunos para a matemática” levado acabo pelo Instituto *GeoGebra* de Angola, envolvendo escolas do 1.º ciclo do ensino secundário angolano (correspondente ao 3.º ciclo do ensino básico português) e segundo Ciclo do Ensino Secundário (correspondente ao ensino secundário português). Neste texto apresenta-se a informação inicial obtida de forma parcial, sobre o gosto pela matemática que os alunos da 10ª classe do



Instituto Médio de Saúde do Dande no município do Dande e da 8ª classe na escola do Iº ciclo do Ensino Secundário n.º 811, município do Pango-Aluquém passaram a ter após de resolverem as mesmas tarefas com recurso ao *GeoGebra* assim como a vontade, perseverança e interesse que tiveram em explorar o software *GeoGebra* como recurso alternativo para resolverem as mesmas tarefas feitas no papel.

Os principais objetivos deste projeto é utilizar o *GeoGebra* para desenvolver nos alunos uma predisposição positiva para aprender Matemática e relacionar-se de forma produtiva com ela, usar o *GeoGebra* para criar o gosto e autoconfiança pela matemática nas crianças e jovens a fim de que interfira positivamente na predisposição para a aprendizagem desta disciplina, recorrer-se ao *GeoGebra* para envolver os alunos para uma predisposição para a matemática muito além do que gostar da disciplina da matemática.

Num processo de investigação é importante esclarecer de forma objetiva as opções metodológicas utilizadas e se possível a razão dessa escolha (Gomes & Dos Santos, 2021), neste sentido, tendo em conta os objetivos que se pretendem alcançar no projeto que norteia esta investigação, optou-se numa investigação de natureza qualitativa por ser “um método multifacetado envolvendo uma abordagem interpretativa e naturalista do assunto em estudo. Isto significa que os investigadores qualitativos estudam as coisas no seu ambiente natural numa tentativa de interpretar o fenómeno” (Denzin e Lincoln, 1994, p. 2; citado por Vale, 2004, p.4)

A investigação decorre num primeiro momento com 25 alunos da 10.ª classe do Instituto Médio de Saúde do Dande, devido à escassez de computadores, por sua vez foram selecionados intencionalmente quatro estudantes com um nível de familiarização com software avançado e 18 alunos repartidos em dois grupos da escola do Iº ciclo do Ensino Secundário n.º 811, município do Pango-Aluquém.

A recolha de dados é uma etapa fundamental na investigação, para o efeito são empregues uma diversidade de técnicas de recolha de dados. Atendendo a natureza e os objetivos da presente investigação, os dados foram obtidos por meio de um questionário e recolha documental de algumas produções dos alunos durante as aulas.

Atendendo os objetivos desta comunicação, apresenta-se por meio das seguintes figuras a tarefa de construir a função  $f(x) = -2x$  realizada em papel pelos alunos da 8ª classe na escola do Iº ciclo do Ensino Secundário n.º 811, município do Pango-Aluquém e posteriormente a expressão da vontade, perseverança e interesse que os mesmos alunos tiveram em explorar o software *GeoGebra* como recurso alternativo para construírem a mesma função feita em papel.

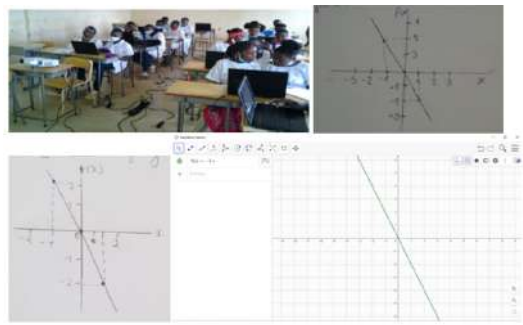
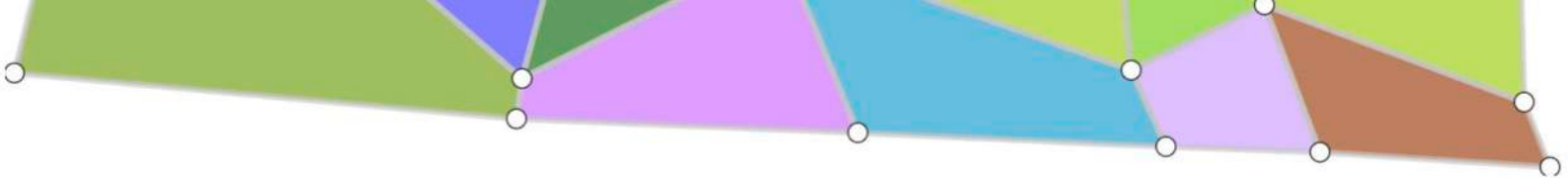


FIGURA 1: Construções dos alunos da  $f(x) = -2x$  em papel com recurso a *GeoGebra* .

Conseguiu-se colher também informação sobre a predisposição desses alunos para a matemática, a partir do momento que tiveram de comparar o trabalho feito a papel e com *GeoGebra* viu-se claramente na suas tendência de refletir sobre os seus próprios pensamentos, ou seja, seus trabalhos feito a papel, a forma como respondiam às perguntas de reflexão feitas pelo professor e por fim, a forma como conseguiram concluir que os gráficos feitos a papel não eram gráficos cartesianos monométricos, assim como a disposição dos números no eixo positivo das ordenadas do gráfico apresentado no canto superior direito estavam mal representadas.

Em seguida apresenta-se também por meio das seguintes figuras a tarefa de construir a função  $f(x) = x^2 - 4x + 3$  realizada em papel pelos alunos da 10.<sup>a</sup> classe do Instituto Médio de Saúde do Dande e posteriormente a expressão da vontade, perseverança e interesse que os mesmos alunos tiveram em explorar o software *GeoGebra* como recurso alternativo para construírem a mesma função feita em papel.

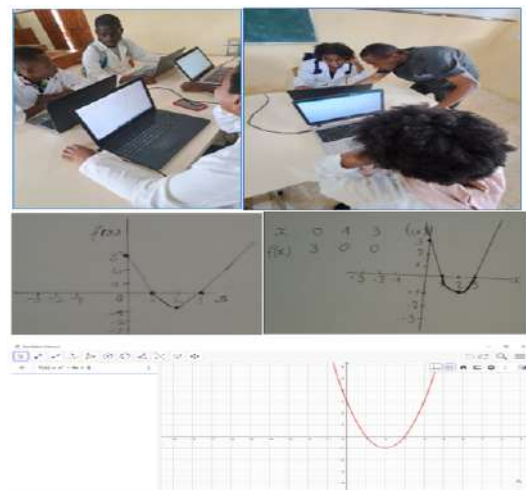
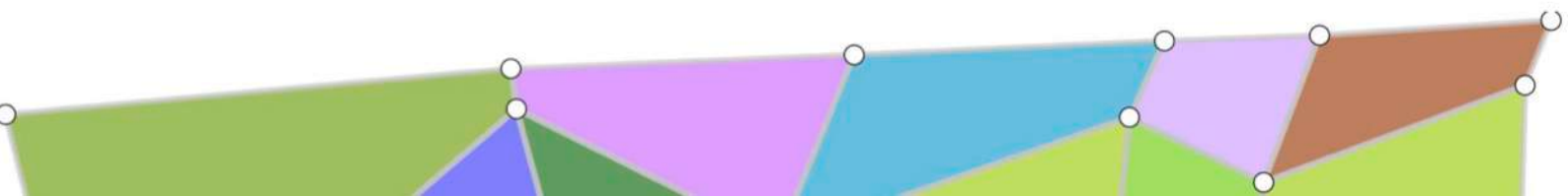


FIGURA 2: Construções dos alunos da  $f(x) = x^2 - 4x + 3$  em papel e em *GeoGebra* .

De forma análoga à análise anterior, com estes alunos também conseguiu-se colher



informação sobre a predisposição deles para a matemática, a partir do momento que tiveram de comparar o trabalho feito a papel e com *GeoGebra*, viu-se claramente na suas tendência de refletir sobre os seus próprios pensamentos, ou seja, seus trabalhos feito a papel, a forma como respondiam às perguntas de reflexão feitas pelo professor e por fim, a forma como conseguiram concluir que os gráficos feitos a papel não eram gráficos cartesianos monométricos, assim como a curva do gráfico feito a papel não era perfeito como se podia ver no *GeoGebra*.

O facto do professor ter dado a oportunidade nos alunos experimentarem meios alternativos de aprendizagem e por estes avaliarem os seus próprios pensamentos através das duas construções feitas com recursos diferentes, assim como com base nessa análise eles próprios terem detetado erros numa das construções e encontrarem por si só também a solução, esta experiência reativou o gosto, interesse de aprender a matemática com recurso ao *GeoGebra*, como pode ver-se nos depoimentos apresentados por eles no questionário a seguir.

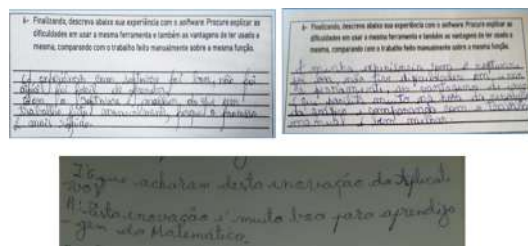
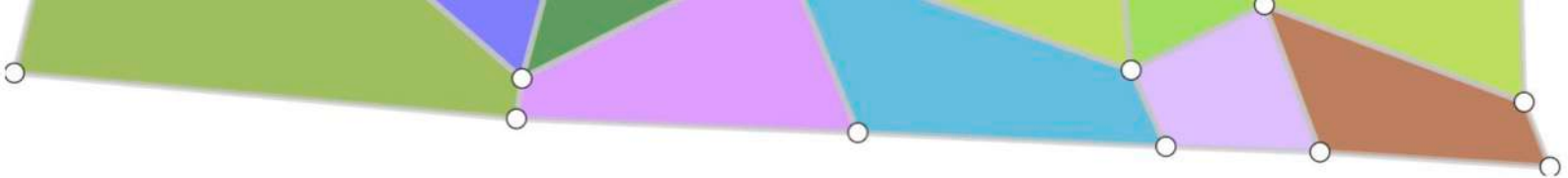


FIGURA 3: Resposta dos alunos sobre aprendizagem da matemática com *GeoGebra*

Conclusões: Tendo em conta a análise feita as produções dos alunos, o questionário por eles respondidos, pode concluir-se que o uso do *GeoGebra* nas aulas de matemática quando bem empregue, pode desenvolver uma predisposição positiva para aprender Matemática, partindo pelo gosto e a autoconfiança naquilo que produzem o dizem ao longo do processo de construção dos seus conhecimentos. Por outra, com o uso do *GeoGebra* como meio-alternativo dos meios tradicionais, conseguiu-se criar as bases na inclinação dos alunos para observar e refletir sobre o seu próprio pensamento e desempenho.

## Referências

- Bohrer, A., & Tinti, D. S. (2021). Análise das Dificuldades de Alunos da Educação de Jovens e Adultos ao Realizarem Atividades Utilizando o *GeoGebra* no Smartphone. *Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo*, 10 (2), 73-88.
- Despacho normativo n.º 6944-A/2018, 2018 da Secretaria de Estado da educação de Portugal. (2018). Diário da República: II Série, n.º 8815/85.
- Gaspar, I. D. (2015). Prática de Ensino Supervisionada no 1.º e 2.º Ciclo do Ensino



Básico: A influência dos Jogos Matemáticos na Predisposição dos Alunos para a Matemática e na sua Aprendizagem (Dissertação de Mestrado). Escola Superior de Educação de Lisboa.

Gomes, M. C., & Dos Santos, J. M. (2021). Classificação de ângulos através de uma estória em aulas de apoio a alunos com dificuldade de aprendizagem. *Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo*, 10(1),19-48.

Jacinto, H.(2021). Gostar de matemática, é caso raro? *Revista de Educação e Matemática*, 161(2021),1.

NCTM (2017). Princípios para a ação: Assegurar a todos o sucesso em matemática. (4.ed.). APM.

Vale, I. (2004). Algumas notas sobre investigação qualitativa em educação matemática: o estudo de caso. *Revista da ESE*, 5, 171-202.

## Nota Biográfica



### Kengana Andre João

Doutor em Ciências Pedagógicas pela Universidad Central “Marta Abreu” de las Villas (Cuba). Professor Auxiliar no Departamento de Ciências Exactas da Escola Superior Pedagógica do Bengo, onde já foi Chefe dos Departamentos de Ciências Exactas e Documentação e Investigação Científica e Chefe do Departamento de Investigação Científica, Empreendedorismo e Pós-graduação. Preside ao Instituto *GeoGebra* na ESPB.

---

28 de outubro  
16:00 GMT  
Sala  
Pedro Nunes  
DMUC

## Educação *STEAM* suportada pelo *GeoGebra* : Inovação da prática pedagógica em prol da melhoria da Educação Matemática e Ciências em Cabo Verde e Moçambique

Astrigilda Silveira

Universidade de Cabo Verde, Praia, Cabo Verde



No mundo atual, em constante transformação, a melhoria da qualidade do ensino e a capacidade de inovação exigem aos professores a atualização e aperfeiçoamento permanente das suas competências. De acordo com Delors *et al.*(1997), uma das medidas para a melhoria da qualidade e motivação dos professores, consiste em desencadear:

“programas que levem os professores a familiarizar-se com os últimos progressos da tecnologia de informação e comunicação. Duma maneira geral, a qualidade de ensino é determinada tanto ou mais pela formação contínua dos professores do que pela sua formação inicial.” (Delors *et al.*, 1997, p. 137)

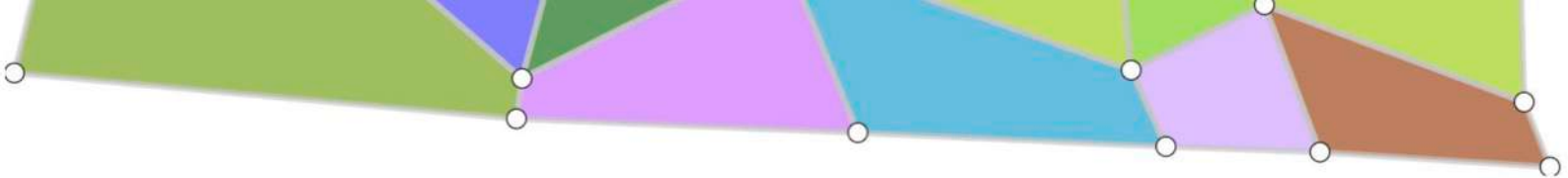
O uso das tecnologias digitais, especialmente o *GeoGebra* , com base na abordagem inter e multidisciplinar, pode constituir um estímulo para apoiar a aprendizagem significativa dos alunos em matemática e ciências. Dos Santos e Silveira (2021), realçam que:

“Os desafios de mudança siSTEMáticas no contexto atual interpela-nos a refletir sobre a atividade docente com vista a adoção de abordagens contextualizadas que contribuam para uma aprendizagem significativa da matemática, numa perspetiva inter e multidisciplinar. Esta perspetiva se enquadra na metodologia Problem-based Learning ou Project-based Learning (PBL), sendo esta metodologia de ensino usada nas abordagens *STEM* <sup>3</sup> ou *STEAM* <sup>4</sup> . As práticas *STEAM* implicam mudanças curriculares, ancoradas no desenvolvimento de competências, de forma contextualizada e aplicadas às diversas áreas de conhecimento, onde os conceitos e métodos da Matemática seguem os pressupostos da abordagem PBL, próximas do Ensino Exploratório, alicerçando-se numa perspetiva da aprendizagem baseada no Construtivismo e Construtivismo Social.” (Dos Santos & Silveira, 2021, p. 89)

A inovação suportada por uma tecnologia exige do professor a aquisição de competências específicas para o seu uso efetivo em contexto da sua prática pedagógica.

<sup>3</sup> Acrónimo de Science, Technology, Engineering and Mathematics.

<sup>4</sup> Acrónimo de Science, Technology, Engineering, the Arts and Mathematics.



Com base na teoria dos Processos de Difusão da Inovação de Everett Rogers (2003), Niess et al. (2009, p. 9) apresentam cinco níveis do TPACK <sup>5</sup> progressivos para uma integração efetiva de uma tecnologia específica no ensino e aprendizagem da matemática: i) Reconhecimento – os professores são capazes de utilizar a tecnologia e reconhecem o alinhamento da tecnologia com o conteúdo matemático, mas ainda não integram a tecnologia no ensino e aprendizagem da matemática; ii) Aceitação – os professores formam uma atitude favorável ou desfavorável perante o ensino e aprendizagem da matemática suportada por uma tecnologia apropriada; iii) Adaptação – os professores se envolvem em atividades que conduzem a uma escolha para adotar ou rejeitar o uso de uma tecnologia apropriada no ensino e a aprendizagem da matemática; iv) Exploração – os professores integram ativamente uma tecnologia apropriada no ensino e aprendizagem da matemática; v) Avançando – os professores avaliam os resultados da decisão de integrar uma tecnologia apropriada no ensino e a aprendizagem da matemática.

No âmbito da formação contínua conducente à inovação, Rocha (2010) defende que devemos aceitar com naturalidade alguma resistência que pode emergir uma vez que,

“implica alguma ruptura com práticas instituídas, o que pode acarretar alguma insegurança. [...] A adaptação dos professores à mudança que essa inovação exige, não poderá ser imposta por especialistas exteriores à escola, mas passará, concerteza, por uma vontade do próprio, apoiada em modelos de formação assentes na prática do professor, na análise e reflexão dessa mesma prática pelos pares e que implique o voltar continuamente a essa prática.” (Rocha, 2010, p. 50)

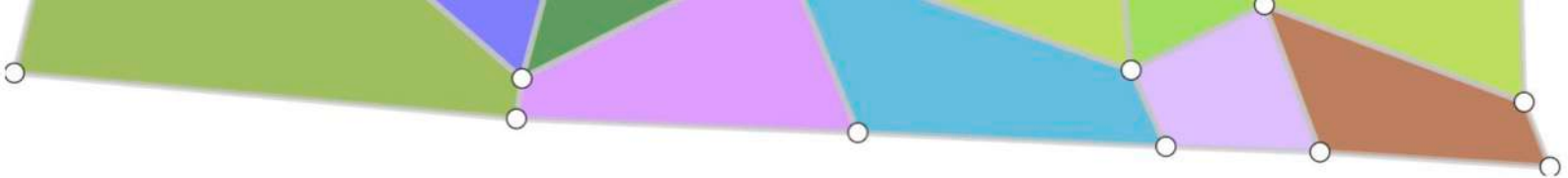
Delors et al (1997) sustentam que para além da transmissão de informações ou conhecimentos, o professor deve apresentá-los através de problemas contextualizadas a resolver e perspetivando-os para que o aluno possa estabelecer a conexão entre a sua solução e outras questões mais amplas. “A relação pedagógica visa o pleno desenvolvimento da personalidade do aluno no respeito pela sua autonomia [...]” (p. 135). O autor defende que o sentido crítico do aluno pode ser desenvolvido pelo trabalho e diálogo com o professor.

A autonomia e o sentido crítico do aluno podem ser potenciados com o uso do *GeoGebra*, através de um ensino exploratório ou ensino baseado em problemas. Canavarro *et al.* (2021, p. 6) argumentam que “as ferramentas tecnológicas devem ser consideradas como recursos incontornáveis e potentes para o ensino e a aprendizagem da Matemática”.

Com base nesses pressupostos, têm sido implementados Projetos de Formação de Formadores em *GeoGebra*, no contexto da Educação *STEAM*, em países africanos de

---

<sup>5</sup>Modelo para o conhecimento profissional do professor.



língua oficial portuguesa (PALOP). Entre 2019 e agosto de 2022, foi implementado em Cabo Verde a 2ª fase desse processo formativo, através do Projeto <sup>6</sup> Formação de Formadores e formação piloto de professores Matemática, *GeoGebra* & *STEAM* que incidiu na abordagem *STEAM* e usou-se o GeoGebra como uma ferramenta de produção de conhecimento e desenvolvimento de competências e abordagens multidisciplinares. (Dos Santos, Silveira & Lavicza, 2022).

Recentemente foi realizada uma investigação, no âmbito do pós-doutoramento, intitulada “*GeoGebra* & *STEAM*: Implicações para a melhoria da Educação Matemática em Moçambique”, que envolveu professores de Matemática e Ciências Naturais de uma Universidade e quatro Escolas do Ensino Primário e Ensino Secundário, em Maputo e Matola. A Oficina de Formação desenvolvida contemplou sessões de: i) formação, com módulos temáticos, aliando a teoria e a prática; ii) planificação; iii) simulação das experiências de ensino em contexto de formação; iv) implementação de experiências pelos formandos em sala de aula; v) acompanhamento de experiências pela formadora em sala de aula; e vi) reflexão sobre as experiências de ensino.

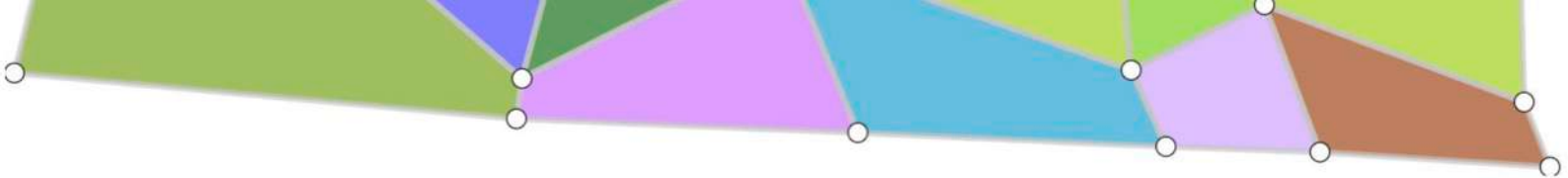
Com o projeto, perspetivou-se contribuir para a melhoria qualitativa do ensino da Matemática e das Ciências, com recurso ao *GeoGebra*, em contexto da Educação *STEAM*, em Moçambique. Neste âmbito, esta comunicação tem como foco o trabalho investigativo desenvolvido em Cabo Verde e Moçambique, essencialmente qualitativo, de natureza exploratória, interpretativa e avaliativa, e visa partilhar os principais resultados obtidos e, promover uma discussão e reflexão dos desafios impostos aos contextos cabo-verdiano e moçambicano, onde o *GeoGebra* e a Educação *STEAM* podem estar presentes e serem implementados nesses países.

## Referências

- Canavarro, A.P., Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M.J., Correia, P., Marques, P., & Espadeiro, R.G. (2021). *Aprendizagens Essenciais de Matemática no Ensino Básico*. Ministério da Educação - Direção-Geral da Educação. Lisboa. <https://www.dge.mec.pt/noticias/aprendizagens-essenciais-de-matematica>
- Delors et al (1997). *Educação: um tesouro a descobrir*. 3ed. UNESCO. Edições ASA. Lisboa
- Dos Santos Dos Santos, J. M., Silveira, A., & Lavicza, Z. (2022). *Abordagem*

---

<sup>6</sup>Este projeto conta com o apoio financeiro da Fundação Calouste Gulbenkian e cofinanciado pela Organização dos Estados Iberoamericanos- OEI, em Lisboa. Foi desenvolvido em parceria com a Universidade de Cabo Verde (Uni-CV), o Ministério de Educação de Cabo Verde (MECV) e o Estado Português. Conta, ainda, com parceiros técnicos e científicos o Instituto Politécnico do Porto, o Instituto *GeoGebra* de Portugal (IGP) na Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico do Porto (ESEIPP), a Uni-CV, o Instituto *GeoGebra* na Universidade de Cabo Verde (IGUni-CV) e a Direção Nacional de Educação (DNE).



*STEAM* e GeoGebra - Aprendizagem e ensino das Ciências na formação de professores de Cabo Verde. *Sensos-E*, 9(2), 58–71. <https://doi.org/10.34630/sensose.v9i2.4302>

Dos Santos, J. dos S., & Silveira, A. (2021). Formação de formadores e formação piloto de professores de Matemática com o GeoGebra em contexto *STEAM*. *Sensos-E*, 8(1), 88–100. <https://doi.org/10.34630/sensose.v8i1.3805>

Mishra, P., & Koehler, M. J. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for teacher knowledge. *Teachers college record*, 108(6), 1017-1054.

Niess, M. L., Ronau, R. N., Shafer, K. G., Driskell, S. O., Harper, S. R., Johnston, C., ... & Kersaint, G. (2009). Mathematics teacher TPACK standards and development model. *Contemporary issues in technology and teacher education*, 9(1), 4-24. <https://citejournal.org/wp-content/uploads/2016/04/v9i1mathematics1.pdf>

Rocha, M. I. (2010). *Contribuições de um Programa de Formação Contínua em Matemática para o Desenvolvimento profissional dos Professores do 1º Ciclo do Ensino Básico*. (Tese de Doutoramento). Badajoz: Universidade de Extremadura.

## Nota Biográfica



### Astrigilda Pires Rocha Silveira

Licenciada em Matemática - Ramo de Ensino pela PUCRS-Brasil, Mestre e Doutora em Multimédia em Educação pela Universidade de Aveiro-Portugal. É docente do quadro definitivo da Universidade Pública de Cabo Verde, com 23 anos de experiência no ensino superior. Foi Vice-Reitora na Universidade de Cabo Verde entre 20/04/2016 e 20/05/2020. É Consultora do Projeto de Formação de Formadores em GeoGebra em Moçambique e Angola. É Diretora do Instituto GeoGebra na Universidade de Cabo Verde e desenvolve investigação nas áreas de Educação *STEAM* e GeoGebra e Tecnologias Digitais no ensino e aprendizagem da Matemática e, tendo por base a formação inicial e contínua de professores. Tem proferido conferências e palestras nacionais e internacionais nas suas áreas de investigação.

---

28 de outubro  
16:00 GMT  
Sala  
Pedro Nunes  
DMUC

## GeoGebra em aula no Brasil : A Abordagem Documental do Didático para a construção de recursos com GeoGebra

Celina Abar & Adriana Dias

Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Brasil



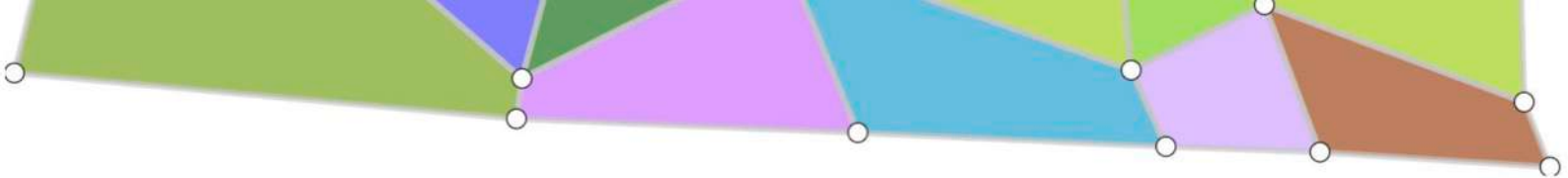
A sala de aula vive hoje uma fase de aproveitamento e descobrimento de novos recursos tecnológicos. Entretanto, para que isso possa acontecer de maneira satisfatória, que resulte em bons trabalhos, é preciso preparar os professores com relação ao conhecimento matemático e ambientá-los às tecnologias disponíveis.

O desenvolvimento da Internet, a abundância de recursos digitais, o surgimento de novas formas de trabalho docente, como de modo remoto, novos desenvolvimentos e incertezas no ensino e na aprendizagem da matemática dão origem a diferentes necessidades teóricas. Há, pelo menos dez anos, essas necessidades teóricas e práticas levaram à proposta de um novo quadro, a Abordagem Documental do Didático (ADD), no campo da Educação Matemática (Trouche & Gueudet, 2015).

A Gênese Documental, inserida na ADD, é um processo contínuo e ocorre quando os recursos passam ao status de documento diante dos esquemas de utilização adotados e da experiência do professor, que envolve conhecimentos prévios do ponto de vista matemático e didático do presencial. A construção de documentos envolve a identificação dos recursos que serão utilizados e os respectivos aprimoramentos que atendam à proposta. Essas modificações incluem idas e vindas a todo momento e exigem uma análise das variáveis presentes nos momentos de adaptação.

A abordagem teórica considerada envolve analisar o trabalho de professores com recursos considerando suas atividades dentro e fora da sala de aula, em casa, nas salas de laboratório, salas de informática etc. Assim, esse texto apresenta parte do desenvolvimento de um projeto de modo remoto de duas pesquisadoras, com a utilização do *GeoGebra* e com a participação de professores de uma escola pública de São Paulo por meio da plataforma Teams da Microsoft para que aprimorassem sua prática docente. Para uma comunicação mais próxima, entre os participantes, se fez uso do WhatsApp com sugestões de textos e materiais para a criação de recursos na linha indicada pela Gênese Documental.

O objetivo da proposta foi contribuir para a formação continuada de professores para o ensino e a aprendizagem da matemática, com a integração da tecnologia, em especial o GeoGebra, como ferramentas potenciadoras de novas ideias para o ensino da matemática. O contexto da formação envolveu um trabalho colaborativo entre professores e pesquisadoras, com a finalidade exposta na teoria subjacente ao projeto que foi a Gênese Documental (Trouche & Gueudet, 2015).



No projeto de investigação foi sugerido o uso do *GeoGebra* na criação de recursos pelos professores para o ensino da matemática em duas vertentes: adaptando ou criando materiais, ajustados aos interesses, às necessidades e aos problemas que enfrentam os professores nas escolas e investigando o uso destes materiais nos contextos escolares e o seu efeito na melhoria dos resultados dos estudantes.

Inúmeros recursos poderiam ser selecionados pelo professor tanto individualmente como coletivamente, o que envolve: livros didáticos, vídeos de fontes fidedignas, softwares, tutoriais e outros, disponibilizados com suas especificidades. No entanto, o *GeoGebra* foi o instrumento principal e os conhecimentos matemático, didático e tecnológico foram fundamentais para a transformação destes recursos em documentos. A justificativa para a utilização do *GeoGebra* está no fato de ser um software que se mostra útil para o ensino de matemática e de outras ciências, bem como de estabelecer conexões entre conteúdos matemáticos e de outras áreas científicas, garantindo princípios de equidade no ensino e aprendizagem da matemática (Jarvis; Hohenwarter, Lavicza, pp. 232-233, 2011).

Observou-se que algumas decisões didáticas, na transformação dos recursos em documentos, foram influenciadas pela colaboração das pesquisadoras do ponto de vista matemático, tecnológico e didático. Foi possível identificar, inicialmente, no trabalho do professor, o interesse por recursos, em particular recursos digitais e o *GeoGebra*, como possibilidade de transformar sua prática pedagógica para contribuir com a aprendizagem do aluno.

Embora com pouco conhecimento do recurso *GeoGebra* as dificuldades que emergiram foram além das possibilidades de cada professor, influenciando consideravelmente, na finalização do documento que estava sendo construído.

Em todos os momentos da Abordagem Documental o papel do professor é relevante, pois é ele quem determina e define qual conteúdo matemático será trabalhado, que recursos serão escolhidos e que modificações serão necessárias para que possa guiar sua prática com segurança. Olhando na perspectiva da ADD podemos dizer que a construção de um documento é um processo que gera um produto que pode estar em constante aprimoramento.

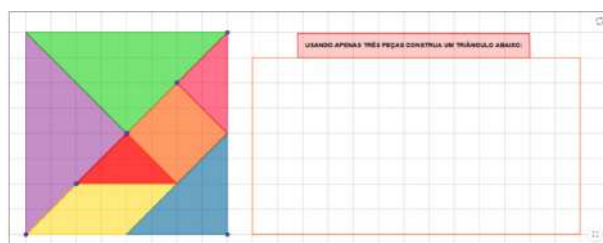


Figura 1. Atividades com o Tangram (<https://www.GeoGebra.org/m/aftbhrqt>)

Consideramos, nesse texto, a participação de uma professora no projeto e des-

tacamos que, a partir de seu envolvimento na formação continuada, o software *GeoGebra* é agregado a seu sistema de recursos, sendo utilizado para fazer construções geométricas como também para buscar algum *Applet* relacionado ao conteúdo a ser trabalhado. O *GeoGebra* é um dos recursos elencados pela professora e a Figura 1 é um *Applet* utilizado pela professora e adaptado por ela.

A necessidade de se ter um material em formato digital para disponibilizar aos alunos foi um dos fatores que motivou criar um documento em Word, apresentado na Figura 1, comparando o documento produzido pela professora antes do projeto e o documento digital obtido por ela.



Figura 2. Plano de aula manuscrito e plano de aula digital, fonte professora participante.

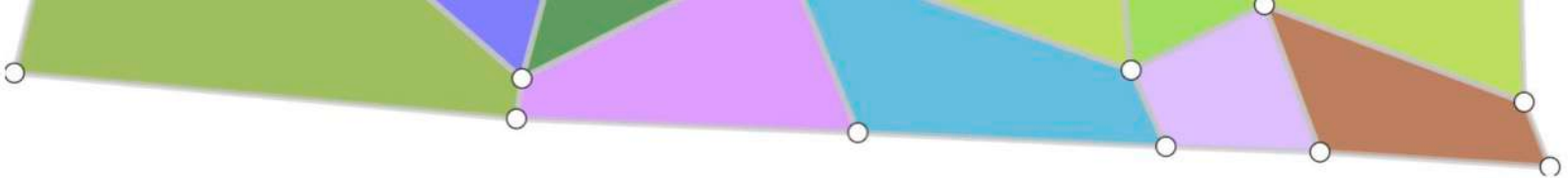
A figura digital construída pela professora utilizando o *Applet* do *GeoGebra* (Figura 2), foi um recurso importante para a construção do documento e segundo a professora com relação ao uso de recursos digitais comenta que pretende trazê-los para sua prática docente “a gente tem que aproveitar essa parte da tecnologia a nosso favor, para fazer o quê?, fazer as coisas ficarem mais fáceis para nosso aluno entender e motivar mais a aula.”

Foi possível constatar que a trajetória documental da professora é marcada por adaptações, no sentido de se adequar a uma nova realidade. Os avanços tecnológicos e o uso do *GeoGebra* associados ao processo de ensino e aprendizagem, passaram a fazer parte de seu sistema de recursos, modificando a maneira como construía seus documentos.

Consideramos que um dos desafios para atingir os objetivos de uma proposta de formação está em conseguir com que os sujeitos envolvidos no contexto escolar reflitam sobre sua prática pedagógica; tenham domínio do percurso de um conteúdo matemático desde as séries iniciais; investiguem e compreendam os estilos de aprendizagem de seus alunos e mergulhem no uso das tecnologias desde os seus primeiros passos acreditando em sua eficácia.

## Referências

Jarvis, D., Hohenwarter, M., & Lavicza, Z. (2011). *GeoGebra, democratic access, and sustainability: Realizing the 21st-century potential of dynamic mathematics*



for all. In *Model-centered learning* (pp. 231-241). Brill. <https://brill.com/display/book/edcoll/9789460916182/BP000018.xml>

Trouche, L & Gueudet. G. (2015). Do trabalho documental dos professores: gêneses, coletivos, comunidades: o caso da Matemática. *EM TEIA - Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, v. 6, n. 3, pp. 1- 43.

## Nota Biográfica



### **Celina Aparecida Almeida Pereira Abar**

Doutorado em Lógica Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (1985). Especialista em Tecnologias Interativas Aplicadas à Educação (PUC-SP-2000); em Design Instrucional para Educação On-Line (UFJF-2007) e em Entornos Virtuales de Aprendizaje (OEI-2010). Possui graduação em Licenciatura e Bacharelado em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (1973), Mestrado em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (1979). Professora titular da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo atuando na Graduação, no Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP e em Curso de Extensão na COGEAE. Os projetos de pesquisas em desenvolvimento abordam tecnologias digitais, realidades virtual e aumentada, ensino híbrido, contexto STEM e STEAM. Disciplinas realizadas no curso de especialização Inteligência Artificial na Educação da Universidade Federal de São Carlos. Coordenadora da Implantação do Curso de Licenciatura em Matemática na Modalidade a Distância da PUC-SP no 1º Sem/2009. Coordenadora do Instituto GeoGebra de São Paulo.

---

28 de outubro  
16:00 GMT  
Sala  
Pedro Nunes  
DMUC

## GeoGebra en aula em España

**Juan Antonio Reyes Delgado**

IES Aljanadic, Posadas, Córdoba, España

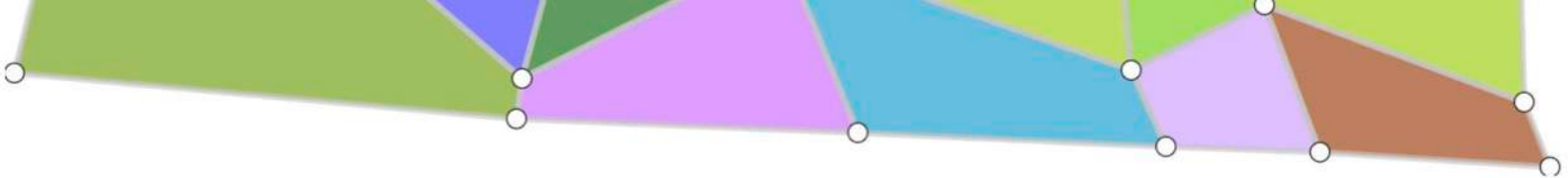


Desde su creación en 2001, hace ya más de 20 años por Markus Hohenwarter en el departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Salzburgo (Austria), este software matemático ha venido a unificar la capacidad de trabajar con la geometría dinámica y la capacidad de realizar cálculo simbólico.

Y es que *GeoGebra* se ha convertido en un “must” dentro del aula de matemáticas a lo largo y ancho del planeta, ya que, disponiendo de este único software en el aula, se cuenta con una potente herramienta para trabajar, en una plataforma interactiva, la geometría, el álgebra, el cálculo o la estadística con un entorno homogéneo que resultará familiar al profesorado y alumnado usuarios. Además, resulta de gran utilidad en todos los niveles educativos, desde la Educación Infantil hasta el Bachillerato o la Universidad; gracias a su versatilidad en la adquisición de nuevos conceptos matemáticos de la mano de su interactividad y dinamismo visual.

Las principales prestaciones que presenta *GeoGebra* para el aula podrían resumirse en:

- 
- *Geometría Dinámica*: de gran ayuda para entender los conceptos matemáticos al crear y modificar interactivamente las figuras y construcciones geométricas. Sin duda una gran herramienta para llegar a entender nuevos conceptos geométricos.
- *Álgebra Dinámica*: permitiendo la resolución interactiva de ecuaciones y sistemas, llegando incluso a deducir propiedades algebraicas, a asimilar nuevos conceptos matemáticos.
- *Capacidad Gráfica*: dispone de ventana gráfica 2D y 3D para mejorar el entendimiento de los cálculos algebraicos.
- *Herramienta de Cálculo*: un potente recurso para el análisis matemático y cálculo numérico.
- *Calculadora Estadística*: para efectuar un análisis de datos, con cálculo de medidas de centralización y de dispersión.
- *Hoja de Cálculo*: esta ventana permite trabajar interactivamente con las demás ventanas (CAS, Gráfica) dentro de una hoja de cálculo. De gran utilidad para el estudio de funciones.

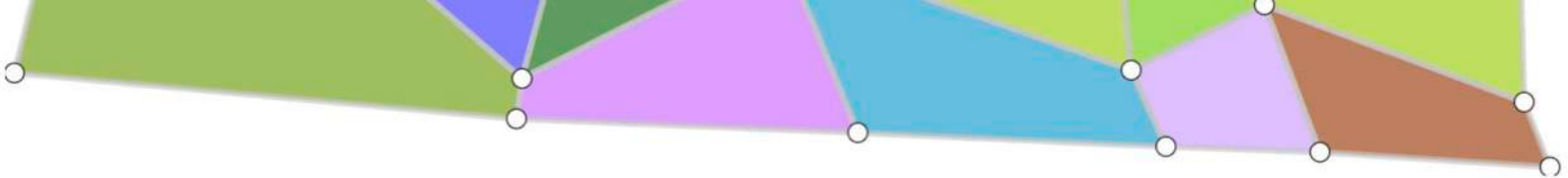
- 
- *Álgebra Dinámica*: Capacidad de Programación: está disponible una interface sencilla donde poder implementar rutinas de manera personalizada.
  - *Comunidad Colaborativa GeoGebra*: donde las personas usuarias comparten sus recursos creados, resuelven sus dudas y aprenden nuevas prestaciones y potencialidades desarrolladas por otras personas.
  - *Herramienta Multiplataforma*: este software está disponible descargable en el ordenador, para trabajar en línea desde la página de GeoGebra o instalando las Apps que se necesiten en cualquier dispositivo inteligente.

Ya desde la LOE, ley educativa en España vigente desde 2006 hasta 2013, se apuntaba a la recomendación de emplear herramientas de geometría dinámica en el aula de matemáticas para facilitar el aprendizaje de las matemáticas del alumnado. Pero ha sido primero con la ley educativa LOMCE y con la vigente LOMLOE cuando se pide al profesorado de matemáticas que maneje herramientas digitales: software de geometría dinámica, realidad aumentada, robótica educativa, ... en el aula de matemáticas.

Y es que no se concibe una verdadera educación matemática del siglo XXI sin la incorporación de estas herramientas en nuestras aulas. Es más, precisamente son estos entornos tecnológicos de trabajo los que nos acercan más a nuestro alumnado, a su hábitat natural y cotidiano. No debemos olvidar que nuestro alumnado ha nacido casi en su totalidad en el siglo XXI y por tanto, la tecnología, los dispositivos inteligentes, el comercio electrónico, las relaciones virtuales, ... forman parte de su entorno más familiar y conocido.

Desde que estoy manejando *GeoGebra* en mi aula de matemáticas, y ya son bastantes años, he podido comprobar de manera directa la gran diferencia existente entre la velocidad y la profundidad con que mi alumnado asimila los nuevos conceptos que les presento, ahora si, con la ayuda de *GeoGebra*. La precisión con que puedo presentarles mis explicaciones, el rigor con que podemos hacer los cálculos en muy poco tiempo, sin olvidar la elegante interface que posee el programa, y muchos más detalles, hacen que el nivel de atención de mi alumnado haya mejorado de manera generalizada (por supuesto hay excepciones). Tengo que afirmar que no encuentro un solo concepto que no pueda introducirlo, explicarlo, desarrollarlo, de la mano de GeoGebra; y no digamos si lo que se pretende es profundizar en algún concepto, entonces *GeoGebra* nos permite aventurarnos a realizar el “más difícil todavía”. Desde luego que se conseguirá aumentar el interés del alumnado, así como su participación comprometida y responsable en el desarrollo de experimentos y proyectos.

Esta herramienta resulta, asimismo, de gran utilidad a la hora de mejorar las destrezas de resolución de problemas de nuestro alumnado de matemáticas. Sobre todo, porque resulta muy instructivo poder definir de manera interactiva la situación que nos propone el problema, para poder ir modificando los parámetros y provocar que



nuestro alumnado intuya, se anticipe, a la solución correcta del problema. *GeoGebra* nos permite realizar el modelo matemático de un problema con el fin de trasladar las soluciones a la realidad, analizando en profundidad las posibles soluciones halladas con el software.

Desde mis comienzos en el manejo de este software me atreví incluso a evaluar a mi alumnado en algunos bloques de contenidos utilizando exclusivamente la herramienta *GeoGebra* instalada en los portátiles de clase. Hoy en día, incluso podremos hacer lo propio con tablets o smartphones seleccionando el modo examen dentro de la aplicación GeoGebra.

Además, las mejoras introducidas, como *GeoGebraTube*, *GeoGebra Classroom* o su compatibilidad con el entorno Moodle, han facilitado en gran medida el uso de este software para trabajar de manera online, sin dejar de ser interactiva, el aprendizaje de las matemáticas, pudiendo incluso realizar una evaluación y llevar un seguimiento del proceso de aprendizaje de nuestro alumnado de matemáticas

## Nota Biográfica



### Juan Antonio Reyes Delgado

Estudió la licenciatura de Matemáticas y se especializó en Estadística e Investigación Operativa en la Universidad de Sevilla (España). En sus primeros años trabajó de profesor asociado en el Departamento de Estadística e Investigación Operativa de la Universidad de Sevilla. Más tarde, ingresó en el cuerpo de profesorado de Educación Secundaria y comenzó a trabajar como profesor de matemáticas en centros educativos de Secundaria y Bachillerato, donde continúa en la actualidad. Desde su licenciatura, es miembro de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales y actualmente desempeña el cargo de delegado provincial en Córdoba. Trabaja con GeoGebra desde casi sus orígenes, habiendo recibido y después impartido diversos cursos de formación al profesorado. Forma parte del proyecto MATESGG, donde coordina uno de los grupos de trabajo. GeoGebra ha revolucionado de manera absoluta su enseñanza de las matemáticas en el aula.

---

# GeoGebra em aula em Portugal

Paulo Correia

Escola Secundária de Alcácer do Sal, Portugal

28 de outubro  
16:00 GMT  
Sala  
Pedro Nunes  
DMUC



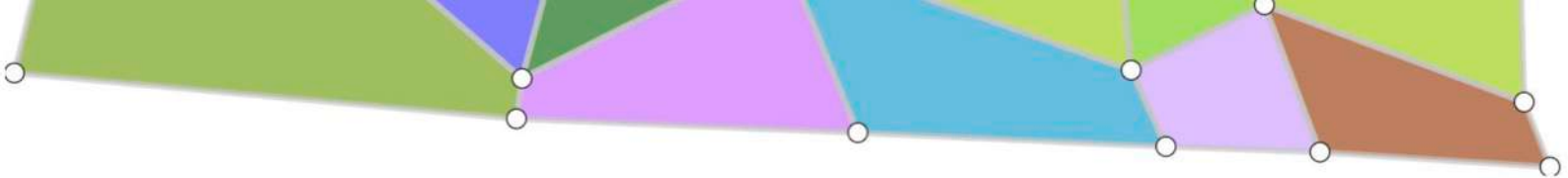
O recurso ao *GeoGebra* para a aprendizagem em matemática é uma questão complexa, que depende de fatores variados e pode ser analisada de diferentes perspetivas. Nenhuma intervenção conseguiria abordar todas as dimensões desta problemática, nem seria avisado tentar identificar qualquer elemento como definitivo ou consensual, sem um contexto de investigação que sirva de suporte. No contexto português, podemos identificar algumas questões como relevantes, sem a pretensão de se constituir como uma abordagem exaustiva ou consensual. Procuraremos abordar quatro dimensões que se interligam entre si e que podem e devem ser discutidas, corrigidas e complementadas e que pretendem contribuir para reflexões posteriores. As questões técnicas, a formação de professores, o contexto curricular e as práticas de avaliação podem ser um ponto de partida para identificar pontos fortes no caminho já percorrido e potencialidades para o que ainda falta fazer.

## As questões técnicas

Tradicionalmente este foi um elemento identificado como entrave a uma integração plena da tecnologia na aprendizagem, em particular o recurso a Ambientes de Geometria Dinâmica, em particular o recurso ao *GeoGebra*. No contexto português coexistem diferentes realidades, por exemplo, no acesso à Internet nas escolas, mas é razoável reconhecer que o cenário atual tem registado melhorias significativas, sendo previsível novas melhorias no curto prazo e com uma abrangência territorial quase total. O acesso a computadores, telemóveis e projetores também registou no período pós-pandémico uma melhoria bastante significativa. Neste enquadramento, as dificuldades de ordem logística e de acessibilidade não parecem ser um fator que possa contribuir para que o *GeoGebra* não seja integrado de forma plena nas práticas de professores e alunos. A utilização desta ferramenta em dispositivos móveis e com a gestão de ficheiros centralizada na nuvem, são oportunidades que devem ser valorizadas (Figura 1).



Figura 1 - A utilização do *GeoGebra* em dispositivos móveis



## A formação de professores

Nos últimos anos, em Portugal, algumas iniciativas favoreceram a integração da tecnologia em geral e do *GeoGebra* em particular, nas práticas letivas. Mas na análise desta dimensão, o balanço não parece ser tão favorável. A inclusão do *GeoGebra* na formação de professores de Matemática não foi alvo de um programa focado, com objetivos claros e com a alocação de recursos merecida. Algumas entidades, como a Associação de Professores de Matemática, tem levado a cabo iniciativas de formação, que embora tenham chegado a algumas centenas de professores, não se pode considerar que tenha uma abrangência global. O *GeoGebra* tem sido também incluído como uma parte relevante em contextos de formação mais abrangentes, como o Plano de Transição Digital (Alberto & Correia, 2022), ou os programas de formação decorrentes dos novos documentos curriculares, mas nestes casos partilhando o escasso tempo de formação com outros recursos e metodologias entendidos como igualmente importantes (Figura 2).

### AGD (GeoGebra)

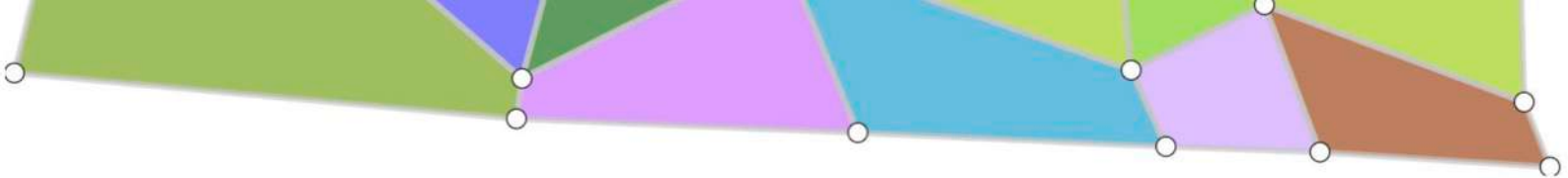
Sugere-se que os docentes em formação possam desenvolver a atividade, assumindo o papel do aluno (alterando a tarefa, ou criando uma sem qualquer suporte prévio, e também que possam criar um enunciado da tarefa a propor aos alunos).



Figura 2 - Documentos de suporte à formação com referências ao *GeoGebra* (Alberto & Correia, 2022, p.14).

## O contexto curricular

Esta é outra dimensão em que se registaram evoluções recentes relevantes e que se consideram favoráveis. Recentemente todos os documentos curriculares do Ensino Básico (Canavarro *et al.*, 2021) e do Ensino Secundário (Silva *et al.*, 2023), passaram a incluir referências explícitas à utilização do *GeoGebra*, passando este recurso a figurar explicitamente no currículo prescrito (Figura 3). Outros materiais de apoio ao currículo, como os manuais escolares, já vinham a dar visibilidade à relevância do *GeoGebra* no ensino da Matemática. Ainda assim, e reconhecendo uma enorme diversidade e diferenças nos diferentes contextos, o currículo implementado tarda em mobilizar o recurso ao *GeoGebra* como uma prática corrente em linha com a prescrição curricular.



| APRENDIZAGENS ESSENCIAIS   ARTICULAÇÃO COM O PERFIL DOS ALUNOS |                                                                                                                                                                              | 9.º ANO   3.º CICLO   MATEMÁTICA                                                                                                                                                                                                                                                    |  |
|----------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| Representação e ordenação na reta real                         | Fazer corresponder a cada ponto da reta numérica um número real e vice-versa, estabelecendo conexões entre temas matemáticos.<br>Comparar e ordenar números reais, usando os | Incentivar a representação de números reais na reta real, a pares, com aproximações apropriadas aos contextos, e através de construções geométricas, nomeadamente com ambientes de geometria dinâmica (AGD) [Exemplo: GeoGebra], estabelecendo conexões com o Teorema de Pitágoras. |  |

Figura 3 - Documentos curriculares com referências ao *GeoGebra* (Canavarro *et al.*, 2021, p.20).

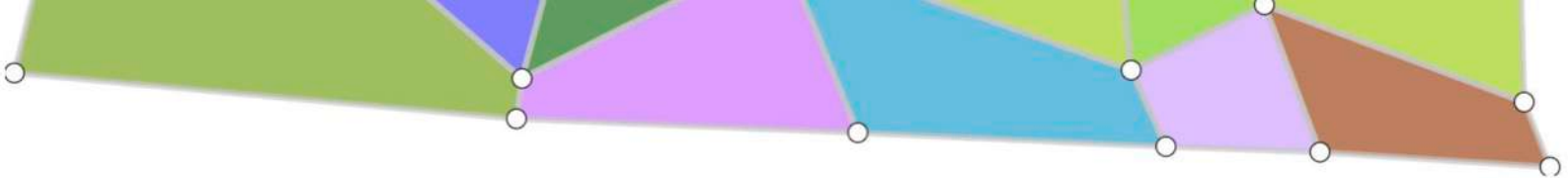
## As práticas de avaliação.

Uma parte das dificuldades em generalizar a utilização do *GeoGebra* nas práticas de sala de aula costuma ser relacionada com as práticas de avaliação. Apesar do atual contexto curricular favorável, as práticas de avaliação - interna e externa - tardam em assumir o trabalho desenvolvido em contexto informatizado com a frequência e a relevância que seria desejável. O recente projeto de desmaterialização da avaliação externa, pode criar um contexto favorável para a valorização das produções dos alunos em formato digital, como seriam construções do *GeoGebra*, e assim, contribuir para fomentar práticas de avaliação com recurso a estas produções dos alunos; e consequentemente contribuir para um recurso sistemático e frequente ao *GeoGebra* na sala de aula. As tarefas do *GeoGebra* (ou *GeoGebra Classroom*) é uma funcionalidade que deve ser alvo de maior atenção e investimento formativo para permitir colocar o foco nas produções dos alunos (Figura 4).



Figura 4 - Produções dos alunos recolhidas com as Tarefas do *GeoGebra*.

Naturalmente cada uma destas dimensões deve ser pensada de forma integrada, eventualmente com outros elementos que ficaram de fora desta reflexão, mas parece importante enfatizar que o atual contexto de mudança em diferentes vertentes do sistema educativo, constitui-se como uma oportunidade que deve ser aproveitada para que metodologias e práticas dependentes do recurso ao *GeoGebra* possam evoluir de elementos de inovação pouco frequentes, para uma parte significativa, recorrente e incontornável na forma como se ensina e aprende Matemática.



## Referências

Alberto, P. & Correia, P. (2022) Módulo de formação de docentes - Ciência Exatas Matemática. Ministério da Educação - Direção-Geral da Educação. Lisboa. ISBN: 978-972-742-507-5. <https://digital.dge.mec.pt/sites/default/files/documents/2022/191-4c4d0feaae14f9b04c383cbbba12d6f.pdf>

Canavarro, A.P., Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M.J., Correia, P., Marques, P., & Espadeiro, R.G. (2021). Aprendizagens Essenciais de Matemática no Ensino Básico . Ministério da Educação - Direção-Geral da Educação. Lisboa. [http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens\\_Essenciais/3\\_ciclo/ae\\_mat\\_9.o\\_ano.pdf](http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/3_ciclo/ae_mat_9.o_ano.pdf)

Observação: Em todos os anos dos três ciclos do Ensino Básico há referências ao uso do *GeoGebra* .

Carvalho e Silva, J., Albuquerque, C., Almiro, J., Cruchinho, C., Carreira, S., Correia, P., Domingos, A., Espadeiro, G. E., Filipe, N., Gabriel, L., Martins, H., Martins, M.E.G., Rodrigues, A., & Santos, M. T. (2023) Aprendizagens Essenciais de Matemática A. Ministério da Educação - Direção-Geral da Educação. Lisboa. [http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens\\_Essenciais/mat\\_a\\_10\\_-\\_vf.pdf](http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/mat_a_10_-_vf.pdf)

Observação: Em todos os anos do Ensino Secundário há referências ao uso da tecnologia, nomeadamente, ao *GeoGebra* .

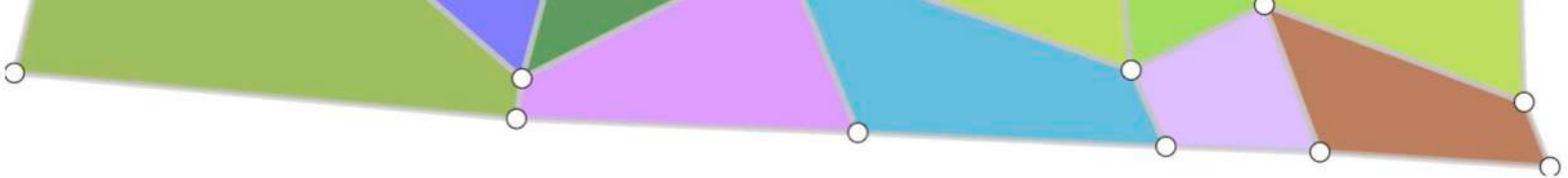
## Nota Biográfica



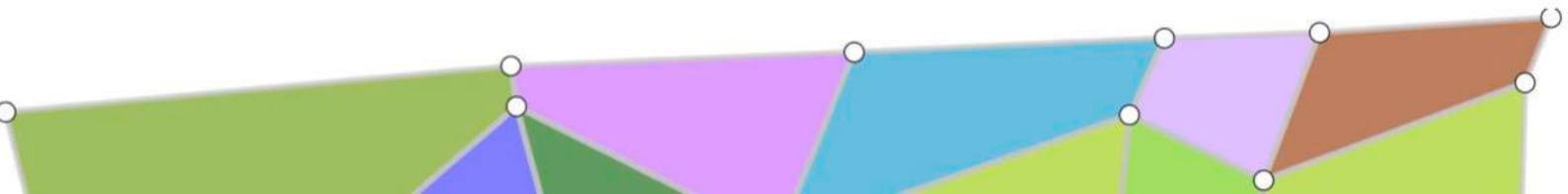
### Paulo Manuel Inácio Correia

Professor de Matemática do ensino básico e secundário. Desenvolve também atividade como formador de professores. Integrou as equipas que redigiram as “Recomendações para a melhoria das aprendizagens dos alunos em Matemática” e as Aprendizagens Essenciais da Matemática para o Ensino Básico e Secundário. Integra também o Grupo de Trabalho de Desenvolvimento Curricular e Profissional de Matemática. Mantém a página de Internet <https://mat.absolutamente.net/>.

---



## Sessões Práticas



## Secções No Cubo, Uma Tarefa no Contexto das Aprendizagens do Ensino Secundário

SP1  
28 de outubro  
14:30 GMT  
Sala 04  
DMUC

Irene Gonçalves<sup>1</sup>, Oscarina Nogueira<sup>2</sup>, Mário Santos<sup>3</sup> & José Manuel Dos Santos<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Agrupamento de Escolas Padre Benjamim Salgado, Portugal; <sup>2</sup>Agrupamento de Escolas de Fafe, Portugal; Agrupamento de Escolas de Melgaço, Portugal <sup>3</sup>; <sup>4</sup>Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologias da Universidade de Coimbra



### Objetivo

Esta sessão prática visa a apresentação de uma tarefa elaborada no âmbito de uma formação sobre as Novas Aprendizagens Essenciais de Matemática A cujo tema escolhido foi Geometria Analítica do 11.º ano. A partir de cortes feitos num cubo por um plano e com recurso ao Geogebra 3D, os alunos têm que estruturar ideias matemáticas e raciocínios e estabelecer conjecturas.

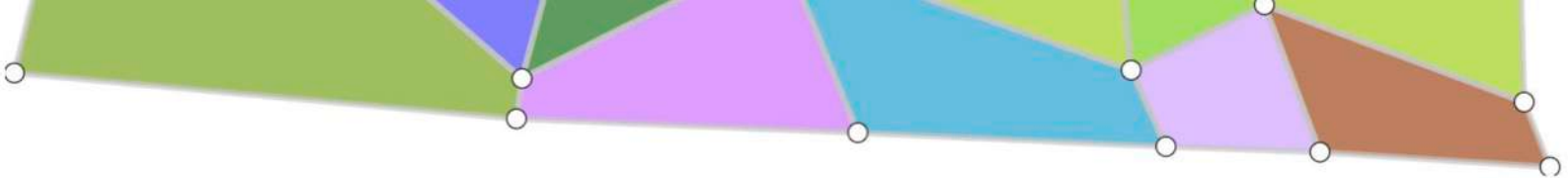
### Introdução

A tarefa aplicada tem o enquadramento curricular no tema da Geometria Analítica de 11.º ano, no tópico do Produto Escalar, mais especificamente os sub-tópicos Perpendicularidade de Vetores e de Retas e as Equações Cartesianas de Planos no Espaço.

Os objetivos de aprendizagem consistem em resolver problemas envolvendo: equações vetoriais de retas; equações cartesianas de planos; distância de um ponto a um plano e posição relativa de retas e planos.

A ação estratégica de ensino do professor passa por estimular os alunos a utilizar o *GeoGebra 3D* para visualizar, explorar e estabelecer conjecturas, envolvendo planos e retas no espaço, em secções determinadas por cortes de planos num cubo e ainda promover o desenvolvimento do pensamento computacional.

Recorremos ao *GeoGebra 3D*, por ser uma ferramenta que permite realizar simulações de modo rápido, permitindo ao aluno realizar conjecturas e tirarem deste modo as suas conclusões. A escolha deste meio e a realização de uma tarefa contextualizada e adequada à utilização deste recurso em contexto de sala de aula, tem por objetivo promover nos alunos uma maior motivação e disponibilidade para a aprendizagem da Matemática (Ponte, 2014). A tarefa é composta por duas partes, uma primeira, mais relacionada com a codificação do *GeoGebra* e interpretação de linhas de código do *GeoGebra*, por considerarmos que a análise prévia dos comandos em código *GeoGebra* é uma parte fundamental da tarefa, promovendo o



desenvolvimento do Pensamento Computacional. Uma segunda parte, onde os alunos exploram as secções produzidas num cubo por um determinado plano. Neste segundo momento os alunos eram convidados a realizar diferentes conjecturas e com recurso ao *GeoGebra* fazer a verificação das mesmas.

## Análise ao conteúdo da tarefa

Na primeira questão pretende-se que os estudantes interpretem os comandos, da Figura 1a, e conjecturem qual será o resultado da sua aplicação no *GeoGebra*. Esta questão visa desenvolver competências de Pensamento Computacional (PC).

|                                 |                                                         |
|---------------------------------|---------------------------------------------------------|
| $a=1$                           | $k=1/2$                                                 |
| $A:=(0,0,0)$                    | $P:=\text{Homotetia}(G,k,A)$                            |
| $B:=(0,a,0)$                    | $p:=\text{PlanoPerpendicular}(P,\text{Reta}(G,A))$      |
| $Q:=\text{Polígono}(A,B,4)$     | $\text{Ipq}:=\text{InterseçãoGeométrica}(p, \text{Mg})$ |
| $\text{Mg}:=\text{Prisma}(Q,a)$ |                                                         |

Figura 1a - Código da I Parte      Figura 1b - Código da II Parte

Figura1 - Códigos para a construção em GeoGebra

Os alunos podem ter experiência com o uso de ferramentas do *GeoGebra*, contudo, consideramos a análise prévia dos comandos em código *GeoGebra* uma parte fundamental da tarefa, promovendo o desenvolvimento do PC.

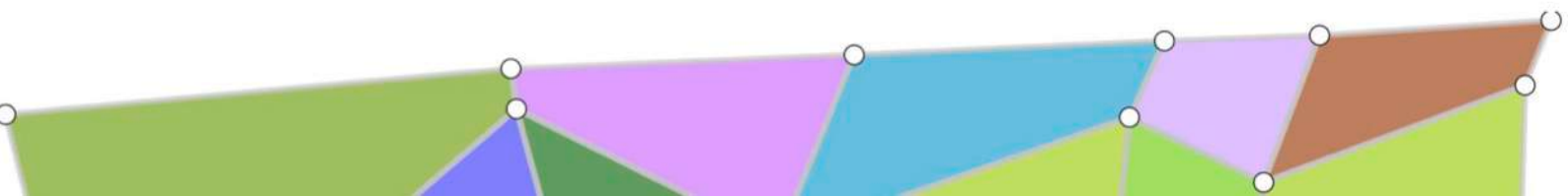
Na segunda questão, é expectável que os estudantes identifiquem o cubo, escrevendo os monómios que representam o seu volume e área lateral.

Na segunda parte os estudantes procedem à construção da secção provocada num cubo por um plano perpendicular a uma sua diagonal espacial (Figura 1b). Mais uma vez a utilização apenas de comandos do *GeoGebra* é uma estratégia para desenvolver o PC, sendo assim expectável que os alunos se detenham na compreensão dos comandos, uma vez que estes correspondem de modo direto às ações geométricas e algébricas a que terão de responder nesta parte da tarefa.

Na terceira questão os alunos têm de referir que para  $k = 1/2$  a secção obtida é um hexágono, devendo justificar que é regular, podendo alegar, por exemplo, que os lados do hexágono são congruentes com a hipotenusa de um triângulo retângulo e isósceles onde o cateto mede  $\frac{a}{2}$ , sendo a área do hexágono dada por  $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$ .

Na quarta questão os alunos têm que escrever a equação vetorial da reta  $GA$  podendo utilizar diferentes estratégias.

Na quinta questão é expectável que os alunos alterem os valores de  $k$  e, desse modo, observem várias configurações das secções, detendo-se nas equações do plano que as definem. Para identificar equações dos planos, os alunos podem observar as equações apresentadas na *Folha Algébrica* do *GeoGebra* num primeiro momento.



Num segundo momento convém sistematizar que: (i) os planos são ortogonais ao vetor de coordenadas  $(a, a, a)$  colinear com o vetor  $(1, 1, 1)$ ; (ii) os planos contêm o ponto de coordenadas  $(k, k, k)$ , pois este ponto é a imagem de  $(a, a, a)$  pela homotetia de centro  $(0, 0, 0)$  e razão  $k$ . Deste modo a equação da família de planos em questão pode-se escrever como  $x + y + z = 3k$ , com  $k \in [0, 1]$ .

Assim, na alínea a), há duas equações que correspondem aos triângulos equiláteros de área máxima e correspondem a  $k = 1/3$  ou  $k = 2/3$  ou, neste caso os lados do triângulo são congruentes com a diagonal facial do cubo, tendo estes triângulos área de  $\frac{a^2\sqrt{6}}{4}$ ; na alínea b), pode ser apresentada uma resposta que corresponda a equação, com  $x+y+z=3k$ , com  $k \in ]1/3, 1/2[ \cup ]1/2, 2/3[$ .

Na sexta questão pretende-se que os alunos, numa “composição matemática” identifiquem todos os tipos de secções possíveis: um ponto, para  $k \in 0, 1$ , triângulos equiláteros, para  $k \in ]0, 1/3] \cup [2/3, 1[$ ; hexágonos, para  $k \in ]1/3, 2/3[$ . Poderá ainda esta composição incluir outras conclusões ou observações dos alunos (ver Figura 2).

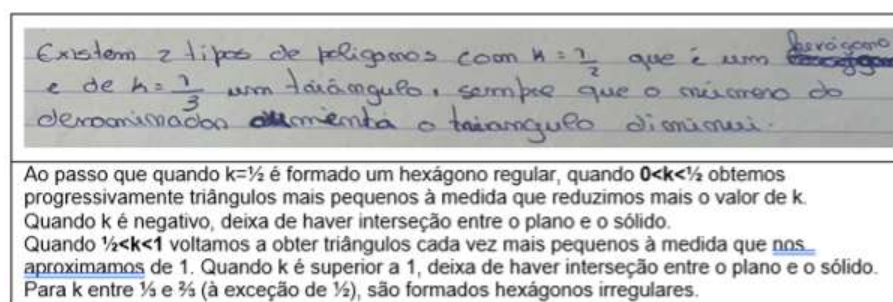


Figura 2 - Exemplos de respostas dos alunos na 6ª questão.

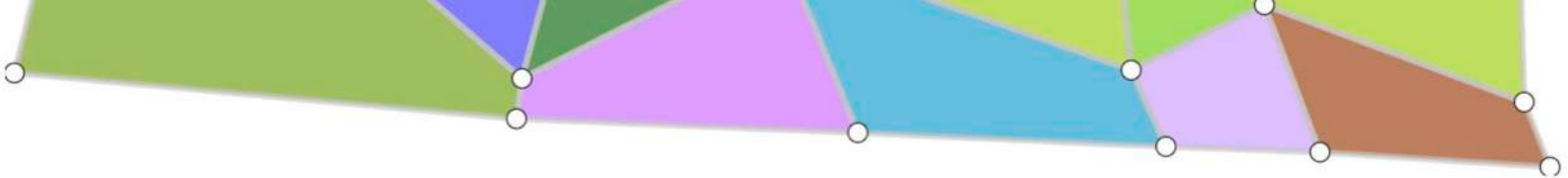
A questão 7 surge pelo facto dos estudantes tenderem a esquecer que a aresta do cubo é  $a$ , escolhendo o valor de  $a = 1$ , usado no código do *GeoGebra*, pelo que esta questão pode constituir um momento de revisão do problema, verificando a possibilidade da generalização das respostas dadas às questões da tarefa.

## Considerações Finais

A tarefa foi aplicada a alunos do 11.º ano, de uma escola secundária e que embora não estivessem com as novas aprendizagens essenciais, conseguiram ter um bom desempenho. De salientar que os alunos tiveram muita dificuldade em interpretar as linhas de código apresentadas e respetiva correspondência com a parte geométrica.

Alguns dos alunos deram resposta para o valor de  $a = 1$ , não havendo nesta primeira fase evidência da possibilidade do valor de  $a$  poder ser outro.

Como sugestão para futura aplicação, esta tarefa admite extensões, quer seja a propostas de construção de modelos dos cubos truncados, quer seja a um estudo mais aprofundado da área das secções dos planos. A elaboração de modelos dos sólidos



pode surgir a partir da construção elaborada no *GeoGebra* a partir de impressão 3D.

## Referências

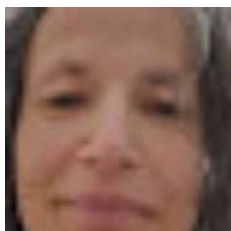
- Carvalho e Silva, J.(Coord.), Albuquerque, C., Almiro, J., Cruchinho, C., Carreira, S., Correia, P., Domingos, A., Espadeiro, G. E., Filipe, N., Gabriel, L., Martins, H., Martins, M.E.G., Rodrigues, A., & Santos, M. T. (2023) Aprendizagens essenciais - articulação com o perfil dos alunos. 11.º ano - Ensino Secundário. República Portuguesa: Educação. Lisboa. [http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens\\_Essenciais/mat\\_a\\_11\\_-\\_vf.pdf](http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/mat_a_11_-_vf.pdf)  
Observação: Em todos os anos do Ensino Secundário há referências ao uso da tecnologia, nomeadamente, ao *GeoGebra* .
- Ponte, J. P. da. Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática. PONTE, J. P. da (Org.). *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática*. Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2014. p.13 – 27. <https://ro-saurasoligo.files.wordpress.com/2014/12/prc3a1ticas-profissionais-dos-professores-de-matemc3a1tica-joc3a3o-pedro-da-ponte-org.pdf>

## Nota Biográfica



### **Maria Irene Marques Gonçalves**

Professora do Agrupamento de Escolas Padre Benjamim Salgado, Mestre em Ciências da Educação, na Área de especialização em Supervisão Pedagógica na Educação Matemática, pela universidade do Minho, em 2011, com a tese “Aprendizagem dos modelos de grafos, por alunos de MACS do 11.º ano, através do trabalho de projeto”.



### **Oscarina Manuela Ribeiro Nogueira**

Professora do Agrupamento de Escolas de Fafe, Mestre em Matemática e Aplicações, pela Universidade de Aveiro, em 2020, com a tese “Aprendizagem Ativa em Matemática com Recurso à Tecnologia: A Aula Invertida Através do Sistema SIA-CUA”.



### **Mário José Calado Ferreira Santos**

Professor do Agrupamento de Melgaço. Com larga experiência na formação contínua de professores, dinamizando ações de formação e sessões práticas em encontros de professores. No seio da comunidade escolar desenvolve projetos, nomeadamente nas áreas da flexibilização curricular, jogos matemáticos, e da cidadania.

---

## Aulas com o *GeoGebra Classroom* no 2º e 3º ciclos do Ensino Básico

Ilda Marisa de Sá Reis<sup>1</sup> & José Manuel Dos Santos<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Escola Secundária de Penafiel; <sup>2</sup>Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologias da Universidade de Coimbra

SP2  
28 de outubro  
10:00 GMT  
Sala S02  
DMUC



As ferramentas tecnológicas são parte integrante do nosso quotidiano e a sala de aula não deve ser um local de exceção, pois o seu uso contribui para melhorar a qualidade das aprendizagens e do ensino. As novas Aprendizagens Essenciais da disciplina de Matemática do 2º e 3º ciclos do Ensino Básico, nomeadamente as de 5º e 7º anos (MEC, 2021a e 2021b), respetivamente) defendem que as “ferramentas tecnológicas devem ser consideradas como recursos incontornáveis e potentes para o ensino e aprendizagem da Matemática”. É também destacado o papel da “tecnologia na aprendizagem e ensino da matemática por facilitar a transição entre diferentes tipos de representação e análises com maior detalhe ou magnitude, inacessíveis sem os recursos tecnológicos”. Neste contexto, a escolha das tarefas matemáticas com propósitos bem definidos aliadas à tecnologia impactam de forma positiva na aprendizagem do aluno promovendo aprendizagens mais significativas e ampliando os contextos em que se desenvolve a ação do aluno e a diversidade de perspetivas sobre objetos matemáticos estudados.

Entre as tecnologias direcionadas para a aprendizagem de matemática destacam-se os ambientes de geometria dinâmica como é o caso do *GeoGebra*. Este software permite a realização de experiências que favorecerem a compreensão das propriedades e relações dos conceitos em estudo (MEC, 2021a, pág. 11). O *GeoGebra*, além de um ambiente de aprendizagem matemática (Dos Santos e Trocado, 2016), integra outras plataformas como o Geogebra Materiais e o Geogebra Classroom. O Geogebra Materiais reúne inúmeros tarefas dinâmicas (activities) e livros. Os livros são compilações de tarefas dinâmicas. As tarefas dinâmicas são recursos partilhados online, por utilizadores deste software, que podem conter vários tipos de elementos, nomeadamente aplicações dinâmicas em GeoGebra, textos, vídeos, imagens, perguntas de resposta aberta ou de escolha múltipla, pdfs e ligações para endereços da internet. O Geogebra Classroom é uma plataforma que oferece aos professores novas oportunidades de ensino, permite envolver o aluno de forma mais ativa e inclusiva na realização das tarefas propostas e facilita a interação entre professores e alunos (Zöchbauer e Hohenwarter, 2020). Esta plataforma, apresentada publicamente em 2020, permite aos professores atribuir tarefas interativas aos alunos, visualizar o progresso geral (de todas as tarefas) dos seus alunos em tempo-real (Figura 1), monitorizar em tempo-real o trabalho realizado por um dado aluno, ver quais as tarefas iniciadas por um aluno.

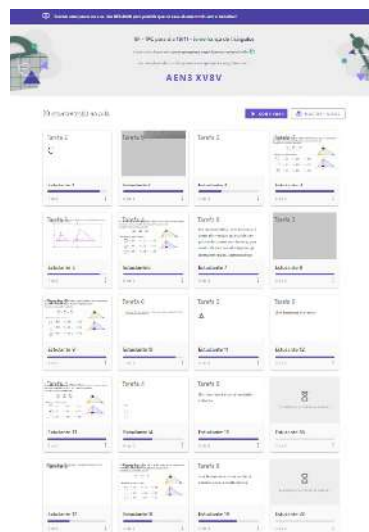


Figura 1: Vista geral de uma tarefa atribuída a uma turma da Escola Secundária de Penafiel, no ano letivo 2022/2023.

Permite ainda exibir todas as respostas de uma pergunta (task) com a identificação do aluno ou de forma anónima (Figura 2).

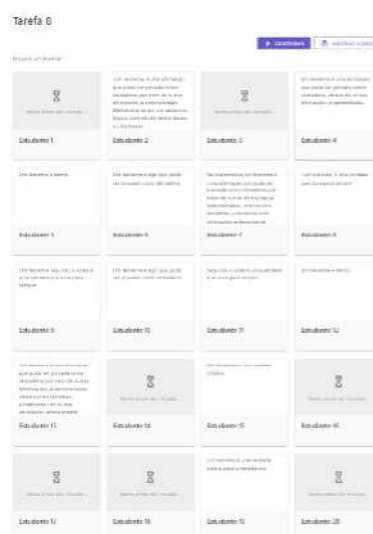
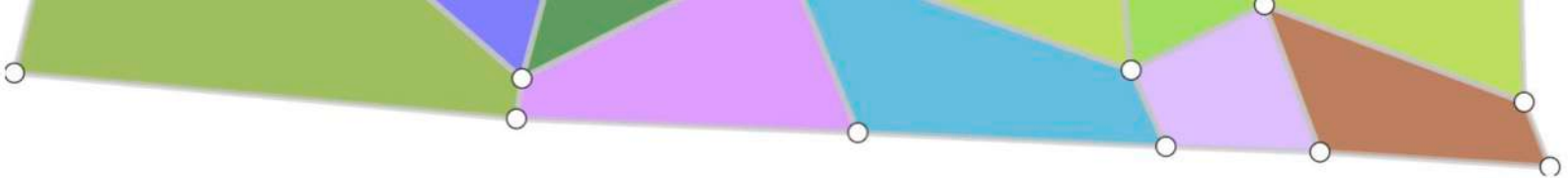


Figura 2: Respostas obtidas numa tarefa de resposta aberta da tarefa referida na Figura 1.

Esta plataforma tem a vantagem de melhorar a gestão do tempo do professor e auxiliar no processo de avaliação formativa dos alunos uma vez que o professor consegue mais facilmente decidir quais os alunos que requerem mais atenção e fornecer feedback de forma mais célere.



Estas tarefas podem ser realizadas em modo síncrono ou assíncrono. O professor também tem a possibilidade de pausar a tarefa em qualquer momento para fornecer, por exemplo, uma explicação para o grupo turma, orquestrar uma discussão partindo dos contributos de alunos numa dada tarefa ou, ainda, bloquear a edição da mesma. De salientar que o professor, nos registos guardados na sua conta *GeoGebra*, pode manipular/alterar a resolução realizada por um aluno sem que as alterações sejam guardadas na conta do professor ou no registo do aluno.

Nas turmas com mais de um professor, estas tarefas podem ter mais do que um professor-autor o que facilita o trabalho colaborativo. Todos os professores autores da tarefa têm acesso ao trabalho desenvolvidos pelos alunos a partir da sua conta *GeoGebra*.

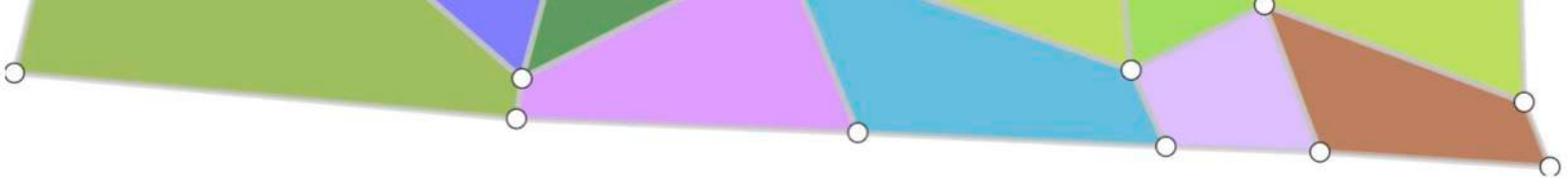
As tarefas atribuídas aos alunos podem ser tarefas disponíveis ou adaptadas do repositório de tarefas do *GeoGebra* Materiais ou concebidas pelo próprio professor e podem conter perguntas com tipologia diversificada. É possível distribuir aos alunos tarefas individuais ou livros.

Estas tarefas podem ser atribuídas aos alunos através do *GeoGebra Classroom* (ou código QR) ou, ainda, através da *Google Classroom*. A segunda opção apresenta vantagens sobre a primeira, caso o aluno não possua conta no *GeoGebra* uma vez que acede sempre ao mesmo registo da sua resolução, ao passo que na primeira é criado um registo em cada acesso e o aluno fica sem acesso ao trabalho já desenvolvido.

Nesta sessão pretende-se dar a conhecer a plataforma *GeoGebra Classroom* de forma pormenorizada e mostrar como o seu uso pode ser potenciado para a integração plena das novas tecnologias e desenvolvimento de competências do domínio da Matemática e em contexto de sala de aula.

## Referências

- Dos Santos, J., e Trocado, A. (2016). GeoGebra as a learning Mathematical Environment. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo*. ISSN 2237-9657, 5(1), 05-22. <https://revistas.pucsp.br/IGISP/article/view/File/26795/19963>
- MEC (2021a). Aprendizagens Essenciais, Articulação com o Perfil dos Alunos - Matemática - Ensino Básico, 2.º ciclo, Matemática, 5.º ano. [https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens\\_Essenciais/2\\_ciclo/ae\\_mat\\_5.o\\_ano.pdf](https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/2_ciclo/ae_mat_5.o_ano.pdf)
- MEC (2021b). Aprendizagens Essenciais, Articulação com o Perfil dos Alunos - Matemática - Ensino Básico, 3.º ciclo, Matemática, 7.º ano. [https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens\\_Essenciais/3\\_ciclo/ae\\_mat\\_7.o\\_ano.pdf](https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/3_ciclo/ae_mat_7.o_ano.pdf)



Zöchbauer, J., & Hohenwarter, M. (2020). Developing a collaboration tool to give every student a voice in a classroom discussion. *In Seventh ERME Topic Conference on Language in the Mathematics Classroom*. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02970629/document>

## Nota Biográfica



### Ilda Marisa de Sá Reis

Licenciada em Matemática – Ramo Educacional pela Faculdade de Ciências da Universidade do Porto e mestre em Fundamentos e Aplicações – Geometria e Topologia pela mesma Universidade. Desenvolve a sua atividade profissional como professora de Matemática desde 2000, atualmente na Escola Secundária de Penafiel.

---

## Explorando o Pensamento Computacional no *GeoGebra* : Modelação 3D a partir de Imagens Reais

Alexandre Trocado<sup>1</sup> & Nuno Guimarães<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Colégio Camões, Gondomar, Portugal, <sup>2</sup>Colégio Novo da Maia, Maia, Portugal

SP3  
28 de outubro  
10:00 GMT  
Sala S02  
DMUC



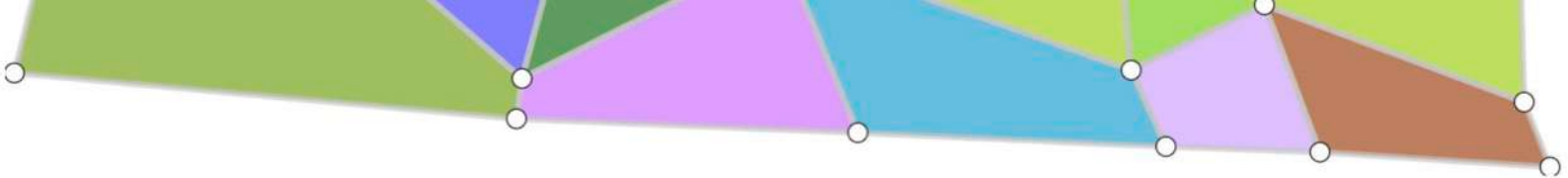
Tendo como ponto de partida a integração gradual das novas aprendizagens no Ensino Básico (Canavarro *et al.*, 2021) e Secundário (Carvalho e Silva *et al.*, 2023), torna-se relevante a utilização de tecnologias atuais, em particular o *GeoGebra*, numa abordagem *STEAM*, com o objetivo principal de desenvolver o Pensamento Computacional.

De acordo com as novas Aprendizagens Essenciais para a Matemática, o *GeoGebra* é destacado como um recurso incontornável e potente para o ensino desta disciplina. Esta ferramenta proporciona aos alunos a oportunidade de interagir e visualizar conceitos, aprofundando assim a sua compreensão e memorização de conceitos matemáticos. A incorporação de tecnologia na sala de aula pode tornar a Matemática mais relevante e interessante para os alunos, promovendo a sua participação e envolvimento ativo.

O pensamento computacional inclui práticas como a abstração, a decomposição, o reconhecimento de padrões, a análise e definição de algoritmos, e o desenvolvimento de hábitos de depuração e otimização dos processos (Grover & Pea, 2021). O *GeoGebra* é uma ferramenta útil para apoiar o desenvolvimento dessas habilidades, pois permite aos alunos experimentar conceitos matemáticos de uma maneira que envolva a resolução de problemas e o pensamento lógico. Além disso, o uso de tecnologia como o *GeoGebra* pode ajudar a preparar os alunos para um mundo cada vez mais digital e tecnológico, fornecendo-lhes habilidades práticas e experiência com ferramentas digitais (Abar *et al.*, 2021).

A modelação 3D no *GeoGebra* a partir de imagens reais pode ser uma ferramenta poderosa no desenvolvimento do pensamento computacional, permitindo que os alunos percebam como os conceitos matemáticos se aplicam ao mundo real. Esta abordagem pode ser especialmente útil para motivar os alunos que, de outra forma, poderiam considerar a Matemática como um campo abstrato e desconectado do seu dia a dia.

Por outro lado, a impressão 3D oferece uma oportunidade para os professores integrarem a tecnologia nas suas aulas, permitindo aos alunos visualizar e interagir com objetos matemáticos e geométricos de maneira mais concreta e tangível. A impressão 3D na sala de aula pode também ajudar a preparar os alunos para o futuro, pois muitas áreas do conhecimento, como engenharia, medicina, investigação



científica, arquitetura, entre outras, estão a usar este recurso como uma das mais recentes ferramentas de trabalho.

É nossa responsabilidade, como docentes, tornar o processo de ensino-aprendizagem mais próximo da realidade futura dos alunos. Criar dinâmicas multidisciplinares, que neste caso, cruzem a Matemática com a impressão e a modelação 3D, aproximamos de situações que poderão ser vivenciadas nas suas futuras carreiras.

Dentro deste contexto, nesta sessão prática serão propostas tarefas de modelação 3D, com recurso ao GeoGebra, a partir de imagens reais e a respetiva impressão 3D do seu produto final.

## Referências

- Abar, C. A. A. P., Dos Santos, J. M. D. S., & de Almeida, M. V. (2021). Computational Thinking in Elementary School in the Age of Artificial Intelligence: Where is the Teacher? *Acta Scientiae*, 23(6). <https://doi.org/10.17648/ACTA.SCIENTIAE.6869>
- Canavarro, A.P. (Coord.), Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M.J., Correia, P., Marques, P., & Espadeiro, R.G. (2021). *Aprendizagens Essenciais de Matemática no Ensino Básico*. Republica Portuguesa: Educação. Lisboa.
- Carvalho e Silva, J., Albuquerque, C., Almiro, J., Cruchinho, C., Carreira, S., Correia, P., Domingos, A., Espadeiro, G. E., Filipe, N., Gabriel, L., Martins, H., Martins, M.E.G., Rodrigues, A., & Santos, M. T. (2022) *Aprendizagens essenciais - articulação com o perfil dos alunos. 10.º ano - Ensino Secundário*. República Portuguesa: Educação. Lisboa. [http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens\\_Essenciais/mat\\_a\\_10\\_-\\_vf.pdf](http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/mat_a_10_-_vf.pdf)
- Grover, S., & Pea, R. (2018). Computational thinking: A competency whose time has come. *Computer science education: Perspectives on teaching and learning in school*, 19(1), 19-38.

## Nota Biográfica



### **Nuno Gaspar Guimarães**

Licenciado em Curso de Professores do 2.º Ciclo do Ensino Básico – Educação Musical - pela Escola Superior de Educação Jean Piaget. Mestre em Multimédia - especialização em Música Interactiva e Design de Som - pela FEUP – Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto. Pós-graduado em Curso de Especialização em Tecnologias e Robótica no Ensino Básico pelo Instituto de Educação de Lisboa. Leciona há 21 anos no ensino privado, sendo atualmente professor de TIC/ Robótica no Colégio Novo da Maia. Foi professor/ orientador de vários grupos premiados do Concurso Nacional de programação em Scratch “A criar com scratch“. Desempenhou funções de autor de manuais escolares e criador de produtos multimédia para a Porto Editora. Participou como orador em conferências nacionais.

---

## Tarefas com o *GeoGebra* para trabalhar números racionais e suas operações

SP4  
28 de outubro  
15:00 GMT  
Sala S02  
DMUC

Joana Teles

Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências e Tecnologias da Universidade de Coimbra, Coimbra, Portugal



O *GeoGebra* é um software dinâmico de matemática que combina geometria, álgebra e cálculo. Além de permitir ao professor a criação das suas próprias atividades, que podem depois ser disponibilizadas aos alunos sob a forma de tarefas, acompanhadas em tempo real e arquivadas, também oferece um conjunto de recursos gratuitos criados por uma comunidade de utilizadores. Na figura 1, apresenta-se a janela que se obtém pesquisando nos recursos disponíveis no *GeoGebra* pela palavra “frações”.

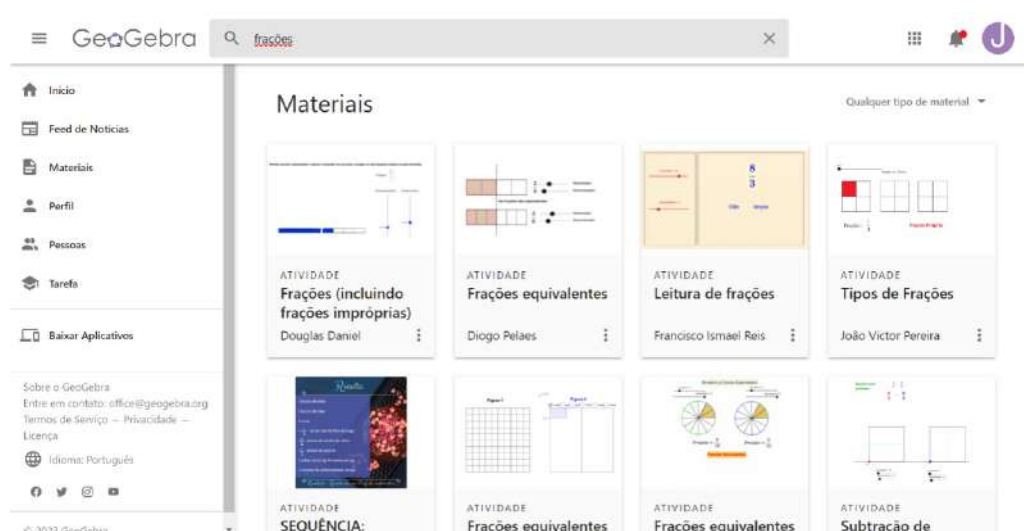
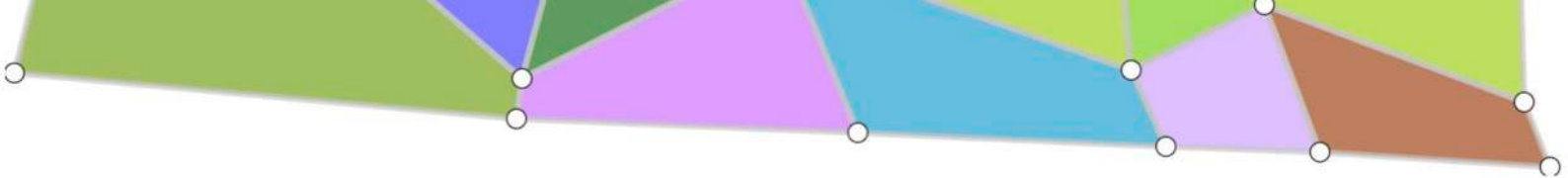


Figura 1

O ensino das frações na escolaridade básica é um dos primeiros obstáculos (reconhecido de forma universal) na educação. Por esta razão, e como grande desafio para o professor, este deve procurar que os alunos assimilem de forma sólida os diferentes aspetos deste tema. Além das operações elementares sobre frações, os alunos devem estar munidos das ferramentas essenciais para mostrar o seu domínio na utilização e manipulação das frações, em contextos variados, e o *GeoGebra* pode ser uma ferramenta dinâmica para ajudar na concretização deste objetivo.

Nesta sessão prática serão apresentadas e exploradas algumas tarefas, utilizando o *GeoGebra*, que permitem trabalhar alguns aspetos do estudo dos números racionais, desde os mais elementares às operações:

- 
- Representar frações
    - O *GeoGebra* pode ser usado para criar representações de frações: reta numérica, barras divididas, setores circulares, retângulos divididos em partes iguais
  - Identificar frações equivalentes
  - Ordenar frações
  - Identificar frações próprias e impróprias
  - Adicionar e subtrair números racionais positivos
  - Simplificar frações
  - Dividir uma fração por um número natural
  - Multiplicar e dividir números racionais não negativos
  - Relacionar as diversas representações: fração, dizima, percentagem

## Referência

Página web <https://www.geogebra.org/search/fra%C3%A7%C3%A3o> (consultada em 17 setembro 2023)

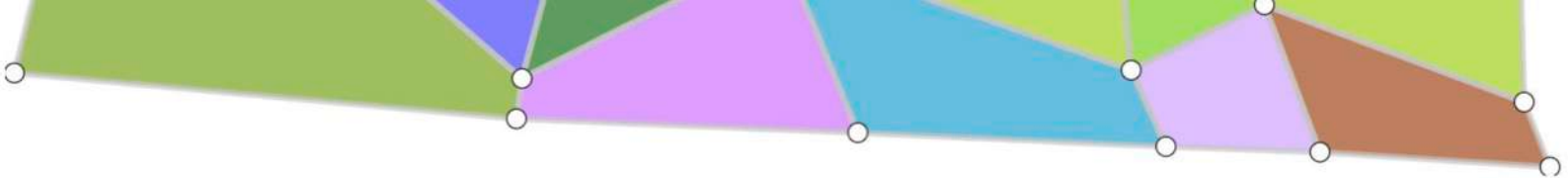
## Nota Biográfica



### Joana Teles

Professora auxiliar no Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra desde 2003. Pertence à comissão de problemas das Olimpíadas Portuguesas de Matemática desde 1995. Acompanha de forma regular as equipas portuguesas nas competições internacionais. Proferiu dezenas de palestras em escolas do ensino básico, divulgando a Matemática através da resolução de problemas. É formadora do Centro de Formação da Sociedade Portuguesa de Matemática (SPM). É membro da direção da SPM desde 2006, tendo sido vice-presidente de 2010 a 2012, e sendo responsável em todas estas direções pelas Olimpíadas de Matemática.

---



SP5  
28 de outubro  
15:00 GMT  
Sala S04  
DMUC

## Resolução de problemas de otimização com recurso ao *GeoGebra*

Carla Martinho

Instituto Superior de Contabilidade e Administração de Lisboa, Politécnico de Lisboa  
Portugal

O *GeoGebra* é uma ferramenta matemática amplamente reconhecida e utilizada em todo o mundo. É versátil, combinando várias áreas da matemática, tornando-se num valioso recurso educativo digital (RED) para a resolução de problemas de matemática em geral, e em particular os de otimização relacionados com a programação linear.

Nesta apresentação, exploraremos as funcionalidades do *GeoGebra* e ilustraremos como esta ferramenta pode ser utilizada na resolução destes problemas de duas variáveis, com especial incidência na modelação de funções objetivo, restrições, vetor gradiente e curvas de nível. Além disso, discutiremos a importância deste software como um RED no ensino e aprendizagem da matemática, bem como o seu impacto na motivação dos alunos.

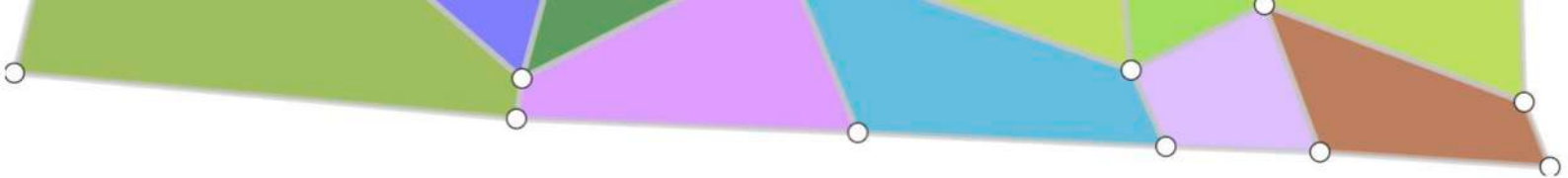
São vários os autores, que há mais de uma década desenvolvem investigações no ensino da matemática com recurso ao *GeoGebra* (Molnár, 2016; Molnár & Lukay, 2015; Stols & Kriek, 2011; Ainley *et al.*, 2010; Breda, Trocado & Dos Santos, 2021).

A utilização deste software gráfico além de muito útil promove o interesse dos alunos ao facilitar um mais rápido entendimento dos conceitos, tornando-se por isso, um forte aliado dos professores em sala de aula (Carvalho, 2021; Dos Santos & Peres, 2012).

O *GeoGebra* é um software de matemática dinâmica, online de acesso livre, para todos os níveis de ensino, que integra geometria, álgebra, cálculo, gráficos e estatísticas num único interface. De entre muitas das suas funcionalidades o *GeoGebra* Permite: *i*) criar e explorar figuras geométricas, com especial utilidade em problemas de otimização com elementos espaciais; *ii*) definir variáveis e funções algébricas, fundamentais para a modelação matemática; *iii*) facilita a derivação e a integração, crucial na otimização de funções; *iv*) permite visualizar gráficos de funções e relações, que é essencial para entender os resultados da otimização.

De acordo com Faria e Maltempi (2019) a utilização do *GeoGebra* permite experimentar, criar estratégias, fazer conjecturas, explorar, argumentar e deduzir propriedades matemáticas.

Para ilustrar a aplicação do *GeoGebra* na resolução de problemas de programação linear, vamos considerar um exemplo concreto.



Supondo que temos uma empresa que produz dois produtos,  $A$  e  $B$  e que pretendemos maximizar o lucro total sujeito a determinadas condições relativas aos recursos disponíveis. A função objetivo é maximizar o lucro total, representado por  $Z = 5x + 4y$ , onde  $x$  representa a quantidade de produto  $A$  a ser produzido e  $y$  a quantidade de produto  $B$  a ser produzido. Sujeito às restrições  $2x + y \leq 10$ , relativa à disponibilidade do recurso  $A$ , e  $x + 3y \leq 12$ , relativa à disponibilidade do recurso  $B$ , considerando que ambas as quantidades não podem ser negativas.

Com recurso ao *GeoGebra* é possível modelar as restrições e a função objetivo, criando um sistema de equações. As curvas de nível da função objetivo e a sua intersecção com as restrições definem a região admissível. A otimização encontra-se através da utilização do vetor gradiente, que nos ajuda a encontrar o ponto de máximo (ou mínimo) dentro dessa região.

O *GeoGebra* simplifica todo este processo, permitindo-nos visualizar graficamente as soluções ótimas e explorar diferentes cenários de otimização tornando o ensino e aprendizagem mais envolvente e compreensível (Cerqueira *et al.*, 2021).

A abordagem interativa e visual do *GeoGebra* motiva os alunos a envolverem-se mais ativamente no processo de ensino e aprendizagem (Dahal & Pant, 2019). O software torna a matemática mais tangível e aplicável, demonstrando como os conceitos matemáticos são relevantes em situações do mundo real. Tal, propicia um ambiente de ensino e aprendizagem mais dinâmico, e suscita aos alunos um sentimento de empoderamento na exploração e resolução de problemas.

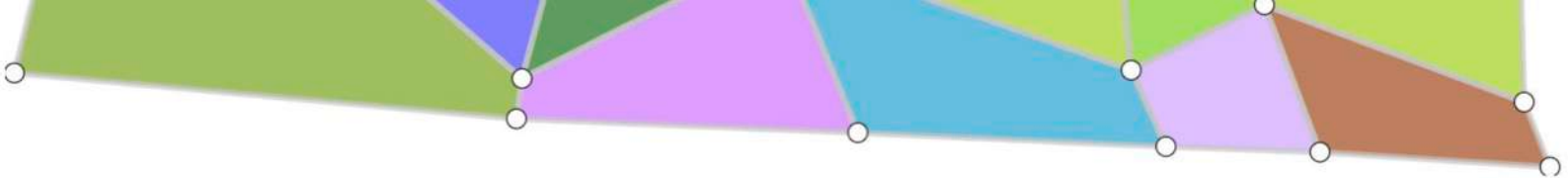
O *GeoGebra* permite ainda, a diferenciação no processo de ensino e aprendizagem, facilitando a que os professores adaptem, rapidamente, as atividades às necessidades individuais dos alunos. Os professores podem criar recursos personalizados e desafios interdisciplinares, promovendo a autonomia e a autoeficácia dos estudantes (Rahman *et al.*, 2021).

Além disso, o recurso ao *GeoGebra* motiva os alunos, envolvendo-os ativamente na sua aprendizagem e torna a matemática mais acessível, sendo por isso, um ativo inestimável no ensino e aprendizagem da matemática. Este software não só simplifica a resolução de problemas de otimização, mas também promove o pensamento crítico e resolutivo dos alunos.

Ao compreender as principais funcionalidades do *GeoGebra* e a sua aplicação na resolução de problemas matemáticos, alunos e professores têm uma ferramenta valiosa ao seu alcance, aplicável em inúmeras áreas.

## Referências

Ainley, J., Eveleigh, F., Freeman, C., & O'Malley, K. (2010). ICT in the Teaching of Science and Mathematics in Year 8 in Australia: report from the IEA Second



International Technology in Education Study (SITES) survey. [https://research.acer.edu.au/acer\\_monographs/6](https://research.acer.edu.au/acer_monographs/6)

Breda A.M.R.D., Trocado A.E.B.S., & Dos Santos J.M.D.S. (2021) Torus and Quadrics Intersection Using GeoGebra. In: Cheng LY. (eds) ICGG 2020 - Proceedings of the 19th International Conference on Geometry and Graphics. ICGG 2021. *Advances in Intelligent Systems and Computing*, vol 1296. Springer, Cham.

Carvalho, E. S. (2021). Problemas de Otimização Linear no Ensino Médio: uma proposta de abordagem com o uso da ferramenta *GeoGebra* -Book. <http://repositorio.ufla.br/jspui/handle/1/48525>

Cerqueira, G. R., Pires, V. C., & Campos, D. S. (2021). Linear programming problems in High School using GeoGebra. *Revista De Ciência Da Computação*, 3(1), 12-16.

Dahal, N., Shrestha, D., & Pant, B. P. (2019). Integration of *GeoGebra* in teaching and learning geometric transformation. *Journal of Mathematics and Statistical Science*, 5(12), 323-332.

Dos Santos, J. M. & Peres, M. J. (2012). Atitudes dos alunos face ao *GeoGebra* – Construção e validação de um inventário. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo*, 1 (1): XLVI-LXV. <https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/8874>

Faria, R. W. S. D. C., & Maltempi, M. V. (2019). Intradisciplinaridade matemática com GeoGebra na matemática escolar. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 33, 348-367. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v33n63a17>

Molnár, P. (2016). Solving a linear optimization word problems by using GeoGebra. *ICTE Journal*, 5(2): 16-28. DOI: 10.1515/ijicte-2016-0006

Molnár, P. & Lukáy, S. (2015). Dynamic geometry systems in Mathematics Education: attitudes of teacher. *ICTE Journal*, 4, (4): 19-33. DOI: 10.1515/ijicte-2015-0017

Rahman, O., Usman & Johar, R. (2021). Improving high school students' critical thinking ability in linear programming through problem based learning assisted by GeoGebra, *Journal of Physics: Conference Series* 1882 012070. DOI:10.1088/1742-6596/1882/1/012070 <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1882/1/012070/pdf>

Stols, G., & Kriek, J. (2011). Why don't all maths teachers use dynamic geometry software in their classrooms?. *Australasian Journal of Educational Technology*, 27(1). <https://doi.org/10.14742/ajet.988>

## Nota Biográfica



### Carla Martinho

Professora no Instituto Superior de Contabilidade e Administração de Lisboa – IS-CAL— IPL, Politécnico de Lisboa, Portugal. Licenciada em Matemática Aplicada às Ciências Atuariais pela Universidade Nova de Lisboa. Mestre em Educação Matemática pela Universidade de Coimbra e em Matemática Aplicada à Economia e Gestão pela Universidade de Lisboa. Doutorada em Ciências da Educação e Desenvolvimento pela Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa. Pós-graduada em Educação Digital, realiza investigação em métodos quantitativos aplicados às ciências empresariais e em metodologias e avaliação no ensino da matemática, tanto no ensino presencial como a distância.

---

## Proyecto MATESGG Matemáticas y GeoGebra

Juan Antonio Reyes Delgado<sup>1</sup> & Steven Van Vaerenbergh<sup>2</sup>

<sup>1</sup>IES Aljanadic, Posadas, Córdoba; <sup>2</sup>Universidad de Cantabria, España



El proyecto MatesGG, Matemáticas con GeoGebra, surge en 2020 como una iniciativa de la Federación Española de Sociedades de Profesorado de Matemáticas (FESPM), con el apoyo del Instituto Nacional de Tecnologías Educativas y de Formación del Profesorado (INTEF) y el Centro Internacional de Encuentros Matemáticos (CIEM). Su objetivo es ofrecer al profesorado de matemáticas de toda España una colección de recursos educativos creados con GeoGebra, un software de geometría dinámica que permite trabajar los conceptos matemáticos de forma interactiva, creativa y diversa. Estos recursos abarcan todo el currículum académico de matemáticas en España, desde la educación Infantil hasta el Bachillerato, pasando por la educación Primaria y Secundaria. Además, están clasificados, secuenciados y seleccionados de manera apropiada para que puedan ser utilizados como una útil herramienta didáctica y pedagógica en las aulas de matemáticas.

El proyecto está diseñado para que el profesorado pueda usar los recursos tanto de manera presencial, en el aula de matemáticas, como de modo online, si así fuera necesario, como se ha visto necesario durante la pandemia. Es importante destacar que MatesGG es una herramienta simple, directamente preparada para trabajar con ella en el aula, y que el profesorado que la utilice no necesita ni siquiera conocer el funcionamiento de GeoGebra o estar habituado a trabajar con este software de geometría dinámica. Así, se facilita el trabajo del profesorado en el aula de matemáticas, que puede acceder a los recursos de manera libre y sin la presión de tener que aprender a manejar ninguna herramienta adicional.

Cuando el profesorado esté impartiendo en clase un determinado bloque de contenidos, puede recurrir a MatesGG para complementarlo con actividades interactivas creadas con GeoGebra. Cada recurso dispone de una guía que incluye, además de la actividad propiamente dicha, los siguientes apartados:

- Información curricular: cursos recomendados, breve descripción, contenidos que desarrolla.
- Propuesta de uso: conocimientos previos, nivel, interacción, características del applet, recomendaciones y propuestas de uso en el aula.
- Otra información: material complementario, observaciones.
- Archivo fuente guía: para descargar libremente el fichero.
- Créditos: sociedades participantes.

Para la creación de la guía de cada uno de los recursos que contiene el proyecto MatesGG se ha empleado el editor de recursos educativos ExeLearning<sup>7</sup>, que es de código abierto y gratuito. Desde el año 2010, esta herramienta está coordinada y mantenida en constante evolución por parte del CEDEC - INTEF. Además, es gracias a las personas voluntarias que se consigue disponer de una herramienta muy actualizada y en mejora permanente.

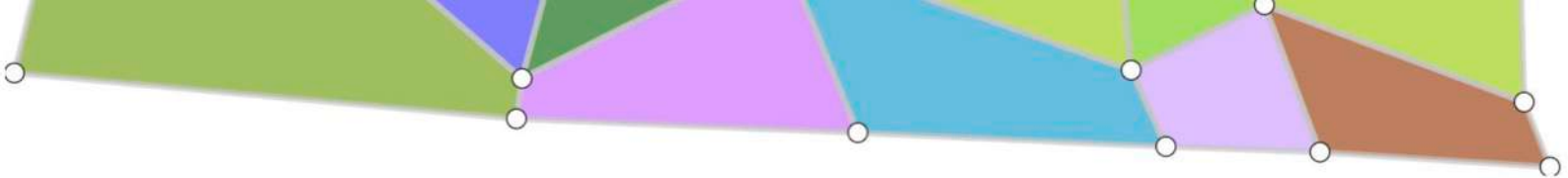
En la página web de nuestro proyecto, [www.matesgg.es](http://www.matesgg.es) (Fig. 1), podemos seleccionar el nivel educativo y el bloque de contenidos que nos interesan para nuestra aula de matemáticas. Para el caso en que existan distintas modalidades de matemáticas en el mismo curso, también será posible filtrar los recursos específicos para aquella que nos interese. Es de destacar que ha sido incluido un filtro para buscar recursos adaptados para el alumnado con necesidades educativas especiales, en particular el alumnado con trastorno del espectro autista (TEA). También podemos acceder a una colección de vídeos explicativos de algunos de los recursos más visitados. Estos vídeos están grabados por una empresa especializada y tienen un resultado muy atractivo que puede ser de gran utilidad para el profesorado a la hora de desarrollar estos contenidos en su aula. Además, tienen un alto contenido pedagógico que presentan, a modo de tutorial, los conceptos matemáticos más relevantes para la formación académica del alumnado. Tanto los recursos adaptados como los vídeos explicativos son fruto del apoyo del proyecto GeoGebra Transfer II, que extiende el proyecto MatesGG, y en el que se continúa elaborando y publicando estos materiales.



Figura 1: Capturas de la página web del proyecto MatesGG. [www.matesgg.es](http://www.matesgg.es).

El proyecto MatesGG es una iniciativa innovadora que aprovecha el potencial de GeoGebra para transformar la enseñanza de las matemáticas en el aula. GeoGebra es una herramienta potente, versátil y elegante que tiene aplicación en todos los bloques de contenidos de matemáticas y que permite al profesorado poder transmitir con más precisión, de una manera más visual y detallada, los distintos contenidos que antes resultaban mucho más distantes, más forzados a la hora de presentarlos en el aula con la pizarra y la tiza. El proyecto cuenta con el apoyo de un equipo humano excepcional, formado por profesorado de toda España que trabaja de manera

<sup>7</sup>ExeLearning: <https://exelearning.net/>.



coordinada a través de la FESPM. Este equipo realiza una revisión casi permanente de todo el material que se ofrece, con el objetivo de obtener el mejor resultado posible. El proyecto MatesGG es, sin duda, un ejemplo de cómo la tecnología y la colaboración pueden mejorar la calidad de la educación matemática.

## Nota Biográfica



### Juan Antonio Reyes Delgado

Estudió la licenciatura de Matemáticas y se especializó en Estadística e Investigación Operativa en la Universidad de Sevilla (España). En sus primeros años trabajó de profesor asociado en el Departamento de Estadística e Investigación Operativa de la Universidad de Sevilla. Más tarde, ingresó en el cuerpo de profesorado de Educación Secundaria y comenzó a trabajar como profesor de matemáticas en centros educativos de Secundaria y Bachillerato, donde continúa en la actualidad. Desde su licenciatura, es miembro de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales y actualmente desempeña el cargo de delegado provincial en Córdoba. Trabaja con GeoGebra desde casi sus orígenes, habiendo recibido y después impartido diversos cursos de formación al profesorado. Forma parte del proyecto MatesGG, donde coordina uno de los grupos de trabajo. GeoGebra ha revolucionado de manera absoluta su enseñanza de las matemáticas en el aula.



### Steven Van Vaerenbergh

Profesor Contratado Doctor en el área de la Didáctica de la Matemática en la Universidad de Cantabria. Su investigación se centra en la intersección de la inteligencia artificial y la didáctica de la matemática. Actualmente, estudia el uso de entornos tecnológicos para ofrecer experiencias de aprendizaje individualizadas de la matemática. Es coeditor del libro “Mathematics Education in the Age of Artificial Intelligence”, e investigador principal del proyecto GeoGebra Transfer II.

# FotoGebra: Uso de Fotografías y *GeoGebra*. para Explorar las Matemáticas

Karina Rizzo

Instituto Superior de Formación Docente y Técnica N° 24, Bernal, Argentina



28 de outubro  
10:00 GMT  
Sala  
Pedro Nunes  
DMUC

En el contexto tecnológico actual, y con el propósito de abordar los desafíos inherentes a la enseñanza de las matemáticas en la era digital, surge la iniciativa "FotoGebra"<sup>8</sup>. Un concurso que desafía a estudiantes de Educación Secundaria y Formación Docente a crear problemas a partir de fotografías tomadas por ellos mismos, y a utilizar el software de código abierto GeoGebra para su resolución.

Esta propuesta, fomenta la exploración de conceptos matemáticos en contextos de la vida cotidiana, capitalizando al máximo las posibilidades del programa GeoGebra. La dinámica de este software facilita la investigación de situaciones planteadas, el desarrollo de conjeturas, la experimentación, la revisión y la reevaluación, promoviendo así la adquisición de conocimientos a través de la investigación y la colaboración. El Concurso FotoGebra de 2023 (Figura 1) tiene un libro síntesis<sup>9</sup> y Canal en Youtube<sup>10</sup>



Figura 1: Flyer difusión VIII Edición (2023).

En esta comunicación, en una primera instancia se comentará la metodología del concurso y cuestiones relacionadas a él. Luego, se compartirán ejemplos de trabajos presentados en ediciones anteriores del mismo<sup>11</sup>, prestando especial atención al trabajo de un grupo de estudiantes de Portugal (Figura2).

<sup>8</sup>Ver [www.fotogebra.org](http://www.fotogebra.org).

<sup>9</sup>Disponible en: <https://www.geogebra.org/m/dupdmbtw>.

<sup>10</sup>En <https://www.youtube.com/c/FotoGebraRizzoK>.

<sup>11</sup>Ver <https://www.geogebra.org/u/fotogebra>



Nunes, Guilherme y María, Oliver. <https://youtu.be/-k0eGjzTYLw>



Morgado, Beatriz y Martins, Beatriz. <https://youtu.be/92-vbsJTe6o>



Luís, Matilde y Grafiatti, Joana. <https://youtu.be/toLhu50edXA>



Vicente, Bárbara y Valadas, Matilde. <https://youtu.be/DxAx9u4QvQ0>

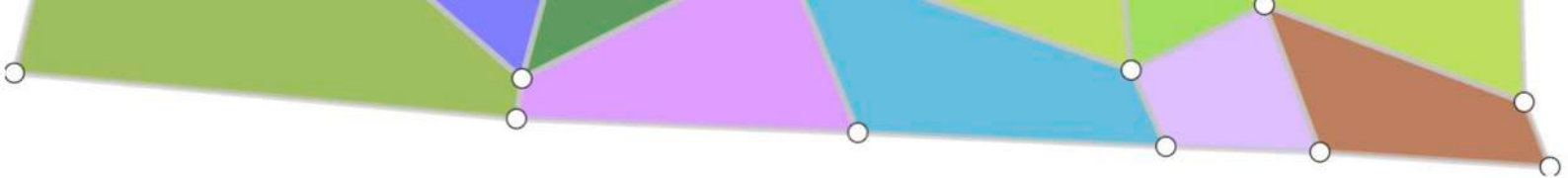


Neves, Afonso y Pepe, Joana. <https://youtu.be/U5xt0FGV5zE>

Figura 2 - Trabajos de Lisboa, en la Categoría I, Edición 2022.

Estos estudiantes de la Escola do Grémio de Instrução Liberal de Campo de Ourique, con un esfuerzo considerable, llevaron a cabo un proyecto interdisciplinario (matemáticas, artes e inglés) relacionado con un tema de gran importancia: el pavimento portugués, un componente crucial del patrimonio cultural e inmaterial de Portugal. Esta presentación resaltaré cómo los estudiantes no solo han aplicado su creatividad y habilidades matemáticas al utilizar la fotografía como punto de partida y GeoGebra como herramienta de resolución, sino también cómo han explorado un aspecto fundamental de su patrimonio cultural.

Además, se muestra cómo los estudiantes han desarrollado competencias digitales esenciales en la actualidad, como el pensamiento crítico y la habilidad para utilizar

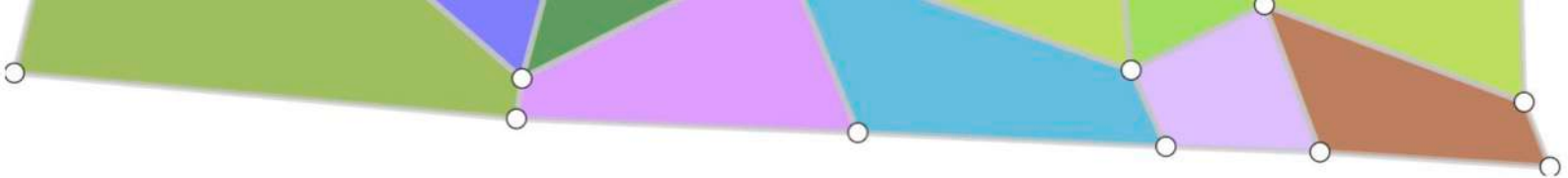


de forma autónoma las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC), entre otras.

Estos ejemplos de proyectos, servirán como fuente de inspiración y motivación para los participantes actuales, al mismo tiempo que demostrarán la versatilidad y diversidad de enfoques que pueden emerger al combinar las TIC y las matemáticas en un contexto real y culturalmente significativo.

## Referencias

- Carrillo, A. (2012). El dinamismo de GeoGebra. Unión *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, (8) 29. 9-22. <http://www.revistaunion.org/index.php/UNION/article/download/871/575>
- Cacheiro González, M L (2011). Recursos educativos TIC de información, colaboración y aprendizaje, *Pixel-Bit. Revista de Medios y Educación*, (39)). 69-81. <https://www.redalyc.org/pdf/368/36818685007.pdf>
- Perrenoud, P. (2009) Construir competencias desde la escuela. Chile: JC Saenz Editor.
- Rizzo, K. (2016). Concurso Matemática, Fotografía y GeoGebra. En F. J. Córdoba Gómez, L. A. Ciro López, y J. C. Molina García (Eds.), *Congreso Latinoamericano de GeoGebra “Las TIC al servicio de la innovación educativa”* (161–164). Medellín, Colombia.
- Rizzo, K. (2019). FotoGebra y competencias digitales: análisis de un caso. *Revista Épsilon*, nº103. 35-44. [https://thales.cica.es/epsilon/sites/thales.cica.es/epsilon/files/epsilon103\\_3.pdf](https://thales.cica.es/epsilon/sites/thales.cica.es/epsilon/files/epsilon103_3.pdf)
- Rizzo, K.A., del Río, L S., Manceñido, M E., Lavicza, Z & Houghton, T. (2019) Linking Photography and Mathematics with the Use of Technology. *Open Education Studies* (1),1. 262-266. <https://doi.org/10.1515/edu-2019-0020>
- Rizzo, K. & Costa, V. (2020). ¿Cuáles competencias digitales favorece desarrollar el concurso FotoGebra?, *X Congreso Internacional sobre Enseñanza de las Matemáticas 20, 21 y 22 de febrero de 2020*. PUCP Lima Perú. <http://repositorio.pucp.edu.pe/index/handle/123456789/171568>
- Rizzo, K. (2021). FotoGebra: un recurso educativo y creativo en tiempo de pandemia. *Cuadernos*, 20, 180-191. <https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/48502>



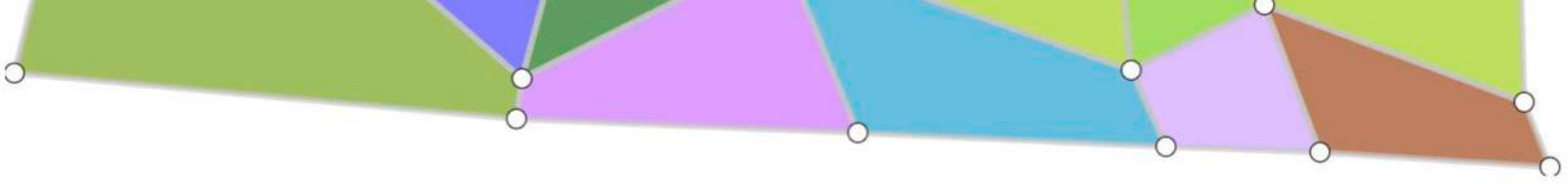
## Nota Biográfica



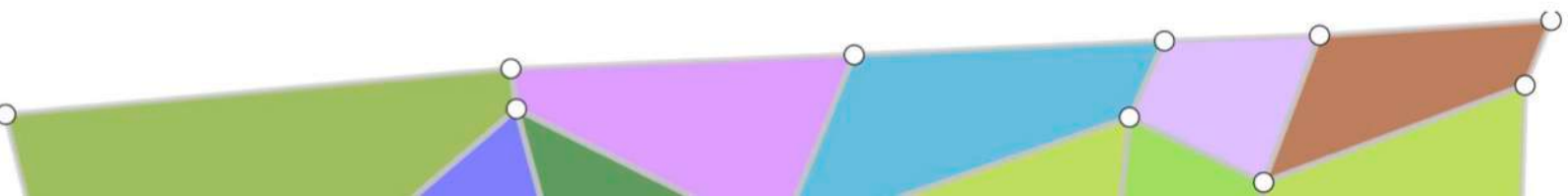
### **Karina Amalia Rizzo**

Doctoranda en Enseñanza de las Ciencias, mención Matemática (Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires). Licenciada en Educación (Universidad Nacional de San Martín). Profesora en Matemática (Instituto Superior de Formación Docente y Técnica N°24). Especialista Docente de Nivel Superior en Educación y TIC (Instituto Nacional de Formación Docente), Argentina. Me desempeño como Profesora en institutos de Nivel Secundario, Formación Docente y Universitario. Colaboro con IMApEC -Investigación en metodologías alternativas para la enseñanza de las Ciencias (UNLP). Integrante del Grupo I+D+i de Innovación y Tecnología para la Enseñanza (UTN FR), Instituto GeoGebra La Plata y de la Comunidad GeoGebra Latinoamericana. Directora y editora de la revista Unión (FISEM). Representante nacional del CIAEM en Argentina. Creadora y Organizadora del Concurso FotoGebra, desde 2016. El mismo ha recibido el premio Interfaces 2019, en la ciudad de Bs. As., Argentina, el premio Eduteka 2019, en la ciudad de Cali, Colombia, el premio UBA de contenidos educativos (1º premio blog individual universidad) 2022, Bs. As. Argentina y premio ACCÉSIT INNOVACTORA WINN ARGENTINA 2023, otorgado por la Universidad Siglo 21 en la edición 2023 de los Premios Innovactoras, España.

---



# Participação Virtual



## Inovação da prática pedagógica suportada pelo *GeoGebra* em contexto da Educação *STEAM* e melhoria do ensino e aprendizagem de Química

Aldovanda Vidade & Alcinda Mafuiana

Departamento de Estudos em Educação Matemática, Ciências e Tecnologias, Faculdade de Ciências Naturais e Matemática da Universidade Pedagógica de Maputo, Moçambique



As tecnologias informáticas estão cada vez mais presentes nas sociedades atuais e desempenham um papel cada vez mais expressivo na vida dos alunos. A integração de tecnologias informáticas no processo de ensino e aprendizagem proporciona mudanças significativas na aprendizagem dos alunos (Silveira, 2015; Ferreira *et al.*, 2019; Brito & Silva, 2022); daí que é imprescindível que professores possuam competências para a sua integração efetiva no desenvolvimento das suas práticas pedagógicas. Assim, no intuito de estudar estratégias de melhoramento da prática pedagógica dos docentes em relação a introdução de tecnologias educativas no ensino e aprendizagem da Química realizou-se o presente estudo inserido numa investigação mais ampla no âmbito do projeto “GeoGebra & STEAM: Implicações para a melhoria da Educação Matemática em Países de Língua Oficial Portuguesa”. A investigação decorreu no contexto da instalação do Instituto *GeoGebra* na Universidade Pedagógica de Maputo, uma Instituição de Ensino Superior pública moçambicana.

Participaram na formação duas professoras de Química em exercício de forma a dotá-las de conhecimentos, capacidades e habilidades na utilização do software *GeoGebra* e suas plataformas no contexto do ensino e aprendizagem da Química. Estas por sua vez, tiveram a oportunidade de implementar experiências em sala de aula numa turma de uma das professoras participantes desta investigação, composta por 26 estudantes do 2º ano do Curso de Licenciatura em Ensino de Química. Assim, esta comunicação apresenta, analisa e discute resultados do trabalho desenvolvido durante a implementação das experiências em sala de aula realizada entre os meses de Abril e Agosto de 2023. A investigação de natureza qualitativa e quantitativa tem como objetivo verificar se a utilização do *GeoGebra* e suas plataformas contribui para a melhoria da aprendizagem dos conteúdos de Química e o desenvolvimento de uma conceção mais segura e plena dos estudantes perante o uso de tecnologias educativas.

Para a recolha de dados foi aplicada a técnica de inquirição por questionário, com aplicação de dois questionários: inicial e final aos estudantes da turma em estudo. Para análise dos dados dos questionários foi usada a técnica de análise de conteúdo para as perguntas abertas e aplicou-se a estatística descritiva para as perguntas fechadas.

Para a implementação de experiências em sala de aula foram realizadas cinco sessões com estudantes da turma em estudo. Em todas as sessões foram recolhidos dados referentes às produções de estudantes no software GeoGebra e suas plataformas, registros fotográficos, gravações de áudio e vídeo e a observação. Para análise destes dados foi aplicada técnica de análise documental.

Na Figura 1 exemplifica-se através da ilustração de dois gráficos com a tarefa feita na sessão IV e na primeira parte da sessão V. O trabalho consistiu na exploração do comportamento das funções cúbicas, quadráticas, exponenciais e logarítmicas, usando a folha gráfica e a folha de cálculo, do *GeoGebra* para posterior aplicação destes conhecimentos na resolução de problemas envolvendo a Química e outras áreas.

Os estudantes tinham a tarefa de construir gráficos correspondentes às seguintes expressões:  $f(x) = ax^k$ ;  $f(x) = ax^3$ ;  $i(x) = a^x$ ;  $j(x) = \log_a(x)$ ;  $f(x) = a^x, -5 \leq a \leq 5$ ;  $g(x) = a^{(x+b)}, -5 \leq b \leq 5$ ;  $h(x) = a^x + c$ ;  $i(x) = e^x$ ;  $f_1(x) = \log_a(x)$ ;  $g_1(x) = \log_a(x+b)$ ;  $h_1(x) = \log_a(x) + c$ ;  $i_1(x) = \ln(x)$ .

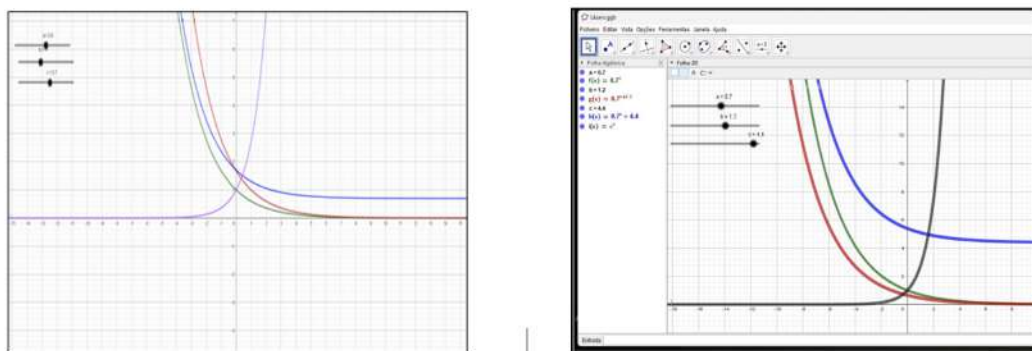


Figura 1: Construção dos gráficos da função exponencial. Grupo I (E14, E21, E26), a partir do *GeoGebra*

Após a construção dos gráficos foram apresentados aos estudantes dois problemas com aplicação da função exponencial. Os estudantes tinham a tarefa de resolver ambos problemas primeiro aplicando o método tradicional e de seguida com recurso ao software *GeoGebra* explorando a folha 2D, a folha de cálculo e construção do gráfico correspondente, e por fim comparar as duas estratégias. Para grande parte dos estudantes utilização do software *GeoGebra* facilitou a aprendizagem dos conteúdos de Química abordados, sendo que para 12 estudantes (46.2%) a utilização do software *GeoGebra* facilitou bastante a aprendizagem de Química, para sete estudantes (26.9%) facilitou muito a aprendizagem e para outros 7 estudantes (26.9%) facilitou pouco, como se pode observar na Figura 2.

8.A utilização do software GeoGebra facilitou-te a aprendizagem de Química abordados?

26 responses

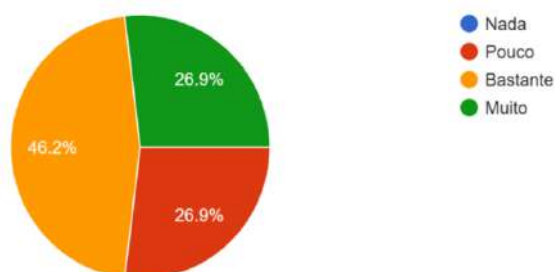


Figura 2 - Gráfico1 sobre os resultados da opinião dos alunos acerca da abordagem de conteúdos usando o *GeoGebra* obtido a partir do *Google forms*.

Os resultados mostram que o uso do software *GeoGebra* permite o desenvolvimento nos estudantes de uma conceção mais global em relação ao uso de tecnologias educativas para o ensino e aprendizagem da Química e uma aprendizagem mais significativa dos conteúdos de Química.

## Referências

- Brito G. A. & Silva M. G. (2022). Tecnologias de Informação e Comunicação no ensino da Química: uma análise. *Research, Society and Development*, 11 (12). <http://dx.doi.org/10.33448/rsd-v11i12.34690>.
- Ferreira, M. P.; Suzuki, R. M.; Bonafe, E, G.; Matsushita, M. & Roberto, S. B. (2019). Ferramentas Tecnológicas Disponíveis Gratuitamente para Uso no Ensino de Química: Uma Revisão Bibliográfica. *Revista Virtual Química*. 1 (13).
- Silveira A. P. R. (2015). *O GeoGebra na formação e aprendizagem de Transformações Geométricas Isométricas no plano euclidiano*. Tese (Doutorado em Multimédia em Educação) - Universidade de Aveiro. Aveiro.

## Nota Biográfica



### **Aldovanda Estrela Bata Vidade**

É Doutoranda em Educação em Ciências e Matemática na Universidade Pedagógica de Maputo (UPM). Mestre em Educação/Ensino de Química e Licenciada em Ensino de Química Biologia pela UPM. É docente na UPM. Áreas de Interesse na Investigação: Didáticas práticas de ensino de Química e Inovação Pedagógica e Tecnológica.



### **Alcinda António Marcelino Mafuiana**

É Doutoranda em Energia e Meio Ambiente pela Universidade Pedagógica de Maputo (UPM), Moçambique. Fez um estágio na Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Portugal, e na Universidade Federal Rio Grande do Sul, Brasil. Mestre em Educação/Ensino de Química pela UPM. Licenciada em Ensino de Química e Biologia. É docente na /. Secretaria geral da ACUP (Associação Cultural da Universidade Pedagógica–Maputo). Formadora principal do grupo TOFi (together for inclusion). Áreas de Interesse na Investigação: Inovação Pedagógica, Ensino de Química baseado às novas tecnologias.

---

## GeoGebra aplicado ao ensino de Física. Caso de estudo da cinemática.

Ézar Esau Nharreluga

Faculdade de Ciências Naturais e Matemática da Universidade Pedagógica de Maputo,  
Moçambique



O presente estudo discute o uso do software *GeoGebra* como uma ferramenta eficaz no ensino de Física oferecendo uma série de benefícios, como a visualização gráfica de conceitos abstratos, a interatividade com modelos físicos e a resolução de problemas de forma prática. A partir de casos de estudo, foram aplicadas tarefas de física, disponíveis na web-site oficial do *GeoGebra Materials*, aos estudantes de 4<sup>o</sup> ano do ensino de física na Universidade Pedagógica de Maputo, que visam explorar a sua compreensão dos fenómenos e conceitos da física. Por outro lado, foram desenvolvidos simuladores que permitem aos alunos explorar virtualmente conteúdos da ótica geométrica e cinemática. Os resultados do estudo em curso espelham que a abordagem integrada do *GeoGebra* no ensino de física ajuda os alunos a desenvolver uma compreensão mais profunda, motivadora e holística dos princípios físicos, relacionando-os diretamente com as representações matemáticas e fenomenológicas correspondentes. O *GeoGebra* promove uma aprendizagem mais envolvente e significativa. Através dessa abordagem, os alunos têm a oportunidade de explorar conceitos físicos de forma mais intuitiva e adquirir habilidades matemáticas fundamentais para a compreensão e aplicação dos princípios da Física.

O uso de tecnologias de informação e comunicação aplicadas ao ensino tem se tornado cada vez mais relevante, especialmente em países como Moçambique, que estão experimentando um aumento significativo na disponibilidade de telefones e computadores. Com o crescente acesso à Internet e dispositivos eletrónicos, surge também uma maior demanda por recursos educacionais virtuais e simuladores.

Diante deste cenário, vários softwares são desenvolvidos e o *GeoGebra*, um software de matemática dinâmica, destaca-se como uma ferramenta promissora para o ensino, tendo nos últimos anos se destacado como aplicável para as ciências naturais (Castro *et al.*, 2012; Yabiku & Bernardo, 2020).

Sendo a sua aplicação nas ciências naturais uma abordagem emergente (Torres, 2021), impera que sejam cada vez mais desenvolvidos simuladores, sejam feitas análises didáticas dos simuladores desenvolvidos e sejam discutidas metodologias da sua integração nas aulas com vista a elevar a sua influência na aprendizagem significativa.

O presente estudo constitui parte inicial do projeto “GeoGebra aplicado ao ensino

de Física: práticas e perspectivas” onde se irá analisar o nível de abrangência dos simuladores desenvolvidos para os conteúdos da Física da 8ª classe à 10ª classe do Sistema Nacional de Educação (SNE) em moçambique, construção e aplicação de simuladores para o ensino de Física.

Para analisar o nível de abrangência dos simuladores desenvolvidos para os conteúdos da Física dessas classes, foi feito um levantamento no *GeoGebra Materials* e posterior preenchimento dos dados numa tabela contendo indicação da unidade temática, tema, nome do autor, país, ano e o link para cada simulador (Figura 1).

| Tema                                           | Nome do autor       | País   | Ano  | Link                                                                                                                      |
|------------------------------------------------|---------------------|--------|------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Movimento e repouso                            | Manuela Casasoli    | Itália | 2020 | <a href="https://www.geogebra.org/m/e7eez4pn">https://www.geogebra.org/m/e7eez4pn</a>                                     |
| Velocidade do movimento retilíneo uniforme     | António Cazoto      | Brasil | 2013 | <a href="https://www.geogebra.org/m/EX6VZZM3#material/EuxbpYrc">https://www.geogebra.org/m/EX6VZZM3#material/EuxbpYrc</a> |
| Gráfico de espaço em função do tempo(Sxt)      | António Mercogliano | Itália | 2016 | <a href="https://www.geogebra.org/m/gTE8yrEc#material/bDcWt3EB">https://www.geogebra.org/m/gTE8yrEc#material/bDcWt3EB</a> |
| Gráfico da velocidade em função do tempo (Vxt) |                     |        |      |                                                                                                                           |

Figura1: Amostra da base de dados de simuladores da 8ª classe.

A base de dados criada pode ser usada como um recurso para busca rápida de simuladores pelos professores. Com base nos resultados, fez-se uma análise da distribuição em diferentes classes (Figura 2) e por unidades temáticas (Figura 3).

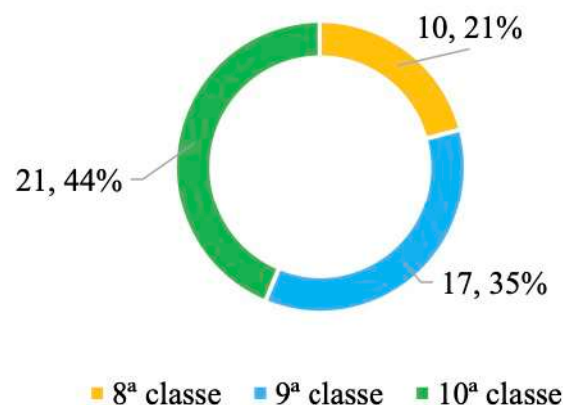


Figura 2: Distribuição dos simuladores por classe no SNEG.

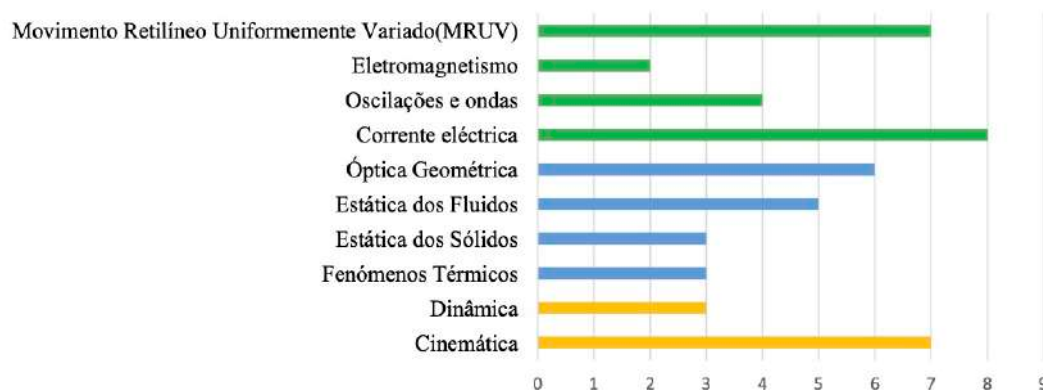


Figura 3: Distribuição dos simuladores por unidade temática e por classe no SNE.

Os resultados evidenciam surpreendentemente a contribuição do *GeoGebra* na unidade temática sobre corrente elétrica, sem deixar de lado as unidades temáticas da mecânica (MRUV e cinemática) pela sua natureza de estudo que envolve a construção de gráficos.

A disponibilidade de simuladores para cada uma das unidades temáticas dos programas de ensino é um fator crucial para a implementação efetiva do *GeoGebra* no ensino de física. A pesquisa realizada permitiu identificar quais são esses simuladores existentes, fornecendo um panorama das ferramentas disponíveis para os educadores utilizarem em sala de aula.

Para o alcance do segundo objetivo da pesquisa, construção e aplicação de simuladores para o ensino de Física, foram capacitados os estudantes do 4º ano do curso de licenciatura em ensino de Física, no âmbito da disciplina de didática de Física. Com os estudantes treinados, foram concebidos simuladores sobre movimento retilíneo uniforme, movimento retilíneo uniformemente acelerado, queda livre dos corpos, lançamento horizontal, oblíquo e vertical de projéteis.

Nestes simuladores, é possível que o aluno manipule as grandezas, visualize o fenômeno assim como a construção gráfica. Destes seis simuladores virtuais concebidos, foi feito um teste exploratório do simulador de movimento retilíneo uniforme com alunos de uma turma da 8ª classe.

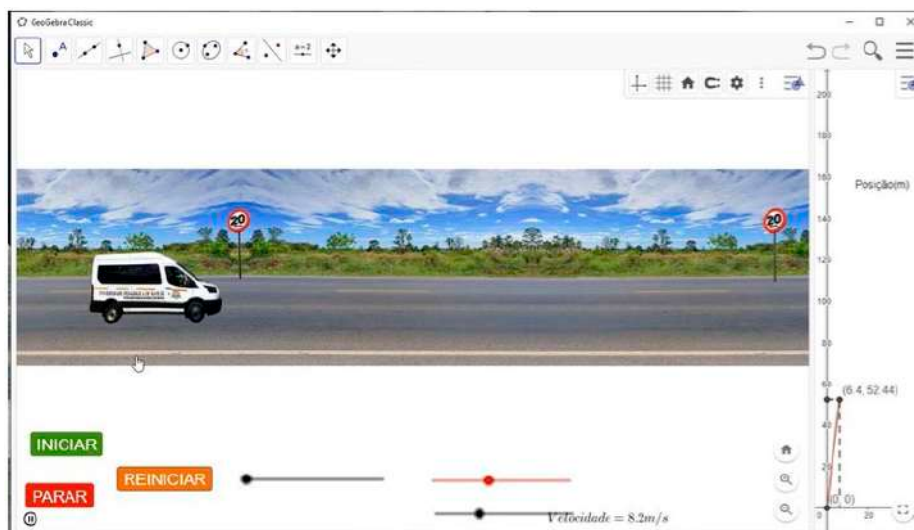
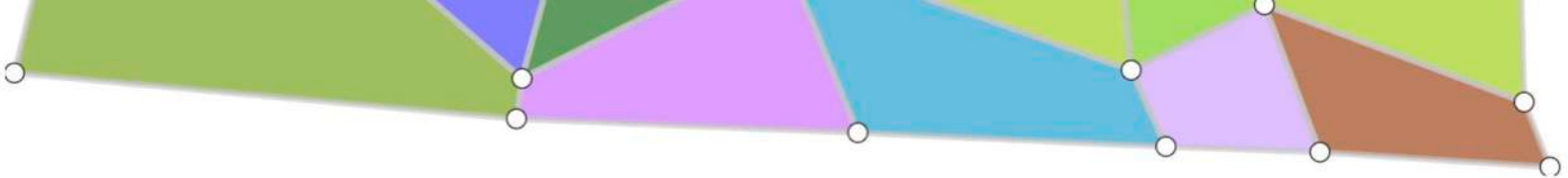


Figura 4: Simulador concebido para o estudo do movimento retilíneo uniforme na 8ª classe.

O teste exploratório revelou que o simulador tem as seguintes potencialidades: No âmbito didático-metodológico -meio de motivação, meio de ativação, meio de visualização, meio para a simplificação didática de fenômenos naturais; no âmbito do



desenvolvimento da personalidade - meio para aquisição do saber, desenvolvimento de competências, capacidades e habilidades, desenvolvimento de formas de trabalho coletivo, desenvolvimento de interesses e amor pela ciência, despertar curiosidades pelo saber e confiança nos conhecimentos adquiridos e; no âmbito das teorias de conhecimento - fonte direta do conhecimento (parte integrante da via empírica de aquisição do conhecimento), critério da verdade (segurança do conhecimento através da verificação de hipóteses) e ligação teoria e prática (Santos *et al.*, 2022).

Os pesquisadores destacam que para além de desenvolver simuladores para o ensino da Física com recurso ao *GeoGebra* é necessário obedecer critérios didáticos que possam garantir que os simuladores propiciem uma aprendizagem significativa.

## Referencias

- Castro, R. De, Maximiano, P., Silveira, M., & Corrêa, E. (2012). O GeoGebra e o ensino da Física: aprender a aprender. *Actas de La Conferencia Latinoamericana de GeoGebra*, 357–364.
- Santos, L. de O., Silva, I. P. da, Silva, J. W. B. da, & Lima, C. H. M. (2022). USO DO GEOGEBRA NA MODELAGEM DE GRÁFICOS DE RESISTORES ÔHMICOS PARA ALUNOS DE ENSINO MÉDIO USE OF GEOGEBRA IN MODELING GRAPHICS OF OHMIC RESISTORS FOR HIGH SCHOOL STUDENTS. *Revista Gestão e Conhecimento*, 1183–1197. <https://doi.org/10.55908/RGCV16N3-010>
- Torres, J. R. (2021). *Uma proposta didática para o ensino de física através do uso de simulações desenvolvidas na linguagem de programação Python e no aplicativo GeoGebra*. Universidade Federal de Santa Catarina.
- Yabiku, K. R., & Bernardo, E. P. (2020). Uma abordagem interdisciplinar no ensino da física por meio da matemática e dos recursos tecnológicos. *Brazilian Journal of Development*, 6(15), 85098–85108. <https://doi.org/10.34117/bjdv6n11-068>

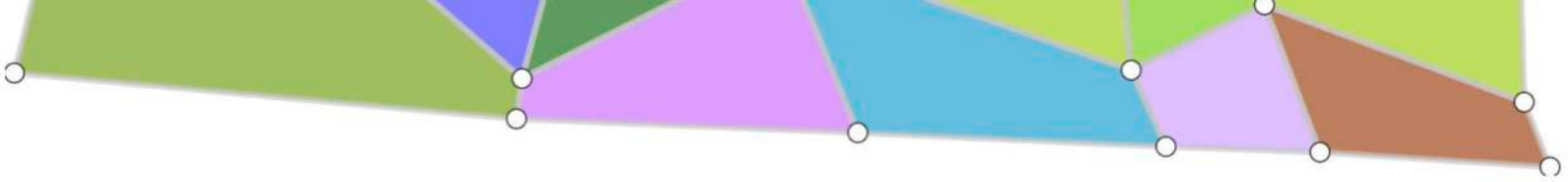
## Nota Biográfica



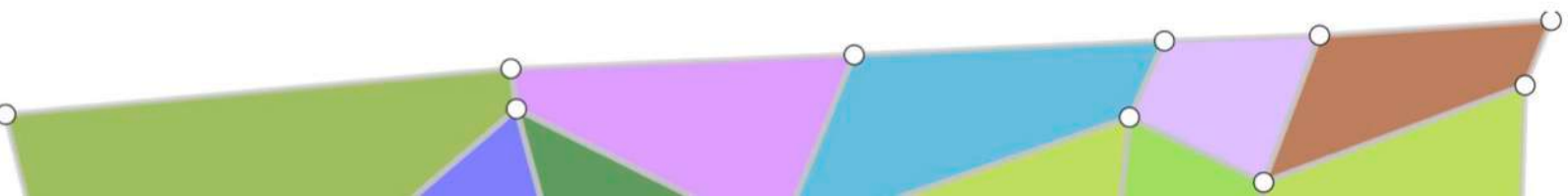
### **Ézar Esau Nharreluga**

Doutorando em Energia e Meio Ambiente, Mestre em Sistemas de Informação para Gestão Ambiental, gestão pública e empresarial, licenciado em Ensino de Física. Pesquisador em TICs no ensino de física. Possui trabalhos de pesquisa sobre o uso de simuladores virtuais para o ensino de física e matemática, laboratórios virtuais, vídeos didáticos e desenvolvimento de materiais didáticos para o ensino de física e matemática. Docente de Didática de Física, laboratório de mecânica e eletricidade, história da Física e tecnologia, matemática básica, estatística e energias renováveis.

---



# Minicursos



27 de outubro  
18:30 GMT  
28 de outubro  
11:30 GMT  
Sala S04  
DMUC

## Geometria 2D com o *GeoGebra*

José Manuel Dos Santos Dos Santos

Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de  
Coimbra, Portugal



As Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Básico (AEMEB), já em vigor em Portugal a partir de 2022-2023, e do Ensino Secundário (AEMES), a ser implementadas a partir do ano letivo 2024-2025, consagram um papel importante ao uso da tecnologia, nomeadamente recorrendo aos Ambientes de Geometria Dinâmica, nomeadamente ao software GeoGebra (Canavarro *et al.*, 2021; Carvalho e Silva *et al.*, 2023). Nas AEMEB em relação ao tema Capacidades Transversais, em todo o Ensino Básico, referem a necessidade de: “Aplicar e adaptar estratégias diversas de resolução de problemas, em diversos contextos, nomeadamente com recurso à tecnologia”, no tópico estratégia; “Formular e testar conjecturas/generalizações, a partir da identificação de regularidades comuns a objetos em estudo, nomeadamente recorrendo à tecnologia”, no tópico conjecturar e generalizar; “Estabelecer conexões e conversões entre diferentes representações relativas às mesmas ideias/processos matemáticos, nomeadamente recorrendo à tecnologia”, no tópico conexões entre representações (Canavarro *et al.*, 2021). O desenvolvimento destas capacidades estão relacionados com todos os temas do currículo e articuladas com o perfil do alunos no fim da escolaridade obrigatória (Figura 1).

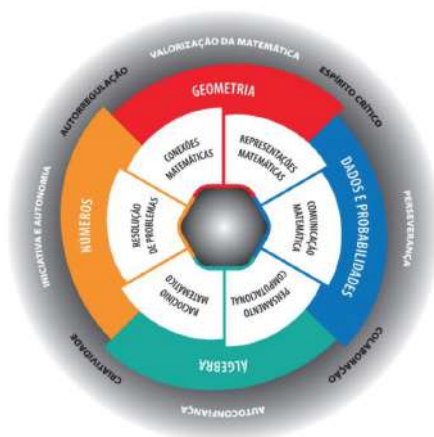


Figura 1- Conteúdos de aprendizagem em Matemática no Ensino Básico, na página 4 dos diversos programas associados (Canavarro *et al.*, 2021).

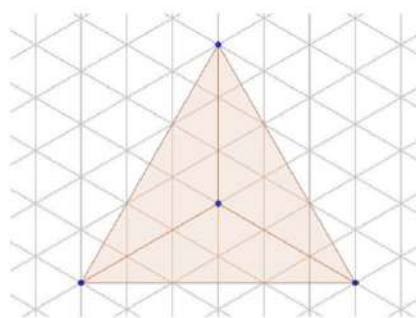
No caso das AEMES o uso sistemático à tecnologia é referido nas Ideias Chave, ver Figura 2, das Aprendizagens Essenciais, os AGD, em particular o *GeoGebra* mostram-se uteis nos temas relacionados com a geometria no plano e no espaço,

mas também como apoio a modelação matemática em outros temas do programa. As AEMES recomendam partir de uma abordagem exploratória “levar o aluno a participar ativamente num processo de construção e aprofundamento, motivado por questões desafiadoras, problemas e procura de justificações” (Carvalho e Silva *et al.*, 2023, p. 6).



Figura 2 - Ideias chave das Aprendizagens Essenciais do Ensino Secundário, na página 4 dos diversos programas associados (Carvalho e Silva *et al.*, 2023).

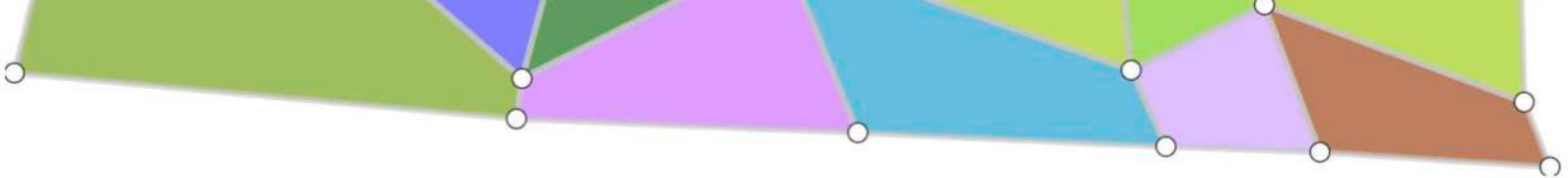
Neste contexto este minicurso focar-se-á em tarefas propostas aos participantes que os familiarizem com o software a partir das propostas que constam nos atrás referidos documentos curriculares, nomeadamente explorando tópicos relacionados com a Geometria Plana, como por exemplo, a construção de triângulos e exploração das suas propriedades; a construção de quadriláteros e exploração das suas propriedades, estudo das isometrias planas; modelação de problemas métricos relacionados com figuras planas (Figura 3).



<https://www.geogebra.org/m/vhkywqp4>

Figura 3 - Quais as isometrias que levam um triângulo isósceles gerar um triângulo equilátero? (Dos Santos *et al.*, 2020, p.24).

As tarefas a realizar no curso terão o apoio de roteiros adaptados de propostas (Dos



Santos *et al.*, 2020, 2019) existentes e disponíveis na web (Figura 3). Também, será utilizada a plataforma *GeoGebra Classroom* para a realização das tarefas. Ainda, no minicurso refletir-se-á em conjunto sobre os aspetos didáticos relacionados com as ações estratégicas de ensino do professor como constam dos atrás referidos documentos curriculares.

## Referências

Canavarro, A.P. (Coord.), Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M.J., Correia, P., Marques, P., & Espadeiro, R.G. (2021). *Aprendizagens Essenciais de Matemática no Ensino Básico*. República Portuguesa: Educação. Lisboa.

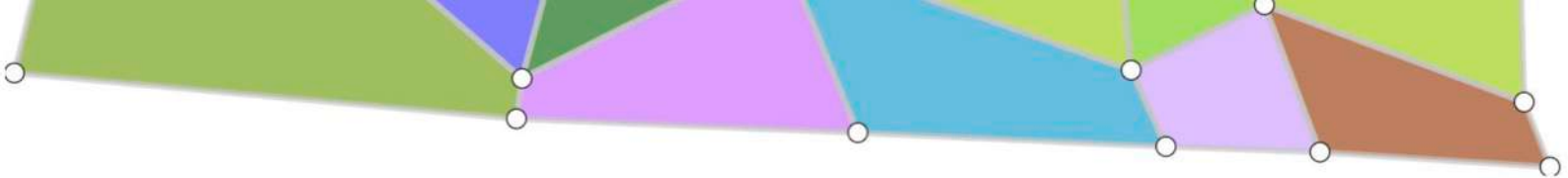
Observação: Em todos os anos dos três ciclos do Ensino Básico há referências ao uso do *GeoGebra*, no site <http://aem.dge.mec.pt/pt> para além dos programas encontram-se diversos materiais e recursos de apoio ao trabalho em aula.

Carvalho e Silva, J.(Coord.), Albuquerque, C., Almiro, J., Cruchinho, C., Carreira, S., Correia, P., Domingos, A., Espadeiro, G. E., Filipe, N., Gabriel, L., Martins, H., Martins, M.E.G., Rodrigues, A., & Santos, M. T. (2023) *Aprendizagens essenciais - articulação com o perfil dos alunos*. 10.º ano - Ensino Secundário. República Portuguesa: Educação. Lisboa. [http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens\\_Essenciais/mat\\_a\\_10\\_-\\_vf.pdf](http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/mat_a_10_-_vf.pdf)

Observação: Em todos os anos do Ensino Secundário há referências ao uso da tecnologia, nomeadamente, ao *GeoGebra*.

Dos Santos, J. M. D. S., Silveira, A. P. R., & da Silva Trocado, A. E. B. (2020). *Formação de formadores em GeoGebra para Cabo Verde, 2016-2017—Tarefas e resultados*. Organização de Estados Ibero-Americanos para a Educação a Ciência e a Cultura (OEI)—Escritório de Lisboa. [https://books.google.pt/books?id=-kDoDwAAQBAJ&dq=tarefas+cabo+verde&hl=pt-PT&source=gbv\\_navlinks\\_s](https://books.google.pt/books?id=-kDoDwAAQBAJ&dq=tarefas+cabo+verde&hl=pt-PT&source=gbv_navlinks_s) ou <https://books.apple.com/pt/book/forma%C3%A7%C3%A3o-formadores-em-geogebra-para-cabo-verde-2016/id1517109238>.

Dos Santos, J. M. D. S., Silveira, A. P., & Trocado, A. E. S. (2019). *GeoGebra e situações que envolvem modelação numa abordagem STEAM*. arXiv preprint arXiv:1907.02099. <https://arxiv.org/abs/1907.02099>



## Nota Biográfica



**José Manuel Dos Santos Dos Santos**

Atualmente, Professor Auxiliar Convidado do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra, por requisição, sendo professor do Agrupamento de Escolas Castelo da Maia. Concluiu o Doutoramento em Álgebra Computacional em 10/05/2019 pela Universidade Aberta (UAb), Mestrado em Ensino da Matemática em 2000 pela Faculdade de Ciências da Universidade do Porto (FCUP) e Licenciatura em Matemática (Ramo Educacional) em 1993 pela FCUP. Em 2017 concluiu o curso de Estudos Avançados em Álgebra Computacional na UAb. Conclui o Curso Europeu de Doutoramento em Ensino e Difusão de Ciências pela FCUP em 2012. É detentor de pós-graduações na área de Supervisão Pedagógica e Formação de Formadores, pela Faculdade de Psicologia e Ciências da Educação da Universidade do Porto, e em Administração Escolar, pela Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico do Porto (ESEIPP). É Investigador integrado do Centro de Investigação e Inovação em Educação (inED) da ESEIPP e colaborador no Centro de Investigação & Desenvolvimento em Matemática e Aplicações (CIDMA) da Universidade de Aveiro. É também o Investigador Principal do Instituto *GeoGebra* em Portugal. Gere vários projetos com a Organização dos Estados Ibero-Americanos para a Educação Ciência e Cultura (OEI) e com a Faculdade de Ciências da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, tendo também desenvolvido projetos com a Fundação Calouste Gulbenkian, estes projetos têm como objetivo principal o de colaborar com a Formação de Professores em Países de Língua Portuguesa. Foi investigador no Centro de Matemática Computacional e Estocástica da Universidade de Lisboa. Orientou trabalhos de mestrado e pós-doutoramento na área da Educação Matemática com ênfase no uso das tecnologias.

---

27 de outubro  
18:30 GMT  
28 de outubro  
11:30 GMT  
Sala S02  
DMUC

## Geometria 3D com o *GeoGebra*

Alexandre Emanuel Batista Trocado

Colégio Camões, Gondomar, Portugal



A Geometria Espacial desempenha um papel importante no ensino da Matemática em Portugal, abrangendo desde a visualização de poliedros, suas planificações e propriedades, até a resolução de problemas de volumes por composição e decomposição de sólidos no Ensino Básico (Canavarro *et al.*, 2021). Por outro lado, no Ensino Secundário (Carvalho e Silva *et al.*, 2023), a Geometria Analítica e o cálculo vetorial espacial assumem um papel central. De acordo com as novas Aprendizagens Essenciais (AE) e os Ambientes de Geometria Dinâmica (AGD), em particular o *GeoGebra* 3D, estão entre as ações estratégicas recomendadas para os professores. As AE mencionam: “O estabelecimento de relações algébricas a partir do estudo de objetos geométricos deve ser acompanhado pela experiência (na qual a tecnologia desempenha um papel fundamental), reforçando a relação entre a Geometria e a Álgebra” (Canavarro *et al.*, 2021, p.10 - 3<sup>a</sup> ciclo). Neste contexto, neste minicurso serão propostas tarefas que, dentro do possível, abordem os principais objetivos de aprendizagem sugeridos pelas AE, tanto para o ensino básico quanto para o secundário. Isso será feito através da recriação de algumas das aplicações mencionadas nas AE, utilizando a plataforma *GeoGebra Classroom* (Figura 2).

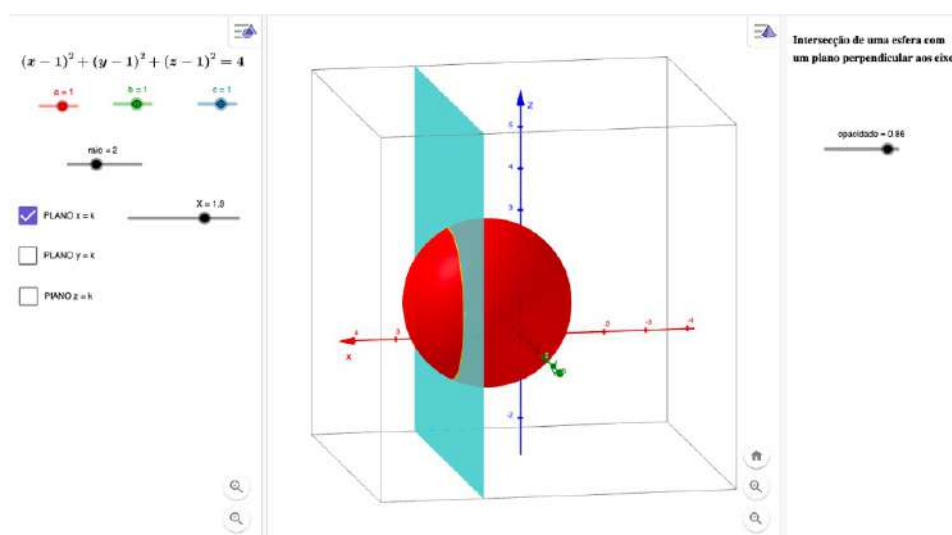
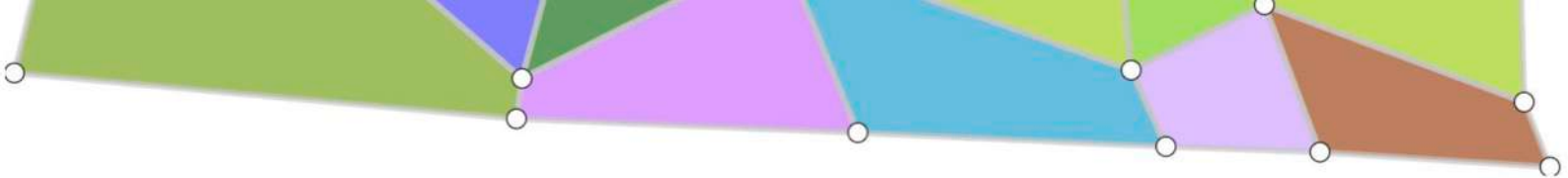


Figura 1 - Aplicação de *GeoGebra Classroom* par interseção de esferas com planos perpendiculares aos eixos coordenados.



## Referências

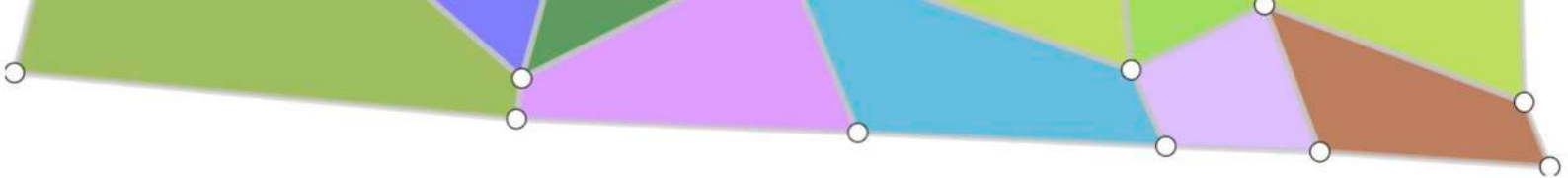
Canavarro, A.P. (Coord.), Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M.J., Correia, P., Marques, P., & Espadeiro, R.G. (2021). *Aprendizagens Essenciais de Matemática no Ensino Básico*. República Portuguesa: Educação. Lisboa.

Observação: Em todos os anos dos três ciclos do Ensino Básico há referências ao uso do *GeoGebra*, no site <http://aem.dge.mec.pt/pt> para além dos programas encontram-se diversos materiais e recursos de apoio ao trabalho em aula.

Carvalho e Silva, J. (Coord.), Albuquerque, C., Almiro, J., Cruchinho, C., Carreira, S., Correia, P., Domingos, A., Espadeiro, G. E., Filipe, N., Gabriel, L., Martins, H., Martins, M.E.G., Rodrigues, A., & Santos, M. T. (2022) *Aprendizagens essenciais - articulação com o perfil dos alunos*. 10.º ano - Ensino Secundário. República Portuguesa: Educação. Lisboa. [http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens\\_Essenciais/mat\\_a\\_10\\_-\\_vf.pdf](http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/mat_a_10_-_vf.pdf)  
Observação: Em todos os anos do Ensino Secundário há referências ao uso da tecnologia, nomeadamente, ao *GeoGebra*.

Dos Santos, J. M. D. S., Silveira, A. P. R., & da Silva Trocado, A. E. B. (2020). *Formação de formadores em GeoGebra para Cabo Verde, 2016-2017—Tarefas e resultados*. Organização de Estados Ibero-Americanos para a Educação a Ciência e a Cultura (OEI)—Escritório de Lisboa. [https://books.google.pt/books?id=-kDoDwAAQBAJ&dq=tarefas+cabo+verde&hl=pt-PT&source=gbv\\_avlinks\\_s](https://books.google.pt/books?id=-kDoDwAAQBAJ&dq=tarefas+cabo+verde&hl=pt-PT&source=gbv_avlinks_s) ou <https://books.apple.com/pt/book/forma%C3%A7%C3%A3o-formadores-em-geogebra-para-cabo-verde-2016/id1517109238>.

Dos Santos, J. M. D. S., Silveira, A. P., & Trocado, A. E. S. (2019). *GeoGebra e situações que envolvem modelação numa abordagem STEAM*. arXiv preprint arXiv:1907.02099. <https://arxiv.org/abs/1907.02099>



## Nota Biográfica



### Alexandre Emanuel Batista Trocado

Licenciado em Matemática, Ramo Educacional, e Mestre em Ensino da Matemática pela Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Doutorado em Álgebra Computacional pela Universidade Aberta. Leciona há 23 anos no ensino privado, sendo atualmente professor no Colégio Camões. É membro fundador do Instituto *GeoGebra* de Portugal, colaborando na formação de professores há duas décadas. Participou como orador em conferências nacionais e internacionais, dispondo de várias publicações em revistas internacionais tanto na área da Matemática quanto na Educação Matemática, sendo atualmente investigador do CIDMA - Centro de Matemática e Aplicações da Universidade de Aveiro.

---

# Cálculo Simbólico con GeoGebra *GeoGebra*

José María Chacón Íñigo

Instituto de *GeoGebra* de Andalucía – España

27 de outubro  
18:30 GMT  
28 de outubro  
15:00 GMT  
Sala S01  
DMUC



## Introducción

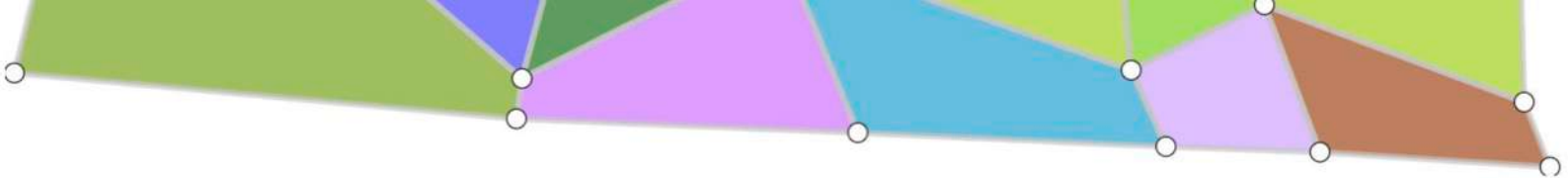
En el ámbito de la educación matemática, las herramientas tecnológicas juegan un papel fundamental en la mejora del aprendizaje y la comprensión de conceptos avanzados. *GeoGebra*, una plataforma educativa de matemáticas dinámicas, ha revolucionado la forma en que se enseña y aprende cálculo, especialmente a través de su funcionalidad de cálculo simbólico. Esta característica permite manipular expresiones algebraicas y realizar operaciones complejas en un entorno digital, lo que brinda al alumnado una comprensión más profunda y aplicada de los conceptos matemáticos. En este taller o mini curso, exploraremos el uso del cálculo simbólico con *GeoGebra* en el aula de matemáticas y sus diversas aplicaciones pedagógicas.

El cálculo simbólico implica la manipulación algebraica de expresiones matemáticas en su forma simbólica, en contraste con el cálculo numérico que se enfoca en los valores numéricos. *GeoGebra*, una herramienta versátil que combina geometría y álgebra, incorpora una calculadora de cálculo simbólico que permite a los usuarios realizar operaciones algebraicas, derivadas, integrales y simplificaciones de expresiones. Esta característica amplía las capacidades de *GeoGebra* más allá de la visualización gráfica, brindando al alumnado una experiencia completa de cálculo.

El uso de *GeoGebra* en el aula presenta diversas ventajas. Permite al alumnado explorar conceptos matemáticos de manera visual y dinámica, lo que facilita la comprensión de temas complejos en cálculo. Además, la calculadora simbólica de *GeoGebra* agiliza cálculos tediosos y permite centrarse en la interpretación de resultados. Se puede experimentar con manipulaciones algebraicas y ver cómo cambian las gráficas correspondientes en tiempo real, lo que refuerza la conexión entre álgebra y geometría.

*Contendidos y aplicaciones pedagógicas del Cálculo Simbólico con GeoGebra.*

- Polinomios
  - Factorización
  - Fracciones algebraicas
- Ecuaciones
  - Resolución de ecuaciones polinómicas, racionales, con radicales, exponenciales, logarítmicas, ...
  - Resolución de sistemas de ecuaciones

- 
- Discusión de sistemas.
  - Álgebra
    - Cálculo matricial.
  - Trigonometría
    - Simplificación de expresiones trigonométricas.
  - Análisis de funciones. Integrales.
    - El alumnado puede investigar límites y continuidad al observar el comportamiento de una función a medida que se acerca a ciertos valores. Además, pueden visualizar gráficamente cómo las funciones, sus derivadas e integrales están relacionadas. Esto ayuda a comprender los conceptos presentes en el cálculo de: Límites; Derivadas; Integrales; Primitivas; Integral definida.
  - Estadística
    - Secuencias de números aleatorios.
    - Simulaciones (tiradas de dados, monedas, etc.).
    - Ajustes.
    - Distribuciones.
  - Resolución de Ecuaciones Diferenciales.
    - *GeoGebra* facilita la resolución de ecuaciones diferenciales, permitiendo a los estudiantes explorar soluciones analíticas y comprender cómo diferentes factores influyen en las soluciones.
  - Series y Sucesiones.
    - Mediante la manipulación de expresiones algebraicas, los estudiantes pueden explorar series y sucesiones matemáticas, comprendiendo cómo convergen o divergen.

## Metodología y desarrollo del taller

Se mostrarán a través de ejemplos y actividades guiadas, que desarrollarán los participantes en el taller, los diferentes comandos de la vista CAS. Se utilizará la versión GeoGebra Clásico 5 de escritorio, aunque se comentarán comandos de otras versiones en el caso que suponga una novedad o mejora.

El material utilizado en el desarrollo del mini curso estará a disposición de los participantes.

## Conclusión

En resumen, el cálculo simbólico con GeoGebra en el aula de matemáticas ofrece una valiosa herramienta para enseñar y aprender conceptos avanzados de cálculo. La capacidad de manipular expresiones algebraicas y visualizar sus implicaciones gráficas brinda al alumnado una comprensión más profunda y aplicada de los conceptos matemáticos. Al permitir la exploración dinámica y la experimentación con cálculos, GeoGebra se convierte en un recurso pedagógico esencial que potencia el aprendizaje del cálculo y mejora la experiencia educativa en el aula.

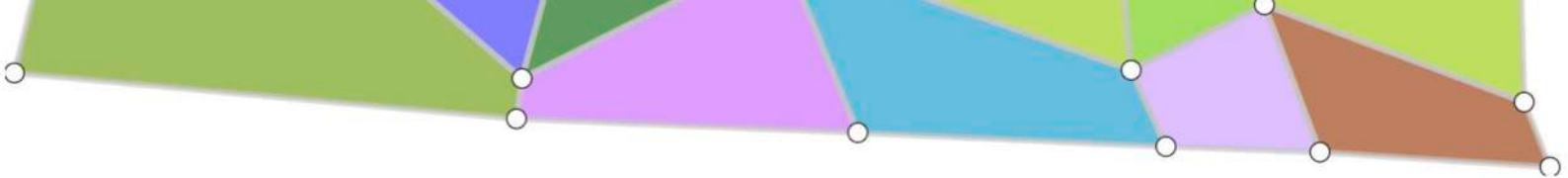
## Nota Biográfica



### José María Chacón Íñigo

Licenciado en Matemáticas por la Universidad de Sevilla (España). Profesor de Enseñanza Secundaria y Bachillerato en diversos Centros de Sevilla desde 1988. Miembro de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática SAEM THALES (<https://thales.cica.es/>) desde hace más de 30 años y miembro del Instituto de GeoGebra de Andalucía (<https://thales.cica.es/geogebra/>) desde sus inicios. Actualmente forma parte de los grupos de trabajo que han creado el proyecto MATES GG, un espacio en el que se pone a disposición del profesorado una selección de materiales elaborados con la herramienta GeoGebra a través de unas guías didácticas creadas con la herramienta de autor eXeLearning. Ha sido desarrollado por la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM), con el apoyo del Ministerio de Educación y Formación Profesional del Gobierno de España. (<https://intef.es/recursos-educativos/recursos-para-el-aprendizaje-en-linea/matesgg/>).

---



# Índice de Autores

|                |                  |                   |
|----------------|------------------|-------------------|
| Abar           | José, 54, 59, 90 | Reis              |
| Celina, 42     |                  | Ilda, 59          |
| Albuquerque    | Gonçalves        | Rizzo             |
| Helena, 8      | Irene, 54        | Karina, 75        |
| Andjić         | Guimarães        | Santos            |
| Branko, 4      | Nuno, 63         | Mário, 54         |
| Baeta          | João             | Vanda, 22         |
| Nuno, 22       | Kengana, 32      | Silva             |
| Breda          | Mafuiana         | Jaime, 10         |
| Ana, 28        | Alcinda, 80      | Silveirar         |
| Carrilho       | Martinho         | Astrigilda, 38    |
| Agustín, 15    | Carla, 68        | Teles             |
| Chacón         | Nharreluga       | Joana, 66         |
| José María, 97 | Ézar, 84         | Trocado           |
| Correia        | Nogueira         | Alexandre, 63, 94 |
| Paulo, 49      | Oscarina, 54     | Vaerenbergh       |
| Delgado        | Quaresma         | Steven, 72        |
| Juan, 46, 72   | Pedro, 22        | Vidade            |
| Dias           | Recio            | Aldovanda, 80     |
| Adriana, 42    | Tomas, 2, 20     | Zsolt             |
| Dos Santos     |                  | Lavicza, 4        |





1 2 9 0

UNIVERSIDADE D  
COIMBRA