

Matemática B

Programa do 11^o Ano

Texto para Discussão

Novembro de 2000

1 Notas Introdutórias

1.1

No 10^o ano, os estudantes dos Cursos Tecnológicos recuperaram e aprofundaram, para um nível secundário, algumas apropriações matemáticas realizadas no ensino básico, enquanto que foram instruídos no sentido das novas exigências e das formas de trabalho da disciplina de Matemática. Ao mesmo tempo que desenvolveram competências genéricas, apropriaram de algum modo competências ao nível da construção das representações adequadas a situações simples usando geometria e álgebra, mas também ao manejo de técnicas de recolha e registo de dados e sua descrição; também foram apresentados às noções relativas a funções e à dinâmica das suas propriedades com o estudo das famílias e o que isso representa ao nível das transformações associadas às alterações de parâmetros.

1.2

No 11^o ano, pretende-se que:

- todo o ensino parta de propostas de trabalho relevantes e com significado para os estudantes dos diversos cursos, esperando-se que o professor acompanhe activamente os trabalhos, disponibilizando as ferramentas matemáticas necessárias e participando na organização das ideias;
- a aprendizagem seja baseada no trabalho autónomo sobre as situações apresentadas (que podem proporcionar vários níveis de resolução) e em actividades que aprofundem os conceitos introduzidos no decurso dos trabalhos;
- se desenvolvam competências gerais de autonomia e, especialmente, que se faça participar a matemática no desenvolvimento das competências profissionais.

Espera-se que os estudantes apropriem conceitos e técnicas matemáticas enquanto enfrentam situações, de tal modo que, face a problemas realistas, possam mobilizar os conhecimentos científicos adequados para dar respostas próprias; pretende-se que o estudante

seja capaz de formar uma opinião própria participando nas decisões ou que consiga ele próprio tomá-las.

Entende-se aqui que cada competência implica um corpo coerente de conhecimentos, atitudes ou capacidades (e habilidades na escolha e depois no manejo das ferramentas, quaisquer que elas sejam), que só os resultados operados na acção autónoma dos estudantes pode permitir esperar que tenham sido desenvolvidas para serem úteis na vida.

1.2.1

As aplicações e os problemas extraídos do mundo real estão no centro deste programa. As aplicações integradas num contexto significativo para os estudantes, são usadas como ponto de partida para cada novo assunto, sendo parte do processo de construção de conceitos matemáticos dos estudantes e usadas como fontes de exercícios. Assim, sendo as actividades de modelação e resolução de problemas partes cruciais deste novo currículo, os professores devem cumprir os seguintes critérios:

- a teoria e as aplicações têm de estar interligadas;
- os problemas apresentados têm de estimular os processos de pensamento em vez da aplicação de algoritmos;
- os contextos das situações problemáticas apresentadas devem integrar diferentes ideias matemáticas;
- alguns dos problemas a seleccionar devem ser abertos proporcionando aos estudantes a escolha das ferramentas matemáticas mais adequadas.

Deve-se oferecer aos estudantes a possibilidade de reinventar ou reconstruir ideias e conceitos matemáticos, colocando-os perante variados problemas (escolhidos pelo grupo de professores que leccionam o 11.º ano de escolaridade em cada escola) do "mundo real" e situações que apresentem traços do mundo real ou traços de modelação.

Os estudantes (individualmente ou em grupo) devem ter a possibilidade de escolher as suas próprias estratégias de resolução de problemas; o facto de se poder confrontar diferentes processos de resolução de problemas (usados pelos colegas ou mesmo pelo professor) permite fomentar a aprendizagem de uma forma crítica, valorizando o trabalho efectuado (seu e/ou do seu grupo e o dos outros).

Dependendo das turmas a trabalhar e das actividades propostas, devem ser sempre incentivadas a abstracção, a formalização e a generalização.

Assim, para todos os assuntos, sem esquecer a necessidade de contacto com as ideias e os métodos fundamentais da matemática, a um certo nível, o ensino da Matemática é organizado de forma potente em volta das aplicações viradas para o desenvolvimento de competências necessárias para o exercício de actividades profissionais qualificadas. Nestas actividades de aplicação, o uso de tecnologias de cálculo, com capacidades gráficas e de comunicação são fundamentais para a criação e o desenvolvimento de competências úteis a todos os desempenhos profissionais. Pelas suas especificidades, a calculadora gráfica e o computador completarão os meios à disposição dos professores e estudantes para executar os diferentes aspectos de uma verdadeira actividade matemática. Com efeito permitem:

- obter rapidamente uma representação do problema, de um conceito, a fim de lhe dar sentido e favorecer a sua apropriação pelo aluno;
- ligar aspectos diferentes (algébrico, geométrico, ...) de um mesmo conceito ou de uma mesma situação;
- explorar situações fazendo aparecer de forma dinâmica diferentes configurações;
- proceder de forma rápida à verificação de certos resultados;

1.2.2

A competência matemática a desenvolver no domínio dos diferentes temas inclui as seguintes vertentes:

- a aptidão para reconhecer e analisar propriedades de figuras geométricas, nomeadamente recorrendo a materiais manipuláveis, a computadores (*software* de geometria dinâmica: *CABRI*, *GSP*, *Cinderella*, etc) e a calculadoras gráficas;
- a aptidão para utilizar a visualização, a representação e o raciocínio (espacial ou outro) na análise e tratamento de situações problemáticas e na resolução de problemas;
- o gosto por experimentar, fazer e investigar matemática nas simulações ou situações simuladas, recorrendo à modelação com uso da calculadora, de sensores, de *software* adequado aos computadores e de modelos matemáticos;
- a confiança pessoal por desenvolver actividades intelectuais que envolvam raciocínio matemático e a concepção de que a validade de uma afirmação está relacionada com a consistência da argumentação lógica usada;
- a predisposição, abertura e aptidão para discutir com outros e comunicar descobertas e ideias matemáticas, através do uso de uma linguagem escrita e oral, não ambígua e adequada às situações trabalhadas;
- a compreensão e ampliação de conceitos matemáticos.

2 Desenvolvimento dos temas a abordar e respectivas indicações metodológicas

2.1 Movimentos Periódicos Funções Trigonométricas

No ensino básico, os estudantes tiveram contacto com a semelhança de triângulos e com a trigonometria. Pretende-se agora que recordem esses conceitos básicos de trigonometria do ângulo agudo, enfrentem situações novas em que a generalização das noções de ângulo e arco, bem como das razões trigonométricas, apareçam como necessárias e intuitivas e aprendam o conceito de função periódica e de funções trigonométricas como modelos matemáticos adequados a responder a problemas. As situações devem ser tão ricas que,

para além da mobilização do conceito de função, exijam esclarecimento de noções de domínio (em especial no que respeita à análise crítica dos resultados) e à resolução de equações trigonométricas. A apresentação de actividades puramente matemáticas pode ser considerada para organizar e aumentar a compreensão dos conceitos e noções, mas também para iniciar as técnicas de cálculo e resolução algébrica que devem ficar apropriadas a um nível de possível transferência para novas situações.

2.1.1 Trigonometria. Funções trigonométricas.

Problemas de trigonometria básica e sua generalização.

Modelação matemática de situações envolvendo fenómenos periódicos.

O professor deve propor problemas de diversos tipos para relembrar a semelhança de triângulos e as razões trigonométricas de ângulos agudos. São exemplos possíveis o cálculo de distâncias directamente inacessíveis. A generalização das noções deve ser intuitiva e sistematizada a partir de actividades que considerem movimentos circulares. São exemplos possíveis a "roda gigante" das feiras, a roda da bicicleta, motores, etc. É absolutamente imprescindível a insistência no círculo trigonométrico.

Com a execução de actividades, pretende-se que o aluno se aproprie dos seguintes conceitos e técnicas associadas e os utilize como "ferramentas" na resolução de problemas:

- radiano;
- referencial polar no plano; ângulos orientados e medidas das suas amplitudes;
- definição de seno, co-seno e tangente de um número real;
- comparação de senos e co-senos de dois números reais;
- resolução de equações trigonométricas simples;
- utilização da relação $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$;
- características das funções circulares: simetria e paridade; periodicidade.

As funções trigonométricas podem e devem aparecer como modelos matemáticos que descrevem situações mais ou menos complexas. As situações apresentadas podem considerar a recolha e tratamento de dados. As primeiras respostas a eventuais perguntas podem ser encontradas de forma ingénua e com recurso à tecnologia e representações informais. O modelo que uma função trigonométrica pode representar deve aparecer como forma mais potente e geral para encontrar respostas para a situação em presença e para outras situações do mesmo tipo.

Exemplos de situações: movimento pendular, movimento do braço na marcha, movimento das marés, roda da bicicleta ou outras situações com movimentos circulares, moldes de peças, etc. Estas actividades de modelação são boas ocasiões para utilizar folhas de cálculo electrónico.

Antes da modelação, deve introduzir-se uma actividade que permita passar do círculo trigonométrico para o conjunto dos pontos $(x, \sin x)$ no plano cartesiano.

As perguntas colocadas sobre a situação devem considerar ou levar à necessidade da resolução de algumas condições com expressões trigonométricas.

Só depois das iniciativas referidas, de trabalho acompanhado mas autónomo, é que o professor pode apresentar actividades matemáticas em que os estudantes aprofundem as noções ligadas a funções trigonométricas e a técnicas de resolução de condições que não devem passar para listas exaustivas de fórmulas, antes devem ficar pela compreensão sempre ligada à interpretação sobre o círculo trigonométrico.

2.2 Movimentos não lineares Taxa de Variação e Funções Racionais.

A noção de função atravessa o currículo de Matemática e permite estabelecer ligação entre vários conteúdos (Aritmética e Funções, Álgebra e Funções, Geometria e Funções, Estatística ou Probabilidades e Funções). A tecnologia propicia boas abordagens para resolver problemas e influencia o tipo de questões a investigar. Os estudantes usam calculadoras gráficas para apoiar as resoluções e as suas investigações mas poderão, sempre que possível, recorrer também aos computadores, utilizar folhas de cálculo, programas de gráficos ou de geometria dinâmica. O recurso à tecnologia torna possível a investigação e a conjectura sobre um maior número de exemplos.

No 10º ano, os estudantes tiveram contacto com problemas que destacaram o papel dos conceitos de variável e de função assim como algumas propriedades das funções polinómicas. Devem no 11º ano partir para a resolução de novas situações tendo como ponto de partida as experiências e conhecimentos anteriores mas este sempre aliado ao encorajamento de novas aprendizagens.

2.2.1

Pretende-se agora que os estudantes :

- elaborem modelos para situações reais utilizando diversos tipos de funções;
- representem e analisem relações utilizando simultaneamente o estudo gráfico, numérico e analítico integrando o estudo das operações com polinómios;
- reconheçam que o mesmo tipo de função pode ser modelo de diferentes situações;
- analisem os efeitos das mudanças de parâmetros nos gráficos de funções;
- estudem o comportamento das funções racionais para valores "muito grandes" da variável e para valores "muito próximos" dos zeros dos denominadores das fracções que as definem;
- estudem a "rapidez" de crescimento (ou decréscimo) da variável dependente em fenómenos variados.

É importante que os estudantes saibam como executar procedimentos matemáticos mas devem, essencialmente, saber quando aplicá-los, conhecer as razões da sua eficácia e adquirirem hábitos de validar as suas respostas. É importante que apreciem a natureza e a importância das ferramentas matemáticas para responderem eficazmente a necessidades específicas de um dado problema. Pretende-se que o conhecimento do procedimento

matemático esteja sempre ligado ao conhecimento do conceito; daí se deseja que o professor implique os estudantes na resolução de problemas ou actividades que envolvam as relações entre procedimentos e conceitos sempre numa perspectiva de conectar os conteúdos. É também um tema privilegiado para desenvolver hábitos de comunicação correcta em Matemática com o objectivo de ampliar a compreensão dos conteúdos, das conexões e da utilidade dos procedimentos matemáticos.

As situações devem ser tão ricas que, para além da mobilização do conceito de função, exijam esclarecimento de noções de domínio (em especial no que respeita à análise crítica dos resultados) e à resolução de equações ou inequações. A apresentação de actividades puramente matemáticas pode ser considerada para organizar e aumentar a compreensão dos conceitos e noções, mas também para iniciar as técnicas de cálculo e resolução algébrica que devem ficar apropriadas a um nível de possível transferência para novas situações.

2.2.2 Funções Racionais.

Investigação das características das funções racionais.

Modelação matemática de situações envolvendo fenómenos não periódicos.

A partir de uma actividade de experimentação (como, por exemplo: "Vendo através de tubos: duas experiências" ou "A resistência do esparguete" – ver Brochura de Funções 11º, p 129), os estudantes podem compreender relações numéricas entre variáveis inversamente proporcionais e encontrar um modelo simples de uma função racional. Deverão proceder, depois, recorrendo às calculadoras gráficas ou ao computador, a investigações – ver Brochura Funções 11º ano (pp 80, 82 e 83) – que os vão conduzir a conjecturar sobre as características e comportamentos de algumas funções racionais, em particular a existência de assíntotas ou o comportamento assintótico. Depois de estudadas as funções das famílias

$$y = ax, y = ax^2 \text{ e } y = a(x - h)^2$$

devem ser investigadas as funções dos tipos

$$y = \frac{1}{ax}, y = \frac{1}{ax^2} \text{ e } y = \frac{1}{a(x - h)^2}$$

A resolução de problemas como os da Brochura F11, "As peças cilíndricas" (p 91), "Compostos ácidos" ou equivalentes permitirá que os alunos resolvam condições e compreendam como se usa a álgebra na resolução de problemas reais. Operações com polinómios — adição, subtração, multiplicação, factorização de polinómios, mas também resolução de equações e inequações devem ser realizadas pelos estudantes durante a resolução de problemas.

2.2.3 Taxa de variação média num intervalo $[a, b]$; taxa de variação em x_0 .

Os estudantes deverão chegar a compreender e explicar a razão para uma função linear ser um bom modelo para estudar as variações da distância em função do tempo no movimento de um objecto que se move em linha recta com velocidade constante e deverão saber

explicar o significado dos diversos parâmetros nos modelos desse tipo. Do mesmo modo, para um móvel que não se desloque a velocidade constante mas com aceleração constante (tal como a queda de um objecto sob influência da gravidade e ignorando a resistência do ar) o estudante deve encontrar, como modelo matemático apropriado, a função quadrática. O estudante deve compreender o significado de uma velocidade negativa. O sensor de movimento permite boas experimentações para estas situações.

Também problemas como "A bola no plano inclinado", "O custo marginal" e "Lançamento de um projectil" (ver Brochura F11 (pp 100, 112 e 113)) permitirão que os estudantes se aproximem dos conceitos de taxa média de variação e de taxa de variação, bem como das respectivas interpretações geométricas. Os estudantes devem compreender o conceito de velocidade média num dado intervalo de tempo e aproximar-se intuitivamente do conceito de velocidade instantânea, e devem ser capazes de relacionar esses conceitos com os respectivos significados geométricos. A utilização da calculadora e do computador (recorrendo a *software* adequado) serão excelentes auxiliares para a aquisição destas noções. O recurso a sensores permitirá experiências interessantes. ■
