

Matemática Aplicada às Ciências Sociais

Proposta para Discussão

Dezembro de 2000

1 Introdução

A disciplina de *Matemática Aplicada às Ciências Sociais* destina-se aos Cursos *Geral de Ciências Sociais e Humanas* e *Tecnológico de Ordenamento do Território*. Para o Curso Geral trata-se de uma disciplina bienal da componente de formação específica com uma carga horária distribuída por 3 aulas de 90 minutos por semana. Para o Curso Tecnológico é uma disciplina trienal da componente de formação científico-tecnológica com uma carga horária semanal distribuída por 2 aulas de 90 minutos.

Esta disciplina pretende desempenhar um papel incontornável para os estudantes dos cursos referidos, contribuindo para uma abordagem completa de situações reais, ao desenvolver a capacidade de formular e resolver matematicamente problemas e ao desenvolver a capacidade de comunicação de ideias matemáticas (os estudantes devem saber ler e escrever textos com conteúdo matemático descrevendo situações concretas).

Mais do que pretender que os estudantes dominem questões técnicas e de pormenor, pretende-se que os estudantes tenham experiências matemáticas significativas que lhes permitam saber apreciar devidamente a importância das abordagens matemáticas nas suas futuras actividades. Ao definir o currículo de uma disciplina desta índole, também se tem em vista propósitos de Educação para a cidadania e o papel importante assumido pela Escola, para esse fim.

O contexto que se nos apresenta é privilegiado. Efectivamente, ao contrário de um curso tradicional de Matemática, em que os conceitos Álgebra – Geometria – Análise, são introduzidos de um modo geral desligados da realidade do dia a dia, o objectivo aqui vai ser o de introduzir e desenvolver alguns conceitos matemáticos através de problemas da vida real, numa perspectiva de contribuir para uma diminuição da "inumeracia".

De entre inúmeros assuntos interessantes que ligam a Matemática à vida de todos os dias, foram seleccionados alguns que pareceram mais aliciantes, nomeadamente:

1. Teoria da decisão:

- Teoria das eleições
- Teoria da partilha equilibrada

2. Modelação matemática

- Modelos de crescimento Populacional (linear e não linear)
- Modelos Financeiros
- Modelos de Grafos

3. Estatística (e Probabilidades)

O primeiro tema deve a sua pertinência ao facto de vivermos numa sociedade democrática e estarmos constantemente a ser solicitados para tomar decisões, tanto na escolha dos políticos que nos governam (*Teoria das eleições*), como ao nível da divisão mais justa de alguns bens materiais, como por exemplo a partilha de uma herança pelos herdeiros (*Teoria da partilha equilibrada*).

Com o segundo tema pretende-se mostrar como alguns modelos matemáticos, ainda que simples, podem ser úteis (o estatístico Georges Box afirmava que "Todos os modelos são maus, alguns modelos são úteis") tanto para explicar o crescimento de populações biológicas, como o crescimento das poupanças no banco. É importante, nomeadamente, tomar consciência de como a forma de utilização dos recursos naturais, como florestas e população de peixes, pode ser fundamental para evitar a sua extinção. Os modelos de grafos introduzem outra forma de mobilizar a Matemática para outros fins e pensando de maneira não usual. E pretendem ser modelos úteis para enfrentar problemas de gestão e iniciar intervenções sociais ao nível da compreensão dos sistemas de distribuição ou recolha (tanto no que se refere à distribuição de bens alimentares, de correio ou de recolha do lixo, como às decisões sobre localização de serviços que careçam de controladores, vendedores, etc)

Finalmente, um lugar de destaque é dado à Estatística, que hoje em dia ocupa uma posição marcante junto de todas as profissões. É uma ciência que fornece os instrumentos próprios para melhor seleccionar e tratar a quantidade de informação que nos chega. Do mesmo modo que foi importante para os nossos pais aprender a ler as palavras, hoje em dia é imprescindível aprender a "ler" os números. A Sociedade está em mudança, pelo que é necessário estarmos atentos e sabermos acompanhar essa mudança, pois só assim poderemos desempenhar o papel a que fomos solicitados.

Tentar-se-á ainda mostrar como se podem tirar conclusões a partir do estudo dos dados, fazendo assim uma introdução à Inferência Estatística. Será nesta fase que mostraremos toda a potencialidade da Estatística, pois veremos como se podem tirar conclusões, partindo do particular para o geral, ao mesmo tempo que se quantifica o erro cometido. Realçaremos o papel desempenhado pela Probabilidade, cujo conceito será também trabalhado. Nos exemplos apresentados limitaremos-nos à construção de intervalos de confiança, recorrendo a exemplos simples, nomeadamente que tenham sido objecto de estudo na parte da Estatística Descritiva, anteriormente dada. No entanto, vão-nos permitir mostrar como se pode fechar o ciclo de um procedimento estatístico, que se iniciou com o planeamento da experiência e uma consequente recolha de dados, com o objectivo de uma tomada de decisões.

2 Apresentação do Programa

2.1 Finalidades

São finalidades da disciplina:

- Desenvolver a capacidade de usar a Matemática como instrumento de interpretação e intervenção no real.
- Desenvolver as capacidades de formular e resolver problemas, de comunicar, assim como a memória, o rigor, o espírito crítico e a criatividade.
- Contribuir para formar uma atitude positiva face à ciência e particularmente para com a Matemática.
- Diminuir a inumeracia, contribuindo para aumentar a literacia.
- Promover a realização pessoal mediante o desenvolvimento de atitudes de autonomia e solidariedade.
- Criar capacidades de intervenção social pela compreensão e discussão de sistemas e instâncias de decisão que influenciam a vida dos cidadãos, participando desse modo na formação para uma cidadania activa e participativa.

2.2 Objectivos gerais e competências a desenvolver:

Valores/Atitudes	Capacidades/Aptidões	Conhecimentos
Desenvolver a confiança em si próprio: ■ Expressar e fundamentar as suas opiniões. ■ Revelar espírito crítico, de rigor e de confiança nos seus raciocínios. ■ Abordar situações novas com interesse, espírito de iniciativa e criatividade. ■ Procurar a informação de que necessita.	Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real: ■ Analisar situações da vida real identificando modelos matemáticos que permitam a sua interpretação e resolução. ■ Seleccionar estratégias de resolução de problemas. ■ Formular hipóteses e prever resultados. ■ Interpretar e criticar resultados no contexto do problema. Desenvolver a capacidade de abstracção de forma a conseguir reduzir uma determinada situação a um modelo, que embora não consiga explicar completamente um fenómeno, possa ajudar a compreendê-lo.	Conhecer alguns métodos de apoio à decisão: ■ Analisar a diferença entre diversos sistemas eleitorais. ■ Conhecer alguns métodos de divisão proporcional. ■ Reconhecer os limites dos métodos matemáticos.

Valores/Atitudes	Capacidades/Aptidões	Conhecimentos
Desenvolver interesses culturais: ■ Manifestar vontade de aprender e gosto pela pesquisa. ■ Interessar-se por notícias e publicações relativas à Matemática e a descobertas científicas e tecnológicas. ■ Apreciar o contributo da Matemática para a compreensão e resolução de problemas do Homem através do tempo.	Desenvolver o raciocínio e o pensamento científico: ■ Descobrir relações entre conceitos de Matemática. ■ Formular generalizações a partir de experiências. ■ Validar conjecturas. ■ Compreender a relação entre o avanço científico e o progresso da humanidade Desenvolver a capacidade de observar, formular questões, assim como organizar a informação suscitada por essas questões.	Conhecer diferentes modelos matemáticos: ■ Conhecer modelos envolvendo funções lineares, exponenciais, logarítmicas e logísticas. ■ Discutir problemas concretos envolvendo modelos financeiros. ■ Discutir problemas concretos modelados com grafos.
Desenvolver hábitos de trabalho e persistência: ■ Elaborar e apresentar os trabalhos de forma organizada e cuidada. ■ Manifestar persistência na procura de soluções para uma situação nova.	Desenvolver a capacidade de comunicar e transmitir a informação organizada: ■ Comunicar conceitos, raciocínios e ideias, oralmente e por escrito, com clareza e rigor. ■ Interpretar textos de Matemática. ■ Exprimir o mesmo conceito em diversas formas ou linguagens. ■ Apresentar os textos de forma clara e organizada.	Ampliar os conhecimentos de Estatística e Probabilidades: ■ Interpretar e comparar distribuições estatísticas. ■ Resolver problemas de contagem. ■ Resolver problemas envolvendo cálculo de probabilidade.
Desenvolver o sentido da responsabilidade: ■ Responsabilizar-se pelas suas iniciativas e tarefas. ■ Avaliar situações e tomar decisões.	Desenvolver a capacidade de compreender a aleatoriedade presente nas situações do dia a dia e em cada tomada de decisão.	Conhecer aspectos da História da Matemática: ■ Conhecer personalidades e factos marcantes da História da Matemática e relacioná-los com momentos históricos de relevância cultural ou social.
Desenvolver o espírito de tolerância e de cooperação: ■ Colaborar em trabalhos de grupo, partilhando saberes e responsabilidades. ■ Respeitar a opinião dos outros e aceitar as diferenças. ■ Intervir na dinamização de actividades e na resolução de problemas da comunidade em que se insere.	Desenvolver as capacidades de utilização das novas tecnologias: na pesquisa de informação, no desenvolvimento de projectos e na transmissão dos resultados.	

2.3 Visão geral dos conteúdos/temas

Curso Geral de Ciências Sociais e Humanas Distribuição dos temas/conteúdos pelos anos de escolaridade

10º Ano	11º Ano
- Teoria da Decisão - Teoria matemática das eleições - Teoria da partilha equilibrada - Estatística - Interpretação de tabelas e gráficos através de exemplos. - Planeamento e aquisição de dados. Questões éticas relacionadas com as experimentações. Exemplos. - Aplicação e concretização dos processos anteriormente referidos, na elaboração de alguns pequenos projectos com dados recolhidos na Escola, com construção de tabelas e gráficos simples. - Classificação de dados. Construção de tabelas de frequência. Representações gráficas adequadas para cada um dos tipos de dados considerados. - Cálculo de estatísticas. Vantagens, desvantagens e limitações das medidas consideradas. - Introdução gráfica à análise de dados bivariados quantitativos. - Modelos de regressão linear. - Relação entre variáveis qualitativas.	- Modelos matemáticos - Modelos populacionais - Modelos financeiros - Modelos de grafos - Modelos de Probabilidade - Fenómenos aleatórios. - Argumentos de simetria e Regra de Laplace. - Modelos de probabilidade em espaços finitos. Variáveis quantitativas. Função massa de probabilidade. - Probabilidade condicional. Árvores de probabilidade. Acontecimentos independentes. - Probabilidade Total. Regra de Bayes. - Valor médio e variância populacional. - Espaço de resultados infinitos. Modelos discretos e modelos contínuos. - Exemplos de modelos contínuos. - Modelo Normal. - Introdução à Inferência Estatística - Parâmetro e estatística. - Distribuição de amostragem de uma estatística. - Noção de estimativa pontual. Estimação de um valor médio. - Importância da amostragem aleatória, no contexto da Inferência Estatística. Utilização do Teorema do Limite Central na obtenção da distribuição de amostragem da média. - Construção de estimativas intervalares ou intervalos de confiança para o valor médio de uma variável. - Estimativa pontual do valor médio da proporção com que a população verifica uma propriedade. - Construção de intervalos de confiança para a proporção. - Interpretação do conceito de intervalo de confiança.

No que diz respeito à distribuição dos temas do 10º ano propõe-se que metade das aulas sejam

dedicadas ao tema **Teoria da decisão** e metade ao tema **Estatística**. No 11º ano, propõe-se que um terço das aulas sejam dedicadas ao tema **Modelação Matemática**, um terço ao tema **Probabilidades** e o restante terço à leccionação de **Inferência Estatística**.

Curso Tecnológico de Ordenamento do Território

Distribuição dos temas/conteúdos pelos anos de escolaridade

10º Ano	11º Ano	12º Ano
1. Teoria da Decisão ■ Teoria matemática das eleições ■ Teoria da partilha equilibrada	1. Estatística ■ Classificação de dados. Construção de tabelas de frequência. Representações gráficas adequadas para cada um dos tipos de dados considerados. ■ Cálculo de estatísticas. Vantagens, desvantagens e limitações das medidas consideradas. ■ Introdução gráfica à análise de dados bivariados. ■ Modelos de regressão linear ■ Relação entre variáveis qualitativas	1. Modelos matemáticos ■ Modelos populacionais ■ Modelos financeiros ■ Modelos de grafos
2. Estatística ■ Interpretação de tabelas e gráficos através de exemplos. ■ Planeamento e aquisição de dados. Questões éticas relacionadas com as experimentações. Exemplos. ■ Aplicação e concretização dos processos anteriormente referidos, na elaboração de alguns pequenos projectos com dados recolhidos na Escola, com construção de tabelas e gráficos simples.	2. Modelos de Probabilidade ■ Fenómenos aleatórios. ■ Argumentos de simetria e Regra de Laplace. ■ Modelos de probabilidade em espaços finitos. Variáveis quantitativas. Função massa de probabilidade. ■ Probabilidade condicional. Árvores de probabilidade. Acontecimentos independentes. ■ Probabilidade Total. Regra de Bayes. ■ Valor médio e variância populacional. ■ Espaço de resultados infinitos. Modelos discretos e modelos contínuos. ■ Exemplos de modelos contínuos. ■ Modelo Normal.	2. Introdução à Inferência Estatística ■ Parâmetro e estatística. ■ Distribuição de amostragem de uma estatística. ■ Noção de estimativa pontual. Estimação de um valor médio. ■ Importância da amostragem aleatória, no contexto da Inferência Estatística. Utilização do Teorema do Limite Central na obtenção da distribuição de amostragem da média. ■ Construção de estimativas intervalares ou intervalos de confiança para o valor médio de uma variável. ■ Estimativa pontual do valor médio da proporção com que a população verifica uma propriedade. ■ Construção de intervalos de confiança para a proporção. ■ Interpretação do conceito de intervalo de confiança.

Para este Curso, a distribuição dos temas deve obedecer ao seguinte:

- **10º ano:** 40 aulas de 90 minutos para a Teoria da decisão e 20 aulas de 90 minutos para a Estatística;
- **11º ano:** 20 aulas de 90 minutos para a Estatística e 40 aulas de 90 minutos para as Probabilidades;
- **12º ano:** 40 aulas de 90 minutos para a Modelação Matemática e 20 aulas de 90 minutos para a Inferência Estatística.

A escolha dos temas propostos, como já se disse na introdução, teve em conta um dos objectivos prioritários da escola, que é o da educação para a cidadania. Esta educação subentende uma melhor compreensão do mundo que nos rodeia, pelo que é necessário dotar os jovens das ferramentas necessárias para mais rapidamente e em melhores condições responderem às inúmeras solicitações do meio em que se integram. Também se consideram padrões internacionais que recomendam insistentemente o desenvolvimento de temas de Matemática Discreta.

Os três temas seleccionados têm objectivos distintos, permitindo desenvolver capacidades distintas, ao mesmo tempo que aprofundam consistentemente capacidades algébricas e analíticas, de que exemplificamos o trabalho com fracções e percentagens, o estudo de progressões aritméticas e progressões geométricas, a resolução de equações, assim como a utilização de funções (sem aprofundar o estudo analítico).

2.4 Sugestões Metodológicas Gerais

Convém ter presente que, neste programa, são determinantes as capacidades de usar a matemática em situações reais, formular e resolver problemas e comunicar ideias matemáticas. Menos importantes são o conhecimento e a utilização de rotinas e técnicas de cálculo e o domínio dos conceitos como objectos matemáticos. Assume grande importância a interpretação de problemas realistas e a investigação que se faz nas fontes e nas instâncias de decisão para as diversas situações. O professor deve apresentar ou sugerir situações que possam vir a ser objecto de estudo e deve esclarecer a matemática necessária para as diversas situações e para a comunicação inteligente e justificada das decisões.

A abordagem dos temas de Estatística, Probabilidades e Inferência Estatística aplicada às Ciências Sociais é feita neste programa de uma forma muito virada para os interesses e necessidades dos estudantes dos Cursos em que esta disciplina se integra. É, por isso, que estes temas são tratados com muitos exemplos e detalhe metodológico.

2.4.1 Avaliação

A natureza da disciplina e, em particular, o tipo de trabalho que se pretende desenvolver com os estudantes implica decisivamente uma alteração nos instrumentos de avaliação. As provas escritas (ou testes) tradicionais de questionamento sobre os conceitos matemáticos em si mesmos ou com exigência de prova do manejo de técnicas matemáticas ou de manipulação da simbologia matemática perdem sentido e oportunidade como instrumentos privilegiados para as tarefas de avaliação. A actividade dos estudantes e o aproveitamento que se pretende verificar só podem ser medidos pela apreciação dos trabalhos de grupo e individuais realizados e que devem assumir diversos formatos: composições e notas de leitura, relatórios de actividades desenvolvidas, preparação de apresentações e participação em debates com temas seleccionados adequadamente ligados aos assuntos de ensino.

2.5 Recursos

A didáctica prevista para a Matemática Aplicada às Ciências Sociais no ensino secundário pressupõe a possibilidade de uso de materiais e equipamentos diversificados:

- Material de desenho para o quadro e para o trabalho individual (régua, esquadro, compasso, transferidor);
- Meios audiovisuais (retroprojector, acetatos e canetas, diapositivos, vídeo, ...);
- Livros para consulta e manuais;
- Outros materiais escritos (folhas com dados estatísticos, fichas de trabalho, fichas de avaliação, ...). Prevê-se a possibilidade de recorrer a fontes para fornecimento de dados estatísticos (autarquias, clubes, hospitais, empresas, institutos, cooperativas,...);
- Calculadoras gráficas com possibilidade de introdução de um ou dois pequenos programas;
- Computador.

É considerado indispensável o uso de

- calculadoras gráficas que desempenham uma parte das funções antes apenas possíveis num computador e que apresentam uma sofisticação crescente e preços cada vez mais acessíveis (para trabalho regular na sala de aula ou para demonstrações com todos os alunos, usando uma calculadora com "view-screen");
- uma sala de computadores com "software" adequado para trabalho tão regular quanto possível;
- um computador ligado a um "data-show" para demonstrações, simulações ou trabalho na sala de aula com todos os alunos ao mesmo tempo.

Todas as Escolas Secundárias devem dotar-se quanto antes de Laboratórios de Matemática que integrem estes recursos e outros que se venham a revelar necessários. Os recursos escolhidos deverão ter em vista tanto a sua utilização na própria sala do Laboratório de Matemática, como uma utilização de recursos adequados em salas de aulas indiferenciadas.

O trabalho de modelação matemática só será plenamente atingido se for possível trabalhar na sala de aula as diversas fases do processo de modelação matemática, embora não seja exigível que sejam todas tratadas simultaneamente em todas as ocasiões; em particular, recomenda-se a utilização de sensores de recolha de dados acoplados a calculadoras gráficas ou computadores para, nalgumas situações, os alunos tentarem identificar "modelos matemáticos que permitam a sua interpretação".

O uso de tecnologia facilita ainda uma participação activa do aluno na sua aprendizagem como já era preconizado por Sebastião e Silva, quando escrevia no "Guia para a utilização do Compêndio de Matemática" que "haveria muitíssimo a lucrar em que o ensino ... fosse ... tanto quanto possível laboratorial, isto é, baseado no uso de computadores, existentes nas próprias escolas ou fora destas, em laboratórios de cálculo". O estudante deve contudo ser confrontado, através de exemplos concretos, com os limites da tecnologia.

As calculadoras gráficas (que são também calculadoras científicas completíssimas), ferramentas que cada vez mais se utilizarão correntemente, de-vem ser entendidas não só como instrumentos de cálculo mas também como meios incentivadores do espírito de pesquisa. O seu uso é obrigatório neste programa.

Os estudantes devem ter oportunidade de entender que aquilo que a calculadora apresenta no seu écran pode ser uma visão distorcida da realidade; além do mais, o trabalho feito com a máquina deve ser sempre confrontado com conhecimentos teóricos, assim como o trabalho teórico deve ser finalizado com uma verificação com a máquina.

É importante que os estudantes descrevam os raciocínios utilizados e interpretem aquilo que se lhes apresenta de modo que não se limitem a "copiar" o que vêem. A calculadora vai permitir que se trabalhe com um muito maior número de funções em que diversas características, como os zeros e os extremos, não se podem determinar de forma exacta; estas funções são importantes pois aparecem no contexto da resolução de problemas aplicados.

É muito importante desenvolver a capacidade de lidar com elementos de que apenas uma parte se pode determinar de forma exacta; é importante ir sempre treinando os estudantes na confrontação dos resultados obtidos com os conhecimentos teóricos; sem estes aspectos não se pode desenvolver a capacidade de resolver problemas de aplicações da matemática e a capacidade de analisar modelos matemáticos. Com os cuidados referidos, e como experiências em Portugal e noutros países mostram, a calculadora gráfica dará uma contribuição positiva para a melhoria do ensino da Matemática.

Uso de computadores

O computador, pelas suas potencialidades, nomeadamente nos domínios da Geometria dinâmica e da representação gráfica de funções e da simulação, permite actividades não só de exploração e pesquisa como de recuperação e desenvolvimento, pelo que constitui um valioso apoio a alunos e professores, devendo a sua utilização considerar-se obrigatória neste programa.

Vários tipos de programas de computador são muito úteis e enquadram-se no espírito do programa. Programas de Geometria, de Cálculo Numérico e Estatístico, particularmente, uma Folha de Cálculo, de Gráficos e Simulação, fornecem diferentes tipos de perspectivas tanto a professores como a alunos. O número de programas disponíveis no mercado português aumenta constantemente. Neste sentido recomenda-se enfaticamente o uso de computadores, tanto em salas onde os alunos poderão ir realizar trabalhos práticos, como em salas com condições para se dar uma aula em ambiente computacional (nomeadamente nos Laboratórios de Matemática), além do partido que o professor pode tirar como ferramenta de demonstração na sala de aula usando um "data-show" com retroprojector ou um projector de video.

Os alunos devem ter oportunidade de trabalhar directamente com um computador, com a frequência possível de acordo com o material disponível. Nesse sentido as escolas são incentivadas a equipar-se com o material necessário para que tal tipo de trabalhos se possa realizar com a regularidade que o professor julgar aconselhável. O trabalho com computadores deverá ainda ser explorado e desenvolvido na Área de Projecto e em actividades complementares, não podendo, contudo, o trabalho com computadores ser remetido exclusivamente para fora do trabalho regular da aula de Matemática.

Internet

Estando todas as Escolas Secundárias ligadas à Internet o professor não deve deixar de tirar todo o partido deste novo meio de comunicação. Na bibliografia final são indicados alguns

sítios recomendados; esses sítios contêm ligações para muitos outros sítios de interesse. Para o trabalho com os alunos apresenta-se como exemplo de trabalho proveitoso o de projectos como "Pergunta Agora" ou "Investiga e Partilha" onde os alunos podem colocar dúvidas ou partilhar a resolução de problemas (os projectos podem ser acedidos a partir da página da APM-Associação de Professores de Matemática).

Como exemplo de um projecto de interesse geral para professores e alunos e para divulgação da matemática aponta-se o do projecto "Atrator-Matemática Interactiva" que pode ser visto em: <http://www.fc.up.pt/attractor>

3 Desenvolvimento dos temas e indicações metodológicas

Teoria Matemática das Eleições

Este tema foi escolhido para iniciar o 10^o ano por várias razões:

- aborda um assunto muito discutido no nosso regime político democrático;
- é um tema de interesse directo para os alunos deste agrupamento;
- ajuda a recordar técnicas e conceitos matemáticos já abordados no ensino básico, tais como cálculo, percentagens e desigualdades;
- alerta os alunos para a importância de modelos matemáticos em áreas fora das ciências e da engenharia;
- mostra as limitações de um modelo matemático;
- permite uma forma de trabalho em que o investigar situações, o recolher dados, o analisar situações e o escrever de pequenos relatórios desempenham um papel preponderante.

Nesta ordem de ideias devem ser abordados os seguintes temas:

- comparações de algumas eleições;
- comparação com outros métodos de votação (por exemplo, por ordem de preferência, majoritário com duas voltas, proporcional, de aprovação)
- referência ao paradoxo de Condorcet
- referência breve ao teorema de Arrow

Todo o trabalho deve ser feito a partir de exemplos concretos que tanto podem vir de votações feitas entre os próprios alunos (cores, sabores, clubes, países, etc.), como devem ser usados dados de eleições já realizadas, com particular relevância para as eleições nacionais, regionais e locais portuguesas. Devem também ser usados alguns exemplos históricos significativos.

O professor deve usar a metodologia que achar mais adequada de modo a que os alunos participem activamente no estudo dos exemplos e modelos propostos.

Os alunos devem recorrer à tecnologia (calculadoras gráficas ou computadores) para simular variações das situações estudadas e tentar retirar conclusões, elaborando pequenos relatórios. Não se pretende desenvolver uma teoria matemática completa das eleições, mas tão só alertar os alunos para uma área de importância fundamental na sociedade actual e como a matemática é uma ferramenta incontornável (embora de modo nenhum seja a única ferramenta relevante).

Teoria da Partilha Equilibrada

Com este tema, pretende-se que os estudantes

- discutam problemas similares aos de partilhas (em heranças);
- compreendam a importância e a dificuldade dos assuntos sociais (das pequenas comunidades e das famílias que careciam da actuação de juizes, homens bons, louvados)
- procurem algoritmos razoáveis para a divisão justa (casos contínuo e discreto)
- usem e discutam os algoritmos para o caso contínuo: "divisão de Steinhaus - pelo último a escolher de", "divisão de Banach e Knaster - último a diminuir", "divisão livre de inveja de Taylor e Brams".
- usem e discutam algoritmos para o caso discreto.

Os estudantes devem ser aproximados a problemas de heranças (com referências socio-culturais às regiões de inserção) e devem procurar compreender procedimentos ancestrais das comunidades para a divisão de bens. Sobre estas questões históricas e da sua herança cultural devem realizar trabalhos em que esclareçam a matemática usada. Devem ser referenciados e resolvidos com os estudantes os problemas clássicos da divisão (problema dos camelos de Malba Tahan, por exemplo).

Devem depois discutir-se algoritmos modernos para os casos discreto e contínuo, com situações tão diferentes como a divisão entre herdeiros ou divisão de bolo por grupo de amigos.

As situações e os trabalhos de grupo (e individuais) devem dar origem a diferentes composições, relatórios, investigações históricas.

Estatística

Interpretação de tabelas e gráficos através de exemplos.

Objectivos a atingir:

- Familiarizar os alunos com a leitura e interpretação de informação transmitida através de tabelas e gráficos.

De forma a cimentar alguns dos conhecimentos adquiridos no Ensino Básico, na introdução do tema Estatística, propomos que se comece com a interpretação de tabelas e gráficos, já construídos, que são instrumentos privilegiados em qualquer procedimento estatístico. Pretendemos

chamar a atenção para o quanto estes processos podem ser ricos na transmissão de informação, mas também alertar para algumas representações que podem levar a interpretações erradas. Os exemplos devem ser sugestivos, ligados a actividades do mundo real.

Pretende-se que no fim deste módulo os alunos estejam familiarizados com os diferentes tipos de gráficos e tabelas, que são usados para reduzir a informação contida num conjunto de dados, sem terem a preocupação de quais as regras ou metodologias utilizadas na sua construção. No texto de apoio que acompanha o programa sugerimos alguns exemplos que podem ajudar a clarificar a metodologia proposta.

Planeamento e aquisição de dados. Questões éticas relacionadas com as experimentações. Exemplos.

Objectivos a atingir:

- Apresentar as ideias básicas dos processos conducentes à recolha de dados válidos.
- Fazer sentir a necessidade de aleatorizar os processos de recolha de dados.

Neste módulo, que consideramos de grande importância, é que se tem a oportunidade de dar a entender o que é a Estatística, como ciência. Em qualquer procedimento estatístico estão, de um modo geral, envolvidas duas fases importantes, nomeadamente a fase que diz respeito à organização dos dados – *Análise de dados*, e a fase em que se procura retirar conclusões a partir dos dados, dando ainda informação de qual a confiança que devemos atribuir a essas conclusões – *Inferência Estatística*. Existe no entanto uma fase pioneira, que diz respeito à *Produção ou Aquisição de Dados*. Como é referido em **Tannenbaum et al.** (1997), p. 426,

”Behind every statistical statement there is a story, and like any story it has a beginning, a middle, an end, and a moral. In this first statistics chapter we begin with the beginning, which is statistics typically means the process of gathering or collecting data. Data are the raw material of which statistical information is made, and in order to get good statistical information one needs good data”.

Aplicação e concretização dos processos anteriormente referidos, na elaboração de alguns pequenos projectos com dados recolhidos na Escola, com construção de tabelas e gráficos simples.

Objectivos a atingir:

- Fazer sentir a necessidade de organizar os dados, de forma a fazer sobressair a informação neles contida.
- Fazer sentir a necessidade de alguma metodologia na organização dos dados.

Neste módulo pretende-se que os alunos elaborem pequenos estudos em que face a um determinado problema, identifiquem a População objectivo, seleccionem uma amostra representativa, quando não for possível estudar a População toda e façam a redução dos dados obtidos através de uma sondagem. Nesta fase é importante que o Professor dê a ajuda necessária, quando não for imediata a forma de organizar os dados.

Os projectos efectuados devem estar relacionados com dados recolhidos na Escola ou no meio que rodeia a escola, pois de um modo geral os alunos ficam motivados por estes estudos, já que gostam de conhecer a realidade da sua Escola.

Classificação de dados. Construção de tabelas de frequência. Representações gráficas adequadas para cada um dos tipos de dados considerados.

Objectivos a atingir:

- Habilitar na utilização das ferramentas mais adequadas para o tratamento dos diferentes tipos de dados.
- Ensinar a fazer uma leitura adequada dos gráficos.

Neste módulo procede-se à organização e redução dos dados obtidos através de sondagens ou experimentações. É importante ter presente o tipo de dados objecto de estudo, pois nem sempre se pode aplicar a mesma metodologia estatística a todos os tipos de dados.

Nesta fase de organização dos dados é essencial construirmos “bons” gráficos, para que tenha sentido a frase vulgarmente utilizada “um gráfico vale mais do que mil palavras”.

Cálculo de estatísticas. Vantagens, desvantagens e limitações das medidas consideradas.

Objectivos a atingir:

- Apresentar umas medidas, que tal como as representações gráficas, permitem reduzir a informação contida nos dados.
- Chamar a atenção para as vantagens e para as situações em que não se devem calcular.

Além das representações gráficas também se utilizam medidas calculadas a partir dos dados – *estatísticas*. Destas medidas destacam-se as medidas de localização, nomeadamente as que localizam o centro da amostra, de que destacamos a *média* e a *mediana*, e medidas de dispersão, que medem a variabilidade apresentada pelos dados, de que destacamos o *desvio padrão* e a *amplitude inter-quartil*. Outras medidas de localização a considerar são os *quantis*, nomeadamente os *quartis* e os *percentis*.

Deve-se observar que ao reduzir a informação contida nos dados sob a forma de alguns números, se está a proceder a uma redução drástica desses dados, pelo que as estatísticas consideradas devem ser convenientemente escolhidas de modo a representarem o melhor possível os dados que pretendem sumariar.

Nesta secção, em que se refere a pouca utilidade do par (média, desvio-padrão), para caracterizar distribuições de dados fortemente enviesadas, pode-se falar de *transformações* de dados que permitem reduzir o enviesamento e conduzir a distribuições aproximadamente simétricas, onde já tem sentido falar naquelas medidas que são as mais divulgadas e mais conhecidas.

Introdução gráfica à análise de dados bivariados.

Objectivos a atingir:

- Apresentar um modo eficaz de visualizar a associação entre duas variáveis.
- Saber interpretar o tipo e a força com que duas variáveis se associam.

Pode acontecer que sobre um indivíduo da população a estudar se recolha informação sobre duas características ou variáveis quantitativas, obtendo assim um conjunto de dados sobre a forma de pares de dados. Normalmente o que se pretende neste caso é estudar a relação entre as duas variáveis, que se supõe estarem relacionadas. O processo adequado para descrever esta

relação é começar pela representação gráfica conhecida por diagrama de pontos ou diagrama de dispersão. O que se pretende retirar de uma representação deste tipo é a forma, direcção e grau de associação entre as variáveis.

Devem ser exemplificadas as diferentes situações que podem surgir, reflectindo os diferentes tipos e graus de associação que se pode verificar entre as variáveis.

Se se concluir que tem sentido falar numa associação entre as variáveis, então passa-se a uma fase posterior, da construção de um modelo que permita conhecer como se reflectem numa das variáveis as modificações processadas na outra, o que conduzirá aos modelos de regressão, a estudar a seguir.

Modelos de regressão linear

Objectivos a atingir:

- Ensinar a sumariar a relação linear existente entre duas variáveis, através de uma recta.
- Apresentar uma medida que além de indicar a força com que duas variáveis se associam linearmente, também dá indicação da “bondade” do ajustamento linear.

No módulo anterior em que se representaram graficamente conjuntos de pontos (x_i, y_i) num diagrama de pontos ou diagrama de dispersão, verificou-se que para alguns conjuntos de pontos, se verificava a existência de uma certa associação linear traduzida pelo padrão da nuvem de pontos, na forma de uma oval, mais ou menos alongada. Pretende-se, nestes casos, introduzir um modelo matemático que traduza a relação entre os pontos, nomeadamente proceder a um *ajustamento de uma recta* a esses conjunto de pontos.

Utilizar a recta de regressão num dos seus objectivos fundamentais, isto é na predição de um valor para a variável resposta, a partir de um valor dado para a variável explicativa.

Devem ser referidas, nomeadamente dando exemplos, limitações da recta de regressão, quando existem *outliers*.

Posteriormente recomenda-se a definição do coeficiente de correlação, como uma medida que mede o maior ou menor grau de associação linear, com que as variáveis se associam. Deve ser apresentada a fórmula

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$$

que permite o seu cálculo e que deve ser utilizada para justificar graficamente o maior ou menor valor obtido para o coeficiente de correlação, conforme o aspecto da nuvem de pontos.

Devem ser referidas, nomeadamente dando exemplos, limitações do coeficiente de correlação, quando existem *outliers*.

Na interpretação do coeficiente de correlação deve-se chamar a atenção para o facto de que a existência de correlação elevada entre duas variáveis não significa necessariamente uma relação de causa-efeito.

Recomenda-se que se enuncie o resultado, que permite interpretar o coeficiente de correlação no contexto da recta de regressão.

Deve ser ainda chamada a atenção para o perigo da utilização da recta de regressão para fazer extrapolações.

Relação entre variáveis qualitativas

Objectivos a atingir:

- Apresentar um modo eficaz de organizar informação de tipo qualitativo.
- Chamar a atenção para a utilização incorrecta que, por vezes, se faz da leitura de percentagens a partir de tabelas.

No módulo anterior foram exploradas as relações entre variáveis de tipo quantitativo. Pretende-se neste módulo estudar algumas formas de explorar as relações entre variáveis de tipo qualitativo. Chama-se a atenção para o facto de que as variáveis envolvidas podem ser por inerência de tipo qualitativo (sexo, idade, etc), enquanto que outras foram categorizadas por se ter procedido a agrupamentos de variáveis de tipo quantitativo (idade, altura, etc).

O instrumento básico para a análise de dados bivariados, de tipo qualitativo é a representação dos dados em tabelas de contingência, cuja análise se faz calculando percentagens adequadas.

Modelos Populacionais

Neste tema, o aluno tomará contacto com várias famílias de funções. Não se pretende um estudo detalhado e exaustivo, mas apenas uma análise de comportamentos em contextos concretos relativos à evolução de populações.

O aluno deverá contactar com modelos

- Lineares
- Exponenciais
- Logarítmicos
- Logísticos

Todo o trabalho deve ser feito a partir de exemplos concretos, devendo procurar-se usar dados da realidade portuguesa. Devem também ser usados alguns exemplos históricos significativos (com uma referência obrigatória a Malthus). O professor deve usar a metodologia que achar mais adequada de modo a que os alunos participem activamente no estudo dos exemplos e modelos propostos.

Os alunos devem recorrer à tecnologia (calculadoras gráficas ou computadores) para estudar famílias de funções e simular variações de dados nos modelos analisados. Os alunos deverão usar as diferentes regressões para obter modelos abstractos a partir de dados recolhidos de fontes diversas. É essencial uma análise crítica dos modelos escolhidos para cada caso.

Se os alunos se mostrarem interessados, poderão ser abordadas algumas equações de diferenças simples de onde se obtêm as funções estudadas.

O professor pode apresentar situações ou problemas para os quais os estudantes devem fazer simulações de acordo com as condições iniciais e cenários possíveis de evolução mundial (dados oficiais devem ser sempre considerados), produzindo pareceres e propostas para apoiar decisão ou escolha.

Modelos Financeiros

A abordagem de alguns modelos financeiros pelos estudantes prossegue diversos objectivos:

- identificar a matemática utilizada em situações realistas;

- desenvolver competências sociais de intervenção - tomar conhecimento dos métodos utilizados pelas instituições (públicas e privadas) que influenciam a vida dos cidadãos, ganhar capacidade para construir e criticar opções e utilizar o conhecimento para decidir sobre opções individuais;
- recordar técnicas e conceitos matemáticos já abordados no ensino básico;
- resolver problemas;
- desenvolver competências de cálculo e de selecção de ferramentas adequadas a cada problema: calculadora, computador e folha de cálculo;
- investigar; recolher dados e termos utilizados em diversas actividades humanas; analisar situações; escrever pequenos relatórios

Não se pretende que os estudantes realizem quaisquer actividades puramente matemáticas ou de matemática aplicada à economia ou finança. O que se pretende é colocar os estudantes perante preocupações bem reais da vida humana e social, cujos modelos podem ser considerados modelos financeiros simples.

Pretende-se também que os estudantes trabalhem individualmente e em grupo em interacção com empresas e instituições instaladas na comunidade local, desde agências bancárias até empresas ou delegações locais de empresas, procurando compreender situações e mecanismos que lhes são aplicáveis.

Os contextos em que vale a pena trabalhar devem ser, ao mesmo tempo, acessíveis e motivadores para os estudantes. Exemplos de contextos: impostos e reformas; actividade bancária – poupança e juros, diferentes tipos de contas e de empréstimos, investimentos; custo de vida, inflação; planos, contratos e assinaturas de telemóveis; situações de aluguer ou compra – vantagens e inconvenientes; seguros; etc.

O professor pode apresentar situações ou problemas para os quais os estudantes devam fazer simulações de acordo com as condições iniciais e cenários possíveis de evolução do mercado (dados oficiais devem ser sempre considerados), produzindo pareceres e propostas para apoiar decisão ou escolha.

Modelos de Grafos

A abordagem de alguns modelos de grafos pelos estudantes prossegue diversos objectivos:

- interpretar situações que possam ser modeladas por grafos;
- desenvolver competências sociais de intervenção - tomar conhecimento de métodos matemáticos próprios para encontrar soluções para problemas de gestão;
- criar competências algorítmicas simples; encontrar estratégias passo a passo para encontrar soluções possíveis;
- desenvolver competências para determinar o essencial de uma determinada situação de modo a desenhar esquemas apropriados a uma boa descrição;
- discutir problemas de optimização e viabilidade económica.

O professor pode apresentar situações que sejam modeladas por grafos de arestas (sistemas de distribuição - carteiros, etc; patrulhamento e controle de equipamentos sociais - parcometros, etc; sistemas de limpeza de ruas e de recolha de lixo, etc), introduzindo circuitos de Euler; procura de algoritmo para eulerização simples de circuitos; etc.

Também deve apresentar algumas situações que sejam modeladas por grafos de vértices, uma abordagem dos circuitos hamiltonianos e exemplo para introdução do Problemas do Caixeiro Viajante, trabalho com árvores para facilitar a contagem com vista a encontrar várias soluções comparáveis e procura de algoritmos próprios para obter soluções aceitáveis.

Está fora de questão uma introdução teórica sistematizada da teoria de Grafos, mas alguns dos raciocínios comuns aos teoremas e problemas dos circuitos de Euler e Hamilton não devem ser evitados.

Modelos de Probabilidade

Fenómenos aleatórios

Objectivos a atingir:

- Dar a entender aos alunos a diferença entre fenómeno determinístico e fenómeno aleatório.
- Alertar para as vantagens em encontrar modelos matemáticos apropriados para este tipo de fenómenos.

A existência de fenómenos que, por razões diversas, não são passíveis de ser descritos por leis determinísticas é a grande motivação para o aparecimento de modelos de probabilidade.

Neste módulo sugerimos que se comece por dar exemplos de fenómenos físicos determinísticos (queda de um grave, movimento de um pêndulo,...) em contraponto com fenómenos que se podem considerar aleatórios devido à grande complexidade das leis físicas subjacentes (movimento de um dado ao ser lançado, movimento das partículas numa nuvem de pó, temperatura máxima observada numa data futura,...).

Argumento de Simetria e Regra de Laplace.

Objectivos a atingir:

- Construir modelos de probabilidade para situações simples em que se admita como razoável o pressuposto de simetria ou equilíbrio.
- Calcular a probabilidade de alguns acontecimentos a partir dos modelos construídos.
- Construir modelos de probabilidade para situações um pouco mais complexas utilizando a regra do produto.

Pretende-se que os alunos sejam capazes de entender o argumento de simetria que está subjacente à atribuição de probabilidades a cada um dos resultados de certas experiências aleatórias (em exemplos ligados aos chamados jogos de azar é quase sempre possível encontrar um espaço de resultados para cujos elementos, à partida, não se tem razão para admitir que não tenham igual

probabilidade de ocorrer). Estes modelos muito simples irão permitir uma primeira abordagem à noção de acontecimento e à apresentação da Regra de Laplace. Experiências um pouco mais complexas poderão ser modeladas recorrendo à Regra do Produto.

Não se justifica, nesta disciplina, o estudo de modelos para situações que obriguem a utilizar técnicas de contagem que envolvam cálculo combinatório.

Este módulo deve ser finalizado com a apresentação e discussão com os alunos de alguns exemplos de fenómenos aleatórios para os quais não faça sentido utilizar argumentos de simetria.

Modelos de probabilidade em espaços finitos. Variáveis quantitativas. Função massa de probabilidade.

Objectivos a atingir:

- Apreender as propriedades básicas de uma função massa de probabilidade.
- Identificar acontecimentos em espaços finitos.
- Saber calcular as probabilidades de alguns acontecimentos utilizando propriedades da probabilidade.

Neste módulo irá ser feita a apresentação formal de modelo de probabilidade no caso muito particular em que o espaço de resultados seja finito e contido no conjunto dos números reais. A função *massa de probabilidade* ou *distribuição de probabilidade* é aqui o elemento básico de trabalho e o aluno deverá compreender a sua utilidade e conhecer bem as suas propriedades.

Definindo acontecimento neste caso particular como sendo qualquer dos subconjuntos do espaço de resultados o professor deverá aproveitar a oportunidade para ilustrar através de exemplos algumas das propriedades da probabilidade (probabilidade da união, do complementar e da diferença).

Probabilidade condicional. Árvore de probabilidades. Acontecimentos independentes.

Objectivos a atingir:

- Fazer compreender a noção de probabilidade condicional através de exemplos simples.
- Mostrar a utilidade das árvores de probabilidades como instrumento de organização de informação quando se está perante uma cadeia de experiências aleatórias ou de uma experiência aleatória constituída por várias fases.
- Ilustrar a forma de cálculo de probabilidades de acontecimentos utilizando uma árvore de probabilidades.
- Apresentar a definição de probabilidade condicional (tomando como base uma representação em diagrama de Venn de uma população classificada de forma cruzada segundo diversas categorias).
- Utilizar a definição de probabilidade condicional para formalizar a noção intuitiva de acontecimentos independentes. Apresentar a definição de acontecimentos independentes.

A noção de probabilidade condicional é, em geral, intuitiva para os alunos quando é aplicada no cálculo de probabilidades de cadeias de acontecimentos (ao retirar bolas de uma urna sucessivamente, sem reposição, a composição da urna altera-se e a probabilidade de se retirar certo tipo de bola depende dos tipos que saíram nas extracções anteriores). Deve-se pedir aos alunos que calculem a probabilidade de ocorrência de cadeias simples de acontecimentos aproveitando para lhes propor esquemas em árvore como forma de organização da informação disponível.

A partir de informação registada numa tabela de contingência os alunos deverão ser capazes de calcular correctamente probabilidades condicionais. A definição de probabilidade condicional poderá então ser apresentada começando por representar a informação da tabela num diagrama de *Venn*.

Probabilidade total. Regra de Bayes.

Objectivos a atingir:

- Introduzir os alunos nas técnicas Bayesianas, que se baseiam no seguinte princípio: começa-se por atribuir uma probabilidade a um acontecimento, tendo em consideração a informação disponível – probabilidade *à priori*; posteriormente, mediante nova informação entretanto adquirida, obtém-se uma nova probabilidade para esse acontecimento – probabilidade *à posteriori*. Esta pode ser entendida como uma correcção da probabilidade anteriormente atribuída.

Conhecendo as “probabilidades *a priori*” de um certo efeito A ser originado por cada uma de n “causas” possíveis e mutuamente exclusivas e conhecendo o modelo de probabilidade para essas “causas”, a regra de Bayes permite calcular a “probabilidade *à posteriori*” – após a ocorrência de A – de ter sido uma determinada, a causa que originou A. Os alunos deverão analisar e trabalhar muitos exemplos que lhes permitam não só clarificar a noção de causa/efeito como ilustrar a utilidade da *regra de Bayes*.

Valor médio e variância populacional.

Objectivos a atingir:

- Fazer a distinção entre valor médio (ou média) populacional e média amostral e também, de modo idêntico, para a variância e outras características já referidas no estudo descritivo de amostras.
- Alargar a noção de população como um conceito subjacente a um modelo de probabilidade.
- Apresentar de forma justificada as fórmulas de cálculo do valor médio e da variância para modelos quantitativos de espaço de resultados finito.

Este é o módulo fundamental para a compreensão dos tópicos que irão ser tratados no capítulo da inferência estatística. Mais precisamente, no capítulo da inferência estatística irão ser dados resultados que irão permitir fazer certas afirmações (probabilísticas) sobre características de interesse numa população tendo como base unicamente a informação constante numa pequena parte dessa população (amostra).

Deve ficar claro para os alunos que se utilizam termos análogos (média, variância, quantis) em três contextos distintos: amostra, população, modelo de probabilidade. É ainda de extrema importância fazer compreender de que modo é possível alargar o conceito de população de modo a que se possa falar de população subjacente a um modelo.

Espaços de resultados infinitos. Modelos discretos e modelos contínuos. Exemplos.

Objectivos a atingir:

- Mostrar o interesse em adoptar modelos com suporte não finito em situações onde o conjunto de resultados possíveis não seja conhecido na sua totalidade ou seja demasiado extenso.
- Calcular probabilidades de acontecimentos a partir de alguns modelos contínuos simples.

Através da discussão de alguns exemplos comuns (n^o de filhos das famílias portuguesas, alturas de todos os rapazes da escola, tempo de duração de um equipamento, etc.) alertar para as vantagens de se escolher um modelo de suporte infinito.

Os alunos deverão compreender que qualquer função cujo gráfico nunca passe abaixo do eixo das abcissas, e tal que a área compreendida entre o gráfico e esse eixo seja igual a uma unidade, identifica um modelo de probabilidade no conjunto dos números reais. Deverão ainda ser capazes de associar a probabilidade de um intervalo à área, determinada por esse intervalo, entre o gráfico e o eixo.

Modelo Normal.

Objectivos a atingir:

- Salientar a importância deste modelo referindo o *Teorema Limite Central*.
- Referir as principais características de um modelo *Normal* ou *Gaussiano*.
- Calcular probabilidades com base nesta família de modelos recorrendo ao uso de uma tabela da função de distribuição de uma *Normal Standard*.

O modelo Normal é um dos modelos mais utilizados em Estatística, devendo a sua relevância a um dos teoremas mais importantes da teoria da Probabilidade – o Teorema do Limite Central (TLC). Efectivamente, como veremos no módulo da Inferência Estatística, este teorema é a base de técnicas de inferência estatística largamente utilizadas, pois permite considerar as distribuições de amostragem, para a média e a proporção, como sendo aproximadamente normais. Para além disso muitas características de interesse ligadas a fenómenos naturais (altura de um indivíduo, perímetro do tronco de uma árvore, peso de um certo tipo de fruto, etc) podem ser encaradas como resultantes do contributo (de forma aditiva) de muitas variáveis. O TLC justifica a utilização do modelo Normal na modelação deste tipo de grandezas.

Introdução à Inferência Estatística

Parâmetro e estatística

Objectivos a atingir:

- Apresentar as ideias básicas de um tipo de raciocínio com que os alunos são confrontados pela primeira vez, em que a partir das propriedades estudadas num conjunto de dados, se procurarão tirar conclusões para um conjunto de dados mais vasto.

Neste módulo deve-se começar por recordar o que foi estudado no capítulo da produção e aquisição de dados, objecto de estudos estatísticos. Deve ser recordado que nos processos utilizados para produzir dados, foi realçada a necessidade de que estes devem ser baseados em métodos probabilísticos. Neste contexto destacam-se os métodos de amostragem que conduzem às amostras aleatórias, em que existe um mecanismo aleatório que faz com que um elemento da população faça parte da amostra, assim como as experimentações controladas, em que cada indivíduo é escolhido aleatoriamente para lhe ser atribuído um tratamento. As razões invocadas na altura prendem-se sobretudo com a recolha de amostras não enviesadas.

Neste módulo compreender-se-á todo o alcance desta necessidade de aleatorizar o processo de recolha de dados, pois veremos que esse facto nos vai permitir utilizar a teoria das probabilidades para descrever o comportamento do processo associado com a recolha e sumariação dos dados, um grande número de vezes.

Um dos objectivos que se tem ao recolher uma amostra de uma População que se pretende estudar é o de retirar conclusões sobre os parâmetros (características numéricas) dessa População. Assim, quando se pretende estimar (obter um valor aproximado) um determinado parâmetro, considera-se uma função conveniente que só dependa dos elementos da amostra — estatística. Deve-se chamar a atenção para o facto de se utilizar um tipo de raciocínio indutivo, em que se vai procurar tirar conclusões, indo do particular para o geral. Este tipo de raciocínio é contrário ao tipo de raciocínio matemático, essencialmente dedutivo.

Noção de estimativa pontual. Estimação de um valor médio e de uma proporção. Distribuição de amostragem.

Objectivos a atingir:

- Apresentar as ideias básicas de um processo de inferência estatística, em que se usam estatísticas para tomar decisões acerca de parâmetros.

À estatística utilizada para estimar um determinado parâmetro chamamos estimador do parâmetro. Quando se recolhe uma amostra, calcula-se a partir dos dados da amostra recolhida o valor do estimador, que dá uma estimativa do parâmetro. Se se recolher outra amostra da mesma População e da mesma dimensão, é natural obter uma estimativa para o parâmetro, diferente da primeira. Quantas amostras recolhermos, quantas as estimativas diferentes que podemos obter para o parâmetro. É importante chamar a atenção para que não podemos dizer qual das estimativas pontuais é melhor, já que não se conhece o valor do parâmetro a estimar.

Esta variabilidade apresentada pelas estimativas, é inerente à aleatoriedade da escolha da amostra e uma questão que se coloca é a de saber se o estimador que se está a considerar é um “bom”

estimador ou não, isto é, se por um lado as estimativas que produz são próximas umas das outras, ou apresentam uma grande variabilidade, e se por outro lado, no caso de apresentarem pequena variabilidade, se serão aproximadas do parâmetro que se pretende estimar.

A resposta a esta questão é dada construindo a distribuição de todos os valores apresentados pela estatística que se está a utilizar para estimar o parâmetro, para todas as amostras possíveis, da mesma dimensão. A esta distribuição dá-se o nome de distribuição de amostragem da estatística. Ao aleatorizar o processo de selecção das amostras, faz com que se possa utilizar a distribuição de amostragem de uma estatística para descrever o comportamento dessa estatística, quando se usa para estimar um determinado parâmetro. Se a média da distribuição de amostragem da estatística coincidir com o valor do parâmetro a estimar, dizemos que o estimador é não enviesado. Quanto à variabilidade apresentada pela distribuição de amostragem da estatística, quanto menor ela for, mais perto do parâmetro estão as estimativas obtidas a partir da estatística considerada.

A compreensão das diferenças entre parâmetro e estatística e do que é uma distribuição de amostragem, é a base dos processos de Inferência Estatística. Os parâmetros que se procuram estimar são: o valor médio – medida de localização do centro da distribuição dos valores assumidos por uma dada variável, cujo estimador será a média de uma amostra de observações dessa variável; a proporção ou frequência relativa com que se verifica uma determinada característica na População, cujo estimador será a proporção de vezes que essa característica se verifica nos elementos da amostra recolhida dessa População.

Construção de estimativas intervalares ou intervalos de confiança para o valor médio e para a proporção.

Objectivos a atingir:

- Mostrar toda a potencialidade da Estatística, que nos permite tirar conclusões e tomar decisões, indo do particular para o geral, quantificando o erro cometido nessa tomada de decisões.

Sendo a noção de distribuição de amostragem a base da maior parte das técnicas de inferência estatística, é importante exemplificar o seu processo de construção, podendo para começar, considerar um dos casos mais simples que é o de estimar um valor médio.

Nesta altura deve-se também chamar a atenção e exemplificar o papel desempenhado pela dimensão da amostra, para a precisão dos resultados, na medida em que diminui a variabilidade apresentada pela distribuição de amostragem.

Começa-se aqui a introduzir o conceito de confiança estatística, como resultado do estudo da distribuição de amostragem.

Uma vez trabalhado e entendido o conceito de distribuição de amostragem, deve-se recordar um resultado teórico, já enunciado no módulo da Probabilidade, com a maior relevância para a Estatística, conhecido pelo Teorema do Limite Central. Este teorema legitima, de certa maneira, a grande utilização do modelo Normal como modelo de variáveis que resultem de medições de grandezas naturais como a altura, peso, etc, que se admitem serem o resultado de um grande número de contribuições cumulativas. Estando a média e a proporção neste caso, este resultado poupa o trabalho de estar a obter as suas distribuições de amostragem, desde que as amostras tenham dimensão suficientemente grande, e o processo utilizado para as recolher tenha sido aleatório.

O processo da construção de distribuições de amostragem estende-se à proporção amostral, estatística utilizada para estimar o parâmetro proporção (probabilidade) de elementos da População que verificam uma determinada propriedade. O processo a seguir para o estudo da proporção pode ser o de considerar esta como um caso particular de uma média quando os elementos que têm a propriedade em estudo são representados por 1, enquanto que os outros são representados por 0.

Finalmente introduzir-se-á o conceito de intervalo de confiança tanto para o valor médio da característica em estudo da População, como para a proporção com que uma determinada característica está presente nos elementos da População. Deverá ser chamada a atenção para a interpretação correcta do que é que se entende por confiança, ao considerar um intervalo de confiança. Considera-se importante que os alunos interpretem a amplitude do intervalo, como a maior ou menor precisão, isto é, como a margem de erro dos resultados obtidos quando se considera uma determinada confiança e uma determinada dimensão para a amostra. Deverá ser realçado o facto de a amplitude do intervalo de confiança depender da variabilidade da estatística utilizada.

O conceito de intervalo de confiança deverá ser trabalhado de forma a que os alunos fiquem aptos a interpretar resultados veiculados pela comunicação social tais como: “o resultado da sondagem é de 76% com uma margem de erro de 3 pontos percentuais”.

Os exemplos relacionados com as sondagens em tempo de campanhas eleitorais ou relativamente a outros problemas têm muito interesse, pois muito facilmente se encontram exemplos na comunicação social. Aliás, deve ser incentivada a leitura dos jornais e a recolha de assuntos que enunciem resultados objecto de tratamento estatístico.

Deverão também ser trabalhados vários exemplos que permitam descobrir o efeito de se utilizarem amostras de maior ou menor dimensão na determinação dos intervalos de confiança, quando a dimensão da População é muito superior à dimensão das amostras com que se trabalha. Sugere-se que se apresente a seguinte regra: Se a dimensão da População for muito superior à dimensão da amostra (por exemplo 100 vezes superior), a variabilidade da distribuição de amostragem é a mesma para qualquer dimensão da População. Esta regra traduz uma característica importante dos processos de amostragem, na medida em que traduz o facto de as distribuições de amostragem não dependerem (muito) da dimensão da População.

Finalmente deve-se chamar a atenção para o facto de que se as amostras recolhidas forem enviesadas, os intervalos de confiança também virão enviesados, não tendo portanto qualquer utilidade.

4 Bibliografia

1. DEPARTAMENTO DE EDUCAÇÃO BÁSICA(1999). *A Matemática na Educação Básica*. Lisboa: ME-DEB.
2. MARTINS, M. E. G. (coord.), MONTEIRO, C., VIANA, J. P. e TURKMAN, M. A. (1997). *Estatística: Matemática – 10º ano de escolaridade*. Lisboa: ME – DES.
PONTE, J. P.(coord.), BOAVIDA, A. M., GRAÇA, M. e ABRANTES, P. (1997) *Didáctica: Matemática – ensino secundário*. Lisboa: ME – DES.
PONTE, J. P.(coord.), BRUNHEIRO, L., ABRANTES, P. e BASTOS, R. (1998) *Projectos Educativos: Matemática – ensino secundário*. Lisboa: ME – DES.

Estas brochuras, editadas pelo Departamento do Ensino Secundário para apoiar o Ajustamento dos Programas de Matemática (1997), contêm numerosas sugestões relevantes para qualquer programa de Matemática, pelo que são de consulta indispensável.

3. SEBASTIÃO E SILVA, J.(1975-78). *Compêndio de Matemática* (5 vols) Lisboa: MEC – GEP.
SEBASTIÃO E SILVA, J.(1975-77). *Guia para a utilização do Compêndio de Matemática* (3 vols). Lisboa: MEC – GEP.

Estes livros são o ponto de referência de muitos aspectos deste programa e constituem material base indispensável para o trabalho dos professores. As "Normas Gerais" contidas no 1º volume do Guia devem ser objecto de reflexão por parte dos professores. Na primeira dessas Normas pode ler-se: "A modernização do ensino da Matemática terá de ser feita não só quanto a programas, mas também quanto a métodos de ensino. O professor deve abandonar, tanto quanto possível, o método expositivo tradicional, em que o papel dos estudantes é quase cem por cento passivo, e procurar, pelo contrário, seguir o método activo, estabelecendo diálogo com os estudantes e estimulando a imaginação destes, de modo a conduzi-los, sempre que possível, à redescoberta".

4. CARAÇA, BENTO DE JESUS. *Conceitos Fundamentais da Matemática Col.* Ciência Aberta, Vol. 98 (2ª ed., 1998). Lisboa: Gradiva

Neste livro, Bento de Jesus Caraça (1901-1948) mostra como a Matemática é "um organismo vivo, impregnado de condição humana, com as suas forças e as suas fraquezas e subordinado às grandes necessidades do homem na sua luta pelo entendimento e pela libertação" ao pôr em evidência como os fundamentos da Matemática "mergulham tanto como os de outro qualquer ramo da Ciência, na vida real". Trata-se sem dúvida de um dos melhores livros de Matemática escritos em língua portuguesa onde se pode assistir maravilhado à evolução dos conceitos de número, de função e de continuidade, através de numerosas discussões, reflexões, notas históricas e teoremas muitas vezes com demonstrações pouco vulgares.

5. VELOSO, EDUARDO(1998). *Geometria - Temas actuais – Materiais para professores Col.* "Desenvolvimento curricular no Ensino Secundário", vol. 11. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional

Este texto é uma ferramenta indispensável para qualquer pessoa que queira ensinar seriamente Geometria em Portugal. É uma obra que cobre inúmeros temas de Geometria elementar (e menos elementar) e contém um manancial de sugestões de trabalho para abordar os diferentes aspectos da Geometria. São de salientar os muitos exemplos de História da Matemática que ajudam a perceber a importância que a Geometria desempenhou na evolução da Matemática, ao mesmo tempo que fornecem excelentes exemplos para uso na sala de aula ou como proposta de trabalho para clubes de matemática ou ainda para estudantes mais interessados. É altamente recomendável a leitura do capítulo I que foca a evolução do ensino da geometria em Portugal e no resto do mundo e ajuda a perceber a origem das dificuldades actuais com o ensino da Geometria. A tecnologia é usada de forma "natural" para "resolver - ou suplementar a resolução - de problemas, proceder a investigações, verificar conjecturas, etc." Este livro tem já um "prolongamento" na Internet no endereço

<http://www.iie.min-edu.pt/iie/edicoes/livros/cdces/cdces11/index.html> .

6. STEEN, L.A.(coord). *For all practical purposes – introduction to contemporary mathematics* COMAP(1999). New York: W.H.Freeman and co.

Este é um livro de texto testado com êxito em vários países, destinado a alunos do ensino secundário que terminam aqui a sua formação matemática. Contém explicações detalhadas (com numerosas referências históricas) e exercícios relativos, nomeadamente, a eleições, partilha equilibrada, grafos e estatística.

7. MALKEVITCH, J. (1999). *The mathematical theory of elections*. COMAP, Lexington: COMAP

Este é um pequeno livro didáctico com uma introdução muito simples à teoria matemática das eleições. Espera-se que esteja brevemente disponível em língua portuguesa.

8. COMAP.(1999) *Geometry and its applications-Graph Models*. COMAP, Lexington: COMAP

Este é um pequeno livro didáctico com uma introdução muito simples à teoria de grafos. Espera-se que esteja brevemente disponível em língua portuguesa.

9. PISANI, R. PURVES, R., ADHIKARI, A. (1991). *Statistics*. W. W. Norton Company.
10. GRAÇA MARTINS, M. E. (1998). *Introdução às Probabilidades e à Estatística*. Sociedade Portuguesa de Estatística.
11. GRAÇA MARTINS, M. E. , CERVEIRA, A. (1998). *Introdução às Probabilidades e à Estatística*. Universidade Aberta.
12. IMAN, R. e CONOVER, W. (1983). *A Modern Approach to Statistics*. John Wiley Sons.
13. MANN, P. (1995). *Introductory Statistics*. John Wiley Sons.
14. MENDENHALL. W. BEAVER, R. (1994) *Introduction to Probability and Statistics*. Duxbury Press.
15. MOORE, D. (1997). *Statistics – Concepts and Controversies*. Freeman.

16. MOORE, D. (1995). *The Basic Practice of Statistics*. Freeman.
17. MOORE, D., MCCABE, G. (1993). *Introduction to The Basic Practice of Statistics*. Freeman.
18. MURTEIRA, B. (1993). *Análise Exploratória de dados – Estatística Descritiva*. McGraw-Hill de Portugal.
19. NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (1981). *Teaching Statistics and Probability. 1981 Yearbook*. Reston, EUA.
20. PARKS, H. et al. (1997). *Mathematics in Life, Society the World*. Prentice-Hall, Inc.
21. PARZEN, E. (1969). *Modern Probability Theory and Its Applications*. New York:Wiley.
22. ROSSMAN, A. (1996). *Workshop Statistics: discovery with data*. Springer-Verlag New York, Inc.
23. RUNYON, R. et al. (1996). *Fundamentals of Behavioral Statistics*. McGraw-Hill Companies, Inc.
24. SIEGEL, A. (1988). *Statistics and Data Analysis*. John Wiley Sons.
25. TANNENBAUM, P. et al. (1998). *Excursions in Modern Mathematics*. Prentice-Hall, Inc.
26. THIESSEN, H. (1997). *Measuring the Real World*. John Wiley Sons.
27. STEWART, IAN (1996). *Os Problemas da Matemática*. Ciência Aberta, Vol. 72, 2ª ed. Lisboa: Gradiva

O que é a Matemática? Segundo Ian Stewart a Matemática é sobre ideias não sobre símbolos e contas que são apenas ferramentas do ofício. O objectivo da matemática é perceber como diferentes ideias se relacionam entre si, pondo de lado o acessório e penetrando no âmago do problema. A Matemática não se preocupa apenas com a obtenção da resposta certa, mas sobretudo com o perceber de como uma resposta é de todo possível e porque tem determinada forma. Ainda segundo Ian Stewart há, pelo menos, cinco fontes distintas de ideias matemáticas: número, ordenação, forma, movimento e acaso. Os problemas são a força motriz da Matemática, sendo os exemplos outra fonte importante de inspiração da Matemática, conforme assinala o mesmo autor.

28. ABRANTES, P.; LEAL, L. C.; PONTE, J. P. ET AL. (1996) *Investigar para aprender matemática*. Grupo "Matemática para todos-investigações na sala de aula", Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

ABRANTES, P.; PONTE, J. P. ET AL. (1999) *Investigações matemáticas na aula e no currículo*. Grupo "Matemática para todos-investigações na sala de aula", Lisboa: Associação de Professores de Matemática

Estes livros reúnem um conjunto de artigos elaborados no âmbito do Projecto "Matemática para Todos" à volta da incorporação, nas aulas e nos currículos de matemática, de actividades de natureza investigativa realizadas pelos estudantes. Segundo os organizadores dos volumes, "as actividades de investigação podem ser inseridas, naturalmente, em qualquer parte do currículo, representando na verdade um tipo de trabalho que tem

um carácter transversal na disciplina de Matemática”. De acordo com os organizadores dos livros ”o trabalho realizado por este projecto confirma as potencialidades da actividade investigativa para a aprendizagem da Matemática e dá muitas pistas sobre o modo como ela se pode inserir nas actividades das escolas”.

29. VIEIRA, A.; VELOSO, E.; LAGARTO, M. J. (org.).(1997) *Relevância da História no Ensino da Matemática*. História da Matemática - Cadernos do GTHEM - 1 APM. Lisboa: APM.

Este livro contém a tradução de três textos essenciais para quem queira reflectir nas vantagens de uso da História da Matemática na sala de aula: ”Porquê estudar História da Matemática” de Dirk Struik, ”A utilização da História em Educação Matemática” de John Fauvel e ”Quer dar significado ao que ensina? Tente a História da Matemática” de Frank Swetz.

30. STRUIK, D. *História Concisa das Matemáticas*. Lisboa: Gradiva.

Este livro é uma referência clássica na História da Matemática, recomendando-se a segunda edição por conter um anexo relativo à História da Matemática em Portugal.

31. VALADARES, J.; GRAÇA, M. (1998) *Avaliando ... para melhorar a aprendizagem* Lisboa: Plátano.

Este livro, de muito interesse para qualquer professor de Matemática, analisa diversos aspectos teóricos e práticos da avaliação, sem esquecer uma perspectiva histórica. Contém numerosos exemplos de construção de variados tipos de itens de avaliação (e não só para a Matemática). Analisa com bastante pormenor as diferentes fases do processo de avaliação e as características fundamentais dos instrumentos de avaliação (como a validade e a fidelidade).

32. PONTE, J.P.; CANAVARRO, A. P. (1997). *Matemática e Novas Tecnologias* (Universidade Aberta, Vol 128). Lisboa: UA.

Este livro fornece uma excelente panorâmica da utilização das novas tecnologias na Matemática e na aula de Matemática. É apresentada uma perspectiva histórica da utilização das tecnologias na matemática sendo discutidos bastantes exemplos em várias áreas curriculares (números, funções, geometria, estatística e probabilidades) e analisados com algum detalhe vários tipos de programas de computador (jogos, folhas de cálculo, linguagem LOGO, programas de geometria dinâmica). É certamente uma obra de muito interesse para qualquer professor de Matemática pela ampla perspectiva que oferece.

33. GRUPO DE TRABALHO T3-PORTUGAL APM (1999). *Modelação no Ensino da Matemática - Calculadora, CBL e CBR*. Lisboa: APM.

Esta publicação contém actividades de modelação matemática para utilização na sala de aula; umas actividades são facilmente realizadas com a ajuda de uma calculadora gráfica e as outras necessitam da utilização de sensores para recolha de dados experimentais; são incluídos comentários e resoluções das actividades. Os conceitos matemáticos envolvidos nas actividades incluem funções definidas por ramos, regressão, optimização, funções exponenciais e trigonométricas e função quadrática. A publicação

contém um texto introdutório sobre o processo de modelação matemática e a ligação entre a modelação matemática e a modelação no ensino da matemática; o texto situa ainda a modelação matemática no contexto dos actuais programas do ensino secundário.

34. GRUPO DE TRABALHO T3-PORTUGAL APM (1999) *Estatística e Calculadoras Gráficas*. Lisboa: APM

Esta publicação contém actividades sobre Estatística, redigidas tendo em vista uma possível utilização na sala de aula; contém ainda comentários sobre as actividades e propostas de resolução das mesmas.

35. INTERNET: REAJUSTAMENTO DO PROGRAMA DE MATEMÁTICA

<http://www.terravista.pt/AguaAlto/5783>

Esta página da Internet irá contendo indicações de apoio a este programa, como materiais de apoio e listas de endereços com interesse para professores e estudantes.

36. INTERNET: ASSOCIAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

<http://www.apm.pt/>

INTERNET: SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

<http://www.spm.pt/~spm>

Estas páginas contêm a indicação dos projectos que as respectivas associações desenvolvem e ligações para outras páginas de interesse.

37. INTERNET: PROF. MIGUEL DE GUZMÁN OZÁMIZ

<http://www.mat.ucm.es/deptos/am/guzman/guzman.htm>

Esta página é um manancial inesgotável de informação relacionada com a Matemática o seu ensino e a sua história. Salientamos o curso "Laboratório de Matemática", as actividades de Geometria com o DERIVE e os textos de divulgação da Matemática.

38. Centro de Competência Nónio século XXI "Softciências"

INTERNET: MOCHO E MOCHO SÁBIO

<http://softciencias.ccg.pt/mocho/>

Esta página contém um índice de páginas sobre Matemática em língua portuguesa; o Mocho Sábio contém páginas especialmente recomendadas pela sua qualidade científica e pedagógica.

39. Instituto Nacional de Estatística e Escola Secundária Tomaz Pelayo

INTERNET: PROJECTO ALEA

<http://alea-estp.ine.pt/>

Esta página contém documentos destinados a apoiar o ensino da Estatística a nível do ensino secundário. Além de uma série de páginas com esclarecimentos sobre temas científicos, tem páginas com temas de actualidade relacionados com a Estatística, jogos didácticos, um forum de discussão e uma Galeria Virtual com trabalhos de escolas.

40. INTERNET: INICIAÇÃO À TEORIA DE GRAFOS

<http://membros.aveiro-digital.net/adam/grafos/>

Esta página contém um texto introdutório e vários exercícios que serviram de base a dois cursos de formação via Internet do ex-projecto TRENDS.

41. INTERNET: FINANCIAL MATHEMATICS IN CONTEXT - TEACHING AND ASSESSMENT

<http://education.qld.gov.au/tal/kla/finance/teaching.htm>

Peter Cooper

Esta página contém vários documentos de apoio ao trabalho dos professores no ensino elementar de vários tópicos de matemática financeira.