

Didática da Análise

2015/2016

Exame de Recurso – 20/1/2016

Duração: 2h 30m

Calculadoras gráficas autorizadas. Textos não autorizados.

Parte Teórica

1- “Um trabalho matemático é, para quem o sabe ler, o mesmo que um trecho musical para quem o sabe ouvir, um quadro para quem o sabe ver, uma ode para quem a sabe sentir.”

Francisco Gomes Teixeira, “O poder e a beleza das Matemáticas”, *Coimbra*, 1925

- a) explique o significado deste extracto;
- b) explique a importância pedagógica do desenvolvimento do gosto pela Matemática nos alunos.

2- Em 12 de Dezembro de 2014 completaram-se 100 anos que nasceu em Mértola o matemático e pedagogo português José Sebastião e Silva, um dos maiores, se não mesmo o maior vulto português na área da Matemática e do Ensino da Matemática no século XX. Sebastião e Silva tinha ideias muito precisas sobre para que serve o Ensino da Matemática. Dizia:

A meu ver são principalmente **o sentido crítico e a autonomia mental** as qualidades que um professor de matemática se deve esforçar por desenvolver nos seus alunos.

Os alunos não precisam, em geral, de ser investigadores, mas **precisam de ter espírito de investigação**. Intuição, experiência, lógica indutiva, lógica dedutiva - todos estes meios se alternam constantemente na investigação científica, numa cadeia sem fim em que é difícil destrinçar uns dos outros.

Um dos objectivos fundamentais da educação é, sem dúvida, criar no aluno hábitos e automatismos úteis, como, por exemplo, os automatismos de leitura, de escrita e de cálculo. Mas trata-se aí, manifestamente, de *meios*, não de *fins*.

E criticava o ensino tradicional:

O que é preciso é não confundir *cultura* com erudição e sobretudo com o *enciclopedismo desconexo*, imensa manta de retalhos mal cerzidos, que vão desde as guerras púnicas até ao sistema nervoso da mosca.

É esse, a bem dizer, o tipo de cultura que tende a produzir o ensino tradicional, baseado num sistema de exames que só permite apreciar memorizações e automatismos superficiais, mais ou menos próximos do psitacismo.

- a) explique o que pretende dizer Sebastião e Silva com estas afirmações;
- b) Indique, de forma breve, quais os objetivos gerais dos actuais programas e metas curriculares oficiais para o ensino da Matemática no Ensino Básico e Secundário e compare-os com as ideias de Sebastião e Silva para os objetivos gerais do Ensino da Matemática.

3- A seguir são apresentados extractos de dois livros, contendo a definição de função contínua:

“Uma função $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ diz-se contínua no ponto $a \in X$ quando é possível tornar $f(x)$ arbitrariamente próximo de $f(a)$ desde que se tome x suficientemente próximo de a . Em termos precisos, diremos que $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ é *contínua* no ponto $a \in X$ quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, pudermos achar $\delta > 0$ tal que $x \in X$ e $|x - a| < \delta$ impliquem $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.”

Elon Lages Lima
"Curso de Análise – volume 1" – quinta edição
IMPA, Rio de Janeiro, 1987.

“Diz-se que $y(x)$ é **contínua no ponto a** do seu domínio quando forem, nesse ponto, satisfeitas as seguintes condições:

- a) Existe e é finito o valor da função no ponto a ;
- b) Existe e é finito o limite da função no ponto a ;
- c) Esse limite é igual ao valor da função no ponto a :

$$\lim_{x \rightarrow a} y(x) = y(a).”$$

Bento de Jesus Caraça
"Conceitos Fundamentais da Matemática"
Gradiva, Lisboa, 1998.

- a) Indique, justificando devidamente, se as duas definições apresentadas são equivalentes;
- b) apresente uma possível terceira definição de função contínua, não equivalente a qualquer das duas anteriores, justificando devidamente.

4- A seguir são apresentados extractos de dois livros, contendo a definição de limite de função:

“Definição de limite de uma função *O simbolismo*

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = A \quad \left[\text{ou } f(x) \rightarrow A \text{ quando } x \rightarrow p \right]$$

significa que para toda a vizinhança $N_1(A)$ existe uma vizinhança $N_2(p)$ tal que

$$f(x) \in N_1(A) \quad \text{sempre que } x \in N_2(p) \quad \text{e} \quad x \neq p$$

Definição de vizinhança de um ponto *Qualquer intervalo aberto contendo um ponto p como seu ponto médio diz-se uma vizinhança de p .”*

Tom M. Apostol
"Cálculo – volume 1"
Editora Reverté Ltda, Rio de Janeiro, 1979.

“A. LIMITE NUM PONTO DE \mathbf{R} . Consideremos uma função real $f(x)$ definida num conjunto $X \subset \mathbf{R}$ (função real de variável real e seja a um ponto de \mathbf{R} não exterior a X).
1.2.1. DEF. Diz-se que um número real b é limite de $f(x)$ no ponto a ou quando x tende para a e escreve-se

$$b = \lim_{x \rightarrow a} f(x),$$

se, para cada número $\delta > 0$, existe um número $\varepsilon > 0$ tal que se tem

$$|f(x) - b| < \delta,$$

para todos os $x \in X$ tais que $|x - a| < \varepsilon$.”

J. Santos Guerreiro
Curso de Matemáticas Gerais, II volume
Livraria Escolar Editora, Lisboa, 1973

- c) Indique, justificando devidamente, se as duas definições apresentadas são equivalentes;
- d) apresente uma possível terceira definição de limite de função, não equivalente a qualquer das duas anteriores, justificando devidamente.