
FEUC / Departamento de Matemática
FEUC/FCTUC

Matemática I

Licenciatura em Gestão

8 de janeiro de 2016

Segunda Frequência

Duração: 2h

Sem consulta de apontamentos ou textos

Tabela de primitivas autorizada

Calculadora científica ou gráfica autorizada

1. As vendas V (em milhares de unidades) de um produto sazonal são dadas pelo modelo

$$V(t) = 74.5 + 43.75 \sin \frac{\pi t}{6}$$

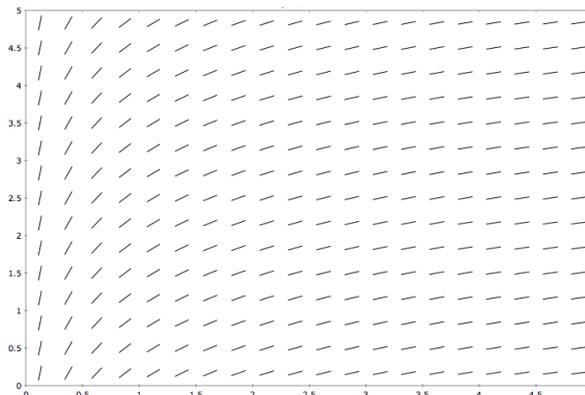
onde t é o tempo em meses, sendo que $t = 0$ corresponde ao início de janeiro. Determine uma aproximação da média de vendas em cada um dos seguintes períodos:

- (a) o primeiro trimestre
- (b) o segundo trimestre
- (c) todo o ano

2. Resolva o problema de valor inicial:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+y}{x^2} \quad \wedge \quad y(1) = 0.$$

3. Use o seguinte campo de direções da equação diferencial $y' = \frac{1}{x}$ para descrever o comportamento da solução da equação diferencial que satisfaz a condição inicial $y(1) = 1$. Deve referir em particular o que se poderá dizer sobre a monotonia e sobre o limite de $y(x)$ quando x tende para $+\infty$.



4. Calcule dois (e só dois) dos seguintes integrais:

$$\int_0^1 \frac{1}{2 + e^{-x}} dx \quad \int_1^2 \frac{x^2 + x + 1}{x^2(x+1)} dx \quad \int_0^1 \frac{x}{(x+1)^4} dx$$

5. Determine a natureza do integral

$$\int_0^{+\infty} e^{-|x-1|} dx.$$

6. Faça um esboço, e a seguir **calcule a área**, da região

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y^2 \text{ e } x^2 + y^2 \leq 2\}.$$

7. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 8 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$. Calcule:

(i) $C = \frac{1}{2}(A + A^T)$;

(ii) $D = b^T A b$.

8. Sendo $N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$,

calcule o determinante do produto de N por B , $\det(NB)$, e diga, justificando, se a matriz NB admite inversa.

9. Considere o sistema linear:

$$\begin{cases} 2y + z = 1 \\ x + 2y + 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

(a) Escreva o sistema na forma matricial e resolva-o pelo método de eliminação de Gauss;

(b) Justifique que a matriz do sistema é invertível e calcule a sua matriz inversa.

10. Usando a **matriz de codificação**

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

decifre a seguinte mensagem: **OQ ?OETI!E**

Terá de começar por converter a mensagem que pretende descodificar numa matriz de números para a poder multiplicar pela matriz inversa da matriz de codificação. Note que se obtiver um número não inteiro ou negativo na matriz descodificada deverá adicionar 29 ao número correspondente na matriz original de modo a obter no resultado um número inteiro positivo. Recorde que a conversão de letras em números é feita de acordo com a seguinte **matriz de conversão**:

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F & G & H & I & J & K & L \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ M & N & O & P & Q & R & S & T & U & V & W & X & Y & Z & (\text{espaco}) & ? & ! \\ 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 28 & 29 \end{pmatrix}$$