FEUC / Departamento de Matemática
FEUC/FCTUC

Matemática I

Licenciatura em Gestão

4 de janeiro de 2018 — Segunda Frequência

Duração: 2h
Sem consulta de apontamentos ou textos
Tabela de primitivas autorizada
Calculadora científica ou gráfica autorizada (qualquer modelo)

1. O custo unitário $c(t)$ de produção de um certo produto industrial durante um período de 2 anos evolui de acordo com o modelo

$$c(t) = 0.005t^2 + 0.1t + 102.3\,,\ 0 \leq t \leq 24$$

onde t é expresso em meses. Calcule uma aproximação do custo médio unitário nesse período de 2 anos.

2. Escreva os integrais que nos permitem obter o valor da área da região

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y \leq \sqrt{1-x^2} \ \text{ e } \ x \geq y \ \text{ e } y \geq 0\right\}$$

e, sem calcular os integrais, indique o valor da área.
(Recorde que a área de um círculo de raio r é πr^2).

3. Indique, justificando, se a seguinte igualdade é verdadeira

$$\int_0^1 \sinh\left(x^3\right) dx = -\int_{-1}^0 \sinh\left(x^3\right) dx.$$

Pode justificar usando um argumento geométrico ou recorrendo à fórmula para integração por substituição fazendo a mudança de variável $x = -t$.

4. Calcule dois (e só dois) dos seguintes integrais:

$$\int_1^{e^2} (1 + \ln x - x)\, dx; \qquad \int_{-2}^{2} \frac{1}{(x+2)^{\frac{1}{2}}} dx; \qquad \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^3}\, dx.$$

5. (a) Diga, justificando, se o integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x+1} dx$ representa a área de uma região no plano e, em caso afirmativo, faça um esboço da região.

   (b) Recorrendo aos critérios de comparação, estude a natureza do seguinte integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x + \ln x} dx.$$

6. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \; D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escolha uma maneira de as ordenar, de tal modo que o produto das quatro matrizes esteja definido e calcule esse produto.

7. Considere as matrizes reais $A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$ é um parâmetro.

   (a) Calcule o determinante de A e, usando esse resultado, indique o determinante de B.

   (b) Diga, justificando, para que valores de α as matrizes A e B são não-singulares.

   (c) Fazendo $\alpha = -1$, diga para que valores de $\beta \in \mathbb{R}$ o sistema $Ax = \begin{bmatrix} 3 & \beta & 0 \end{bmatrix}^T$ é possível e escreva o seu conjunto-solução.

   (d) Faça $\alpha = 0$.

      i. Sendo S uma matriz de ordem 3 e tal que $det(S) = 2017$, calcule $det(2S^T AS^{-1})$.

      ii. Determine a inversa de A e verifique se $A^{-1} = A^2 - 3A + 3I_3$, sendo I_3 a matriz identidade de ordem 3.