

Duração: 2h

Sem consulta de apontamentos ou textos

Tabela de primitivas autorizada

Calculadora científica ou gráfica (com ou sem CAS) autorizada

1. A tabela (incompleta) que se segue (IRS 2015) permite definir uma função, $I(x)$, que a cada x euros de rendimento coletável associa o valor em euros, $I(x)$, do IRS a pagar. Por exemplo, $I(10000) = 10000 \times 0,285 - 980 = 1870$.

Rendimento coletável (em euros)	Continente	
	Taxa(%)	Parcela a abater
Até 7.000	14,50	—
+ 7.000 a 20.000	28,50	980
+ 20.000 a 40.000	37,00	c ?
+ 40.000 a 80.000	45,00	5,880
+ 80.000	48,00	8,280

- (a) Sabendo que a função I é contínua, complete a tabela indicando o valor de c .
(b) Faça um esboço do gráfico da derivada de I .

2. Considere a função real de variável real definida por $f(x) = \arcsen\left(\frac{1}{x^2} - 1\right)$.

- (a) Determine o domínio de f .
(b) f tem inversa? Justifique.

3. Calcule $\cos(\arccos 1)$ e $\arccos(\cos 3\pi)$.

4. Calcule

(a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2)}{\ln(x+1)}$ (b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{\ln x}}$

5. Considere a função definida por

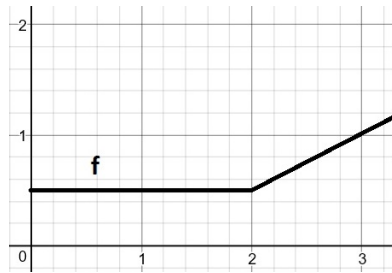
$$f(x) = \begin{cases} \sin x \cos x & \text{se } -\pi \leq x \leq 0 \\ \ln(x+1) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

- (a) Diga, justificando, se f tem derivada em $x = 0$.
(b) Determine, caso existam, os extremos locais de f .

6. Calcule as primitivas de **duas** (e apenas duas) das seguintes três funções:

(a) $\ln^3 x + \ln^2 x + \ln x$ (b) $x \ln x$ (c) $\frac{x}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)}$

7. Em baixo está o gráfico de uma função f . Considere a função definida por $G(x) = \int_0^x f(t) dt$.



- (a) Determine $G(1)$, $G(2)$ e $G(3)$.
 (b) Faça um esboço do gráfico da função G .
8. (a) Esboce a região definida por $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \text{ e } 0 \leq y \leq x\}$ e, **utilizando integrais, calcule a sua área**.
 (b) Utilizando a definição de derivada explique porque é que o perímetro da circunferência, $2\pi R$, é igual à derivada da sua área, πR^2 .

9. Indique a natureza (convergente ou divergente) e, se for possível, **calcule** os seguintes integrais impróprios:

(a) $\int_0^1 \frac{1}{x^{2017}} dx$ (b) $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$

10. Considere o sistema linear:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ x + y + 2z = 5 \\ 2x + z = 6 \end{cases}$$

- (a) Escreva o sistema na forma matricial e resolva-o pelo método de eliminação de Gauss;
 (b) Justifique que a matriz do sistema é invertível e calcule a sua inversa.

11. Calcule o determinante da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$