FEUC / Departamento de Matemática
FEUC/FCTUC

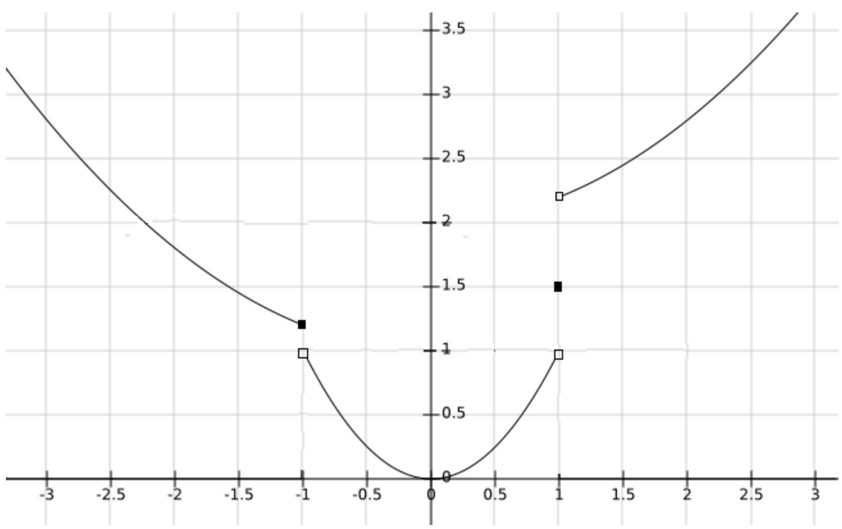
Matemática I

Licenciatura em Gestão

30 de janeiro de 2018 Exame de Recurso

Duração: 2h
Sem consulta de apontamentos ou textos
Tabela de primitivas autorizada
Calculadora científica ou gráfica autorizada (qualquer modelo)

1. O desenho seguinte representa o gráfico de uma função f. Esboce o gráfico de f'.



2. Considere a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\ln\left(x+1\right)\right) & \text{se} \quad x > 0 \\ e^{\sinh x} & \text{se} \quad x \leq 0 \end{cases}.$$

   (a) Estude a continuidade de f e determine as assíntotas ao gráfico de f.

   (b) Defina a função derivada de f, f', e determine os pontos críticos (estacionários) de f.

3. Sendo C uma constante real arbitrária, verifique que:

   (a) $\displaystyle\int \tan^3 x\, dx = \frac{1}{2}\tan^2 x + \ln|\cos x| + C$;

   (b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\, dx = \ln|x + \sqrt{4+x^2}| + C$.

4. Faça um esboço da região

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 \leq 1 \ \wedge \ x^2 + y^2 \leq 7 \ \wedge \ x \geq 0\}$$

e escreva (mas não calcule) os integrais que nos permitem obter o valor da área dessa região.

5. Considere a região limitada por $y = \sinh x$, $y = \cosh x$, pelo eixo dos YY e pela reta de equação $x = \alpha$, onde $\alpha > 0$. Determine α de modo que a área da região seja igual a 0,9.

6. Suponha que $G(t)$ é a quantidade de um vírus A num paciente infectado em função do tempo. Há dois medicamentos para o tratamento do vírus, um azul e um vermelho. A quantidade de vírus num paciente que tome o comprimido azul satisfaz a seguinte equação

$$500 \times \frac{dG}{dt} = -200 \times G(t) + G(t)^2,$$

e num paciente que tome o comprimido vermelho satisfaz a equação

$$300 \times \frac{dG}{dt} = -100 \times G(t) + G(t)^2.$$

Sabendo que a probabilidade de sobrevivência de um paciente com uma quantidade de vírus acima de 500 é quase nula, se estivesse infectado mas não soubesse a quantidade de vírus, que comprimido escolheria tomar e porquê?

7. Determine a natureza do integral impróprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x} dx.$$

8. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine:

(a) a segunda coluna de AB;

(b) a primeira linha de BA;

(c) a terceira linha de A^2;

(d) o elemento na posição (3,2) de $A^2 - AB + 3I_3$.

9. Para $\beta \in \mathbb{R}$, considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \\ -2 & \beta & \beta \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ \beta \end{bmatrix}$.

   (a) Calcule o determinante de A e diga para que valores de β a matriz A singular.

   (b) Classifique, quanto ao número de soluções, o sistema $Ax = b$ em função do parâmetro β.

   (c) Fazendo $\beta = 0$, calcule a inversa de A.

   (d) Fazendo $\beta = 1$, determine o conjunto-solução do sistema $Ax = b$.

10. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega \end{bmatrix}$, com α, β, γ e ω números reais não nulos.

   (a) Calcule A^3.

   (b) Determine a matriz X que verifica $AX = 2I_4$.

   (c) Para B e C matrizes 4×4 tais que $det(B) = \beta$ e $det(C) = \gamma^4$, calcule $det(\gamma B^T A^3 C^{-1})$.