

S
E
M
I
A
L
N
O
Á
R
I
O
D
I
A
R
I
O

Notas Sobre o Rateio de Hamilton

Geometria e Combinatória das Células Eleitorais *

João Gouveia †

1º ano de Matemática

Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra

jsgouveia@netcabo.pt

E. Marques de Sá ‡

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

emsa@mat.uc.pt

Palavras Chave

eleições, politopos, vértices, faces, simetrias, cubos martelados

Resumo

O conjunto dos resultados eleitorais que conduzem a uma certa e pre-determinada composição de um parlamento chama-se *célula eleitoral*. No caso do processo mais natural de rateio, tais células são poliedros convexos. De cada célula determinamos as faces e o reticulado que elas constituem; determinamos a dimensão e a ‘forma’ de cada face, as simetrias e outras características geométricas. Para poupar espaço, não apresentamos demonstrações.

1 Introdução

Estas notas surgiram a propósito de um dos problemas do famoso livro *Mathematical Snapshots*, de H. Steinhaus [8]. A questão pode colocar-se assim: num processo eleitoral, três partidos, numerados 1, 2, 3, disputam ℓ lugares num parlamento; face aos resultados eleitorais, denotados por V_1, V_2, V_3 , expressos em número de votos por partido — V_i votos no partido i — coloca-se

* Trabalho feito no âmbito do Programa *Novos Talentos em Matemática* da Fundação Calouste Gulbenkian, em 2000-2002.

† Como aluno do 1º ano do DMUC, apresentou este tema, em 2001, no *Seminário Diagonal* do DMUC e no *Encontro Nacional dos Novos Talentos da Matemática*, Luso 2001. O tema foi também apresentado no *Seminário Diagonal* do IST, em 2002.

‡ Professor do DMUC. Apoios da Fundação Calouste Gulbenkian, Fundação para a Ciência e a Tecnologia, e Fundação Luso-Americana para o Desenvolvimento.

o problema dito do *rateio*: quantos dos ℓ lugares devem atribuir-se a cada partido, de modo a que nenhum se sinta prejudicado?

O partido i , face à percentagem de votos que obteve (que, feitas as contas, é $\frac{V_i}{V_1+V_2+V_3}$) espera poder ocupar uma correspondente fracção dos ℓ lugares, ou seja, espera colocar no parlamento x_i candidatos seus, onde

$$x_i := \frac{V_i}{V_1+V_2+V_3} \ell.$$

Mas este número, a que chamamos *resultado eleitoral do partido i* , não é, em geral, inteiro; o partido i reclamará, pelo menos, um número de deputados igual à parte inteira do seu resultado x_i . Não se concebendo, por enquanto, fatar um deputado como um queijo limiano, o problema do rateio acaba por ser o de recompor as partes fraccionárias dos x_i — chamados *resíduos* dos x_i — em um ou dois deputados inteiros e atribuí-los a um ou dois dos três partidos. De entre os muitos algoritmos para determinar quais os partidos beneficiados, vamos adoptar o mais *natural*, o chamado *método de Hamilton*,¹ que premeia com um deputado extra os partidos com os maiores resíduos. Assim, no final do rateio obtém-se uma composição parlamentar de, digamos, a_1, a_2, a_3 lugares para os partidos concorrentes. Note-se que os a_i são *inteiros* de soma ℓ , igual à dos x_i .

O problema dos *Snapshots* é, então, o seguinte: fixada certa composição parlamentar, (a_1, a_2, a_3) , descreva-se a correspondente *célula*, isto é, o conjunto dos resultados eleitorais (x_1, x_2, x_3) que conduzem, pelo rateio de Hamilton, a essa composição do parlamento. Steinhaus dá uma representação ‘triangular’ plana dos resultados eleitorais, como na figura 1, onde cada (x_1, x_2, x_3) se representa por um ponto R de um triângulo equilátero de altura ℓ . Logo a seguir afirma, em estilo ‘instantâneo’, serem hexagonais as ditas células que, no seu conjunto, formam o conhecido mosaico plano dos favos de mel. Na figura 2 esboçamos o caso de eleições para um parlamento com 5 deputados; ao resultado que determinou o ponto R corresponde uma composição parlamentar de 2, 1 e 2 deputados para os partidos que tiveram as percentagens eleitorais x_1, x_2 e x_3 da figura 1. Repare-se que o mosaico de hexágonos regulares é truncado pelo domínio triangular, sobrevivendo,

¹ Alexander Hamilton [1755(57?)-1804] foi figura de primeiro plano na revolução americana, no processo de independência e na elaboração da Constituição dos EUA. O seu método foi o primeiro adoptado na determinação do número de representantes por estado, no Congresso. Em 1880 foi detectado, teoricamente, o ‘paradoxo do Alabama’: se o total ℓ de lugares no Congresso passasse de 299 para 300, o rateio de Hamilton determinaria a perda de um representante do Alabama! O paradoxo ocorrera já, no concreto, em 1870: Rhode Island passou de dois representantes a um só, como consequência de o parlamento ter sido alargado de um total de 270 para 280 representantes. Estes e outros paradoxos levaram ao abandono do método em 1901, nos EUA. Veja-se [1, 2] para mais pormenores.

na periferia do triângulo, metades e sextavos de hexágonos. Por exemplo, o sextavo localizado no topo do triângulo corresponde à situação em que o partido 1 ocupa todos os lugares do parlamento.

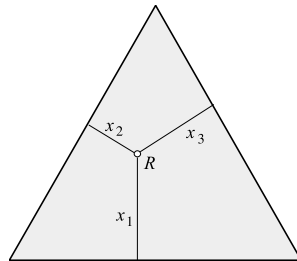


figura 1

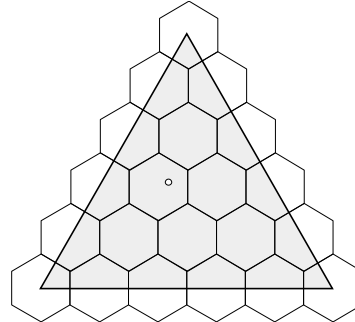


figura 2

O ponto R cairá sobre a fronteira de uma célula hexagonal sempre que ocorram certos tipos de empates nos resíduos dos x_i 's. Por exemplo, quando a soma dos resíduos for 1 e os dois partidos de maiores resíduos tenham resíduos iguais, ou quando a soma dos resíduos for 2 e os dois partidos de menores resíduos tenham resíduos iguais; os vértices dos hexágonos correspondem aos casos em que os três partidos têm todos o mesmo resíduo positivo. Em situações dessas ocorrem bloqueios no preenchimento das vagas parlamentares que, no real concreto, só podem resolver-se com legislação adequada, por vezes pouco clara.² As eleições que mais frequentemente ocorrem são as que conduzem a resultados eleitorais pertencentes ao interior de uma célula, “longe” das fronteiras; são, no rateio, muito menos animadas que as outras, pois determinam distribuições parlamentares inequívocas ditadas pelas coordenadas do centro da única célula atingida.

Mais adiante [8, p.210], os *Snapshots* discutem com brevidade o caso de 4 partidos, modelando o problema em coordenadas ‘tetraédricas’: num tetraedro de referência, regular, de altura ℓ , escolhe-se uma face para cada partido; o resultado eleitoral (x_1, x_2, x_3, x_4) identifica-se com o ponto R que dista x_1 da face do partido 1, x_2 da face do partido 2, etc. Os *Snapshots* sugerem depois, *à la minute*, uma identificação algo imprecisa das células eleitorais: “*a tiling composed of regular tetrahedra and regular octahedra*”. De facto, como veremos mais adiante, as células são dodecaedros rômnicos pavimentando o espaço tridimensional de um modo simples de imaginar: pense na pavimentação do espaço com cubos sólidos todos iguais empacotados do modo óbvio; pinte-os de branco e negro ‘alternadamente’, de modo que cada branco fique em contacto facial com seis vizinhos negros e cada negro com seis vi-

² Recorde-se o recente caso do Estado da Florida, para selecção dos ‘grandes eleitores’ nas presidenciais americanas. . .

zinhos brancos, como na figura 3; decomponha cada cubo branco em seis pirâmides de base quadrada com vértices no centro do cubo. Se a cada cubo negro colarmos as seis pirâmides brancas que o cercam, uma em cada face, o sólido obtido é um dodecaedro rômbo, como ilustra a figura 4.

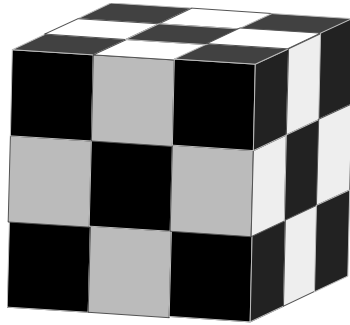


figura 3

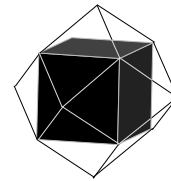


figura 4

Depois destas operações, a pavimentação cúbica transforma-se na pavimentação dodecaédrica que referimos, em que os dodecaedros são as células eleitorais. Nas figuras 5 e 6 mostramos as posições relativas do tetraedro de referência e das células eleitorais, no caso de um parlamento com 5 lugares:

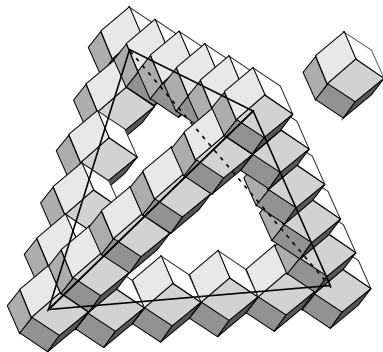


figura 5

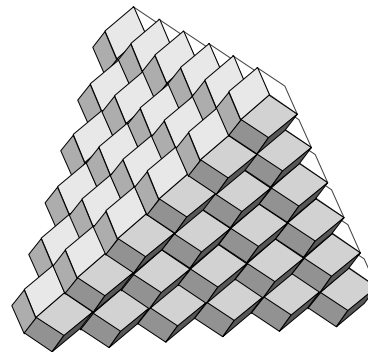


figura 6

Na figura da esquerda, o tetraedro de referência está sendo coberto por ‘pequenos’ dodecaedros rômbo justapostos (note-se que cada vértice do tetraedro é centro de um dodecaedro); a figura 6 mostra o tetraedro completamente coberto por células eleitorais. Se seccionarmos este conglomerado de dodecaedros pelo plano de qualquer uma das faces do tetraedro de referência, obtemos o triângulo com favo de mel da figura 2, onde cada hexágono é uma secção plana de um dodecaedro.

Compreendido o caso de 4 partidos, a questão que naturalmente se coloca

é descrever as células eleitorais no caso geral, com p partidos em confronto. Acontece, sem grande surpresa, que as células são politopos convexos de dimensão $p - 1$, todos iguais entre si, dotados de notáveis propriedades de simetria. A descrição de tais criaturas consistiu, para nós, em identificar as suas faces, rotulá-las, contá-las, determinar as dimensões e os grupos de isometrias de cada uma.³ A forma de cada face própria depende apenas da sua dimensão δ : é um δ -cubo martelado, politopo que resulta de um δ -cubo por compressão ao longo de uma diagonal. O dodecaedro rômbo ilustra bem este facto: as facetas são rombos todos iguais e as arestas são do mesmo comprimento.

A descrição das células por meio de desigualdades lineares (Teorema 1) coloca-nos em terreno conhecido; em particular, mostra tratar-se de células de Voronoi particulares, frequentemente tratadas na literatura (veja-se, e.g., [3] e [4]). No entanto, não encontramos traços das descrições da sua estrutura extremal e do seu tipo combinatório, assuntos que aqui tratamos exhaustivamente, sem demonstrações, para que o texto pese o menos possível.

Dos dois autores, um orientou e outro foi orientado, mas os resultados foram obtidos por ambos, no meio de grande gozo e discussão, por nós partilhados no decorrer do primeiro ano do milénio.

2 Resultados Eleitorais

Temos então p partidos que disputam ℓ lugares de um parlamento. O total V dos votos apurados, abstenções eliminadas, decompõe-se em p parcelas, $V = V_1 + \dots + V_p$, em que V_i é o número de votos no partido i , $i = 1, \dots, p$. Por definição, o *resultado do partido i* é o real $x_i := \ell V_i/V$; o vector $x = (x_1, \dots, x_p)$ é o *resultado das eleições*. Cada x_i pode escrever-se na forma

$$x_i = n_i + r_i,$$

onde n_i é a parte inteira de x_i e r_i é a sua parte fraccionária, $0 \leq r_i < 1$, a que chamaremos *resíduo de x_i* . A soma dos r_i 's é um inteiro, que sempre denotaremos por s , tal que $0 \leq s < p$.

O rateio faz-se de acordo com o método de Hamilton, dos maiores resíduos, conforme explicámos atrás: cada n_i é o número de lugares imediatamente atribuídos ao partido i ; nestas condições, s é o número sobranter de lugares ainda não atribuídos aos partidos; para distribuir esses lugares sobranter,

³ Os conceitos básicos sobre convexos, politopos, faces, etc, podem ver-se nos livros [4]-[6]. O prefixo ' δ ', como em ' δ -politopo', ' δ -cubo', etc, designa a dimensão do objecto em causa. As *facet*as de um δ -politopo são as suas faces de dimensão $\delta - 1$. Veja-se mais na secção 4.

ordenam-se os partidos por ordem não crescente dos resíduos e atribui-se mais um lugar a cada um dos s melhores partidos nessa ordenação. Eventuais empates nos resíduos podem implicar o bloqueio deste processo de distribuição dos s lugares sobrantes; nesses casos diremos que o resultado x é *indeterminado*; no caso oposto, o resultado diz-se *determinado*. Claro que x é determinado se, e somente se, o s -ésimo maior resíduo é estritamente superior ao $(s + 1)$ -ésimo maior resíduo.

Cada resultado x é um elemento de \mathbb{R}^p , de coordenadas racionais de soma ℓ . Mais ainda: fixada a lista de eleitores, há apenas um número finito de resultados eleitorais possíveis. Eliminamos este incómodo aceitando como resultados eleitorais exequíveis *todos* os p -uplos reais, de soma ℓ , mesmo os que têm coordenadas irracionais. Tudo vai passar-se num hiperplano de dimensão $p - 1$, nomeadamente o dos x 's de soma ℓ , que denotamos por Σ_ℓ .

As Coordenadas ‘Simpliciais’

Fazemos aqui uma breve pausa para generalizar as coordenadas triangulares e tetraédricas dos *Snapshots*. E para concluir que isso não vai ser preciso! A generalização natural dos conceitos de triângulo equilátero e de tetraedro regular é o de *símplice regular*. Trata-se, na dimensão $p - 1$ (a que nos interessa) de um politopo convexo que tem por vértices p pontos distintos e equidistantes uns dos outros. É muito aborrecido determinar p pontos nessas condições em \mathbb{R}^{p-1} , mas em \mathbb{R}^p a coisa é trivial: para cada λ positivo, o conjunto Δ_λ constituído pelos $y \in \mathbb{R}^p$ não negativos de soma λ é um símplice regular de vértices $(\lambda, 0, \dots, 0)$, $(0, \lambda, \dots, 0)$, \dots , $(0, 0, \dots, \lambda)$. Note-se que o conjunto dos resultados eleitorais admissíveis constitui o símplice Δ_ℓ .

Para cada k , o conjunto Φ_k dos $y \in \Delta_\lambda$ com coordenada y_k nula é uma faceta de Δ_λ . Vamos tomar $\lambda := \ell \sqrt{1 - 1/p}$. O nosso símplice tem, então, altura ℓ — e é naturalmente ele que nos vai servir como *símplice de referência*. Tal como na figura 1, cada resultado eleitoral admissível, $x \in \Delta_\ell$, representa-se pelo ponto R de Δ_λ que está à distância x_k da faceta Φ_k , para $k = 1, \dots, p$. Feitas as contas, algo cansativas, R é o vector $\sqrt{1 - 1/p} \cdot x$.

Quer dizer, a transformação $x \mapsto R$ é uma homotetia, contractiva, de Δ_ℓ sobre Δ_λ ! Assim, tudo o que vai passar-se daqui para a frente poderá processar-se analiticamente em Δ_ℓ ou em Δ_λ , com os resultados eleitorais x ou com os seus representantes R . Os tratamentos são equivalentes e conduzem às mesmas conclusões. Preferimos trabalhar com os resultados x , em Δ_ℓ , para fugir ao incómodo factor $\sqrt{1 - 1/p}$.

TEOREMA 1. *Dado um resultado x , de soma ℓ , o método de Hamilton determina a distribuição $a = (a_1, \dots, a_p)$ dos ℓ lugares no parlamento, se e só se, para todos os $i \neq j$ vale*

$$(a_i - x_i) + (x_j - a_j) < 1.$$

Estas $p^2 - p$ inequações e a identidade $x_1 + \dots + x_p = \ell$ determinam um convexo, aberto na topologia de Σ_ℓ . Preferimos trabalhar com o fecho deste conjunto, a que chamamos *célula-a* e denotamos por \mathfrak{C}_a . Claro que $x \in \mathfrak{C}_a$ sse x tem soma ℓ e, para $i \neq j$,

$$(a_i - x_i) + (x_j - a_j) \leq 1.$$

Esta descrição da célula \mathfrak{C}_a permite levantar a restrição de os a_i 's e x_i 's serem não negativos, reduzindo tudo a mera manipulação formal. Podemos eliminar do problema partidos e deputados e trabalhar com parlamentos virtuais onde certos partidos participam com um número negativo de representantes. Efectivamente, vamos supor que o nosso parlamento tem zero lugares! Isto corresponde a fazer uma translação do hiperplano Σ_ℓ de modo a que se transforme no subespaço Σ_0 que lhe é paralelo. A situação é multiplemente delirante: há partidos com cotas positivas de presença e outros com cotas negativas que, no cômputo geral, constituem uma assembleia sem deputados, o que acaba por não fazer grande diferença para um matemático.

Em \mathbb{R}^p , as células são conjuntos fronteiros, sem pontos interiores. Mais interessante é a topologia de Σ_0 , relativamente à qual cada célula tem uma fronteira e um interior não vazios, a que se chama fronteira e o interior *relativos* (ver [6] sobre a topologia relativa de um convexo).

A célula \mathfrak{C}_0 irá desempenhar um papel central no processo por estar, como facilmente se constata, centrada na origem e, por isso, ter uma representação matemática mais simples do que as outras: trata-se, de facto, do poliedro convexo de Σ_0 descrito pelas $p^2 - p$ desigualdades

$$(1) \quad x_j \leq 1 + x_i.$$

Outra vantagem de \mathfrak{C}_0 é poder caracterizar-se de modo simples através de resíduos, do seguinte modo:

TEOREMA 2. *Um p -uplo x , de soma nula, pertence a \mathfrak{C}_0 se e só se é possível reordenar as suas coordenadas de modo a obter um vector da forma*

$$(2) \quad (r_1, r_2, \dots, r_p) - \underbrace{(1, \dots, 1)}_s, 0, \dots, 0,$$

onde s denota o número de coordenadas negativas de x e os r_i 's são reais tais que $1 > r_1 \geq \dots \geq r_p \geq 0$. A representação (2) é unicamente determinada por x .

*Um ponto x de \mathfrak{C}_0 pertence ao interior relativo de \mathfrak{C}_0 sse $r_s > r_{s+1}$;
Um ponto x de \mathfrak{C}_0 pertence à fronteira relativa de \mathfrak{C}_0 sse $r_s = r_{s+1}$.*

Facilmente se demonstra que a intersecção de duas células distintas tem interior relativo vazio, que Σ_0 é a união de todas as suas células e que toda a célula se obtém por translação de \mathfrak{C}_0 , mais precisamente

$$\mathfrak{C}_a = a + \mathfrak{C}_0.$$

Estamos, pois, perante um mosaico de Σ_0 , obtido por justaposição de ladrilhos todos iguais a \mathfrak{C}_0 , dispostos de forma regular, centrados nos pontos inteiros de Σ_0 . A partir de (1) é fácil mostrar que, para cada resultado x (determinado) o processo de rateio de Hamilton selecciona, de entre os pontos inteiros a de soma ℓ , o mais próximo de x na métrica euclidiana (veja-se [7, p.248]). Dito de outro modo, em nomenclatura consagrada, as células de Σ_0 constituem o mosaico das *células de Voronoi* determinado pela ‘rede’ dos pontos inteiros de Σ_0 (e.g., [3, 4]).

A figura 7 ilustra, na dimensão 2, uma propriedade muito curiosa das células de Voronoi determinadas pelo rateio de Hamilton. Rebatido o plano Σ_0 sobre o plano do papel, os seus pontos inteiros são os nodos de uma ‘rede triangular’. Imaginemos pequenos círculos de borracha, todos iguais, centrados nos nodos da rede (a). Façamos aumentar os raios desses círculos, mantendo-os iguais entre si, até se tocarem (b) e passarem a deformar-se (c), em competição pelo espaço disponível. No limite obtemos o mosaico (d) do favo de mel.

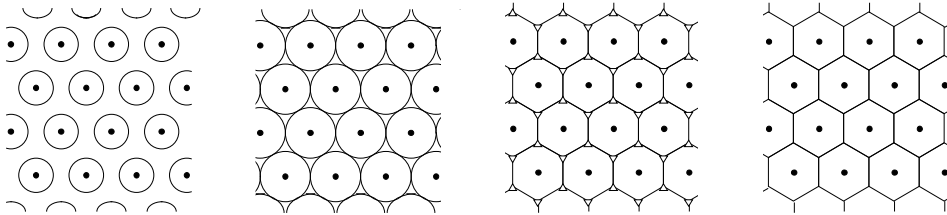


figura 7a

figura 7b

figura 7c

figura 7d

O mesmo se pode imaginar no caso de 4 partidos: colocam-se balões de borracha, todos iguais, centrados nos centros dos cubos negros da figura 3 (que se supõe estendida a todo o espaço); sopram-se os balões, mantendo-os iguais, até que se toquem e a seguir se deformem, atingindo, no limite, a forma de dodecaedros rômnicos.

3 Os Vértices de \mathfrak{C}_0

No caso $p = 3$ não é difícil determinar os vértices do hexágono \mathfrak{C}_0 . No favo de mel, os vértices são aqueles resultados eleitorais indeterminados em que o

equilíbrio dos resíduos é total: uma pequena perturbação poderá fazer cair o resultado para uma de *três* células vizinhas, e qualquer dos três partidos poderá ver eleito um ou nenhum deputado extra. Trata-se, pois, dos resultados em que os partidos obtêm resíduos todos iguais. Em \mathfrak{C}_0 , há 6 trios (x_1, x_2, x_3) nessas condições, que são as 6 linhas das matrizes:

$$\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

Não é fácil estender este tipo de argumentação a \mathbb{R}^p , mas colhe-se a conjectura de que *os vértices de \mathfrak{C}_0 são os seus pontos de resíduos todos iguais*, que se revelou correcta. Vamos mostrar porquê. Por definição, $v \in \mathfrak{C}_0$ um vértice de \mathfrak{C}_0 se, para qualquer vector ‘perturbador’ $\varepsilon \neq 0$, uma das perturbações $v + \varepsilon$ ou $v - \varepsilon$ não pertence a \mathfrak{C}_0 . Se v tem dois resíduos distintos, consegue-se construir um ε tal que: $v + \varepsilon$ e $v - \varepsilon$ ambos pertencem a \mathfrak{C}_0 , o que prova a conjectura feita.

Por exemplo, no caso $p = 4$, \mathfrak{C}_0 tem 14 vértices, que são as linhas das matrizes

$$\begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}.$$

Observadas com cuidado as regularidades, podemos dizer que \mathfrak{C}_0 tem por vértices os p -uplos

$$\left(\frac{s}{p}, \frac{s}{p}, \dots, \frac{s}{p}\right) - \underbrace{(1, \dots, 1)}_s, 0, \dots, 0), \quad \text{para } 0 < s < p,$$

e todos os que destes se obtêm permutando coordenadas. Dito de um modo mais elegante: cada subconjunto S de $\{1, \dots, p\}$, próprio e não vazio, determina um vértice, denotado \mathcal{V}_S ou $\mathcal{V}(S)$, de coordenada i dada por

$$[\mathcal{V}_S]_i := \begin{cases} s/p - 1, & \text{se } i \in S \\ s/p, & \text{se } i \notin S, \end{cases}$$

onde s denota o cardinal de S ; e todo o vértice de \mathfrak{C}_0 é deste tipo. Há, pois, um total de $2^p - 2$ vértices. Uma propriedade muito interessante dos vértices é a seguinte, onde S e T são subconjuntos arbitrários de $\{1, \dots, p\}$:

$$(3) \quad \mathcal{V}_S + \mathcal{V}_T = \mathcal{V}_{S \cup T} + \mathcal{V}_{S \cap T}$$

onde se convencionou $\mathcal{V}_S = 0$ no caso de [o complementar de] S ser vazio.

4 As Faces de \mathfrak{C}_0

Sempre que nos seja dado um convexo C , imediatamente ocorre o problema da determinação das suas faces. Dizemos que um subconjunto F de C é uma *face* de C , se F é convexo e se todo o segmento aberto $]a, b[$ contido em C que intersecta F está totalmente contido em F .

Quando C é um politopo, as suas faces são, também, politopos. Por exemplo, as faces de um politopo de \mathbb{R}^3 são os vértices, as arestas, as ‘faces’ propriamente ditas, de forma poligonal, e ainda o conjunto vazio e o próprio politopo.

Em geral, as faces das faces de C são faces de C . Em particular, cada face tem os seus vértices, que são vértices de C . O problema da identificação das faces ficará resolvido se determinarmos quais são os conjuntos de vértices de C que são vértices de uma mesma face. Por exemplo, as faces de dimensão 1 são as ‘arestas’ de C , colocando-se, então, a seguinte questão subsidiária: quais os pares de vértices de C que estão ligados por uma aresta de C ?

Se C é um poliedro delimitado por uma família finita de hiperplanos (quer dizer, C é a intersecção de semi-espacos delimitados por esses hiperplanos) as suas faces próprias são os conjuntos que resultam da intersecção de C com alguns dos hiperplanos dessa família. Tendo o nosso politopo \mathfrak{C}_0 como hiperplanos limítrofes Σ_0 e os hiperplanos \mathcal{H}_{ij} , de equação $x_j = 1 + x_i$, para $i \neq j$, as suas faces são os conjuntos da forma

$$(4) \quad \mathfrak{F} := \mathcal{H}_{i_1 j_1} \cap \cdots \cap \mathcal{H}_{i_t j_t} \cap \mathfrak{C}_0.$$

Esta face é própria sse $t \geq 1$. Dada \mathfrak{F} , definamos os conjuntos de índices

$$I := \{i_1, \dots, i_t\} \quad \text{e} \quad J := \{j_1, \dots, j_t\}.$$

Podemos provar que \mathcal{V}_S é vértice de \mathfrak{F} sse $S \supseteq I$ e $S \cap J = \emptyset$. Isto implica que a face em causa apenas depende dos conjuntos I e J , pelo que a denotaremos por \mathfrak{F}_{IJ} , ou $\mathfrak{F}(I, J)$.

TEOREMA 3. *A face \mathfrak{F}_{IJ} é própria e não vazia se e só se I e J são disjuntos e não vazios; ela tem dimensão $\delta := p - |I| - |J|$; e tem 2^δ vértices.*

$\mathfrak{F}_{I'J'} \subseteq \mathfrak{F}_{IJ}$ se e só se: $I' \supseteq I$ e $J' \supseteq J$. $(I, J) \mapsto \mathfrak{F}_{IJ}$ é uma bijecção do conjunto dos pares (I, J) , com I, J não vazios e disjuntos, sobre o das faces próprias e não vazias de \mathfrak{C}_0 .

A principal dificuldade da demonstração está no cálculo da dimensão de \mathfrak{F}_{IJ} , por envolver representações (4) com t mínimo, ou seja, com hiperplanos linearmente independentes. A segunda parte do teorema, que descreve o reticulado das faces de \mathfrak{C}_0 , depende desse cálculo dimensional. O teorema

permite uma contagem simples do número de faces próprias e não vazias de \mathfrak{C}_0 , que é $3^p - 2^{p+1} + 1$, e do número de faces próprias de dimensão δ que é:

$$(5) \quad f_\delta = \binom{p}{\delta} [2^{p-\delta} - 2].$$

De entre as consequências do teorema, destacamos a determinação das arestas e do grau de cada vértice, que é o número de arestas nele incidentes.

COROLÁRIO 4. *Dois vértices, \mathcal{V}_S e \mathcal{V}_T , são os extremos de uma mesma aresta, se e só se um dos conjuntos, S ou T , resulta do outro por adjunção de um índice. Há $2p$ vértices de grau $p - 1$, nomeadamente $\mathcal{V}_{\{1\}}, \dots, \mathcal{V}_{\{p\}}$ e os seus opostos; todos os outros têm grau p .*

5 A Forma das Faces Próprias

Nesta secção, a notação X^c designa o complementar de X relativamente a $\{1, \dots, p\}$. Vamos apresentar características geométricas das faces próprias de \mathfrak{C}_0 , que conduzirão, em particular, à determinação da sua forma. Dito em poucas palavras, tudo se dirige à demonstração do seguinte resultado:

As faces de certa dimensão δ são geometricamente iguais entre si. Cada uma delas é um δ -cubo ‘martelado’, mais precisamente, resulta de um δ -cubo de aresta 1 por uma compressão afim ao longo de uma diagonal interna, com factor de compressão $\sqrt{1 - \delta/p}$.

5.1 As Faces Próprias são Paraleletohos

Fixemos uma face própria \mathfrak{F}_{IJ} . Para cada K disjunto de $I \cup J$, define-se $K^* := (I \cup J \cup K)^c$; os pares $\{\mathcal{V}(I \cup K), \mathcal{V}(I \cup K^*)\}$ constituem uma partição dos vértices de \mathfrak{F}_{IJ} . Pode provar-se que os segmentos

$$(6) \quad [\mathcal{V}(I \cup K), \mathcal{V}(I \cup K^*)]$$

têm o mesmo ponto médio (independente de K), que é $c_{IJ} := [\mathcal{V}_I - \mathcal{V}_J]/2$. Isto prova que a face \mathfrak{F}_{IJ} tem c_{IJ} por centro de simetria. Por essa razão, diremos que (6) é *diagonal interna* da face \mathfrak{F}_{IJ} ; cada diagonal passa pelo centro c_{IJ} e une vértices opostos da face. O comprimento do segmento (6) é $\sqrt{\delta - (\delta - 2|K|)^2/p}$. Tomando K vazio, obtemos $\sqrt{\delta(1 - \delta/p)}$ como mínimo comprimento das diagonais de uma face de dimensão δ e a menor diagonal interna é a que une os vértices \mathcal{V}_I e \mathcal{V}_{J^c} .

As facetas de \mathfrak{F}_{IJ} são as faces de uma das seguintes formas: $\mathfrak{F}(I \cup \{t\}, J)$ e $\mathfrak{F}(I, J \cup \{t\})$, onde t percorre o complementar de $I \cup J$. Para cada t ,

estas duas facetas são mutuamente opostas a respeito do centro de simetria da face \mathfrak{F}_{IJ} , cada uma delas é translação da outra, e a face \mathfrak{F}_{IJ} é um tronco de prisma que tem as ditas facetas por bases e $\mathcal{V}_{\{t\}}$ por vector gerador. Isto pode obter-se por uso sistemático das fórmulas (3). Em símbolos:

$$(7) \quad \mathfrak{F}(I, J \cup \{t\}) = \mathcal{V}_{\{t\}} + \mathfrak{F}(I \cup \{t\}, J).$$

$$(8) \quad \mathfrak{F}_{IJ} = \mathfrak{F}(I \cup \{t\}, J) + [0, \mathcal{V}_{\{t\}}]$$

Recorde-se que um δ -*paraleleto* é um convexo que resulta da soma conjuntista de δ segmentos, $[0, v_1], \dots, [0, v_\delta]$, com extremos linearmente independentes, seguida de eventual translação. Acrescentando às fórmulas (7)-(8) um argumento indutivo, podemos concluir que \mathfrak{F}_{IJ} é um δ -*paraleleto*. Mais explicitamente, para qualquer K contido no complementar de $I \cup J$, \mathfrak{F}_{IJ} é, após translação, a soma das arestas de \mathfrak{F}_{IJ} emergentes do vértice $\mathcal{V}(I \cup K)$. Em particular, para K vazio, temos:

$$(9) \quad \mathfrak{F}_{IJ} = \mathcal{V}_I + \sum_{t \in (I \cup J)^c} [0, \mathcal{V}_{\{t\}}].$$

5.2 Alongamento de uma Face

Fixada uma face \mathfrak{F}_{IJ} vamos considerar o *alongamento- θ segundo a sua diagonal menor* $[\mathcal{V}_I, \mathcal{V}_{J^c}]$. Trata-se, por definição, da aplicação linear que fixa todos os vectores ortogonais a essa diagonal e que transforma o vector $D := \mathcal{V}_{J^c} - \mathcal{V}_I$ em θD , onde θ é uma constante ≥ 1 . Dado um $x \in \mathbb{R}^p$, a imagem x' pelo dito alongamento é dada por:

$$x' = x + (\theta - 1) \left(\frac{x \cdot D}{\|D\|^2} \right) D.$$

Vamos escolher para θ o valor $1/\sqrt{1 - \delta/p}$. Com cálculos algo complicados podemos provar o teorema seguinte que estabelece a forma da face em estudo:

TEOREMA 5. *O alongamento- θ transforma os $\mathcal{V}_{\{t\}}$ que ocorrem em (9) num sistema ortonormado. Portanto, \mathfrak{F}_{IJ} transforma-se num δ -cubo de lado 1.*

Note-se que cada face \mathfrak{F}_{IJ} pode alongar-se de muitos modos para se transformar num cubo unitário. Escolhe-se uma qualquer face \mathfrak{F}_{RS} que contenha \mathfrak{F}_{IJ} e alonga-se \mathbb{R}^p ao longo da diagonal menor de \mathfrak{F}_{RS} , com parâmetro $\theta = 1/\sqrt{1 - \epsilon/p}$, onde ϵ é a dimensão de \mathfrak{F}_{RS} . \mathfrak{F}_{RS} transforma-se num ϵ -cubo unitário, pelo que todas as suas faces, incluída \mathfrak{F}_{IJ} , se transformam em cubos unitários de dimensões correspondentes.

6 Os Automorfismos de \mathfrak{C}_0

Um *automorfismo* de \mathfrak{C}_0 é um operador linear de Σ_0 que transforma \mathfrak{C}_0 em si mesmo. O conjunto de todos os automorfismos de \mathfrak{C}_0 constitui um grupo que denotamos por $\text{Aut } \mathfrak{C}_0$.

Por exemplo, como o sistema de desigualdades (1) é invariante por permutação das coordenadas x_1, \dots, x_p , cada permutação determina e pode identificar-se com um automorfismo de \mathfrak{C}_0 ; por razão análoga, a simetrização, $x \mapsto -x$, é um automorfismo de \mathfrak{C}_0 . Pode provar-se que

TEOREMA 6. *Aut \mathfrak{C}_0 é constituído pelas aplicações de permutação e pelas suas simétricas.*

Vamos apresentar um esqueleto de demonstração. O Corolário 4 diz que $\pm\mathcal{V}_{\{1\}}, \dots, \pm\mathcal{V}_{\{p\}}$ são os vértices de grau $p - 1$ de \mathfrak{C}_0 . Designemos por \mathbb{H} o invólucro convexo destes vértices. De entre eles, os p que vão com sinal ‘+’ são os vértices de um simplice \mathbb{S} , regular e centrado na origem; os outros são os vértices do oposto $-\mathbb{S}$. Como um automorfismo de \mathfrak{C}_0 preserva graus, todo o automorfismo de \mathfrak{C}_0 é automorfismo \mathbb{H} . Prova-se, depois, que um automorfismo de \mathbb{H} transforma \mathbb{S} em \mathbb{S} , ou \mathbb{S} em $-\mathbb{S}$. O teorema resulta de os automorfismos de um simplice regular se poderem identificar com as permutações dos seus vértices.

7 Ilustração e Exemplos

Os resultados das secções anteriores sobre as dimensões, o número e formato das faces, os graus dos vértices, etc, permitem retirar a conclusão, há muito intuitiva, de que \mathfrak{C}_0 é um hexágono regular para $p = 3$, e um dodecaedro rômbo para $p = 4$. Quando $p = 5$, \mathfrak{C}_0 é um politopo de dimensão 4; de acordo com as fórmulas (5), tem 20 facetas que são cubos ‘martelados’, 60 faces bidimensionais que são quadrados ‘martelados’, 60 arestas e 30 vértices. Não sabemos se tal criatura e as que se lhe seguem nas dimensões maiores têm nome de baptismo.

Vamos ver o que nos diz o Teorema 5 sobre a forma e medidas das faces *próprias* de \mathfrak{C}_0 . Note-se, para já, que um δ -cubo de aresta 1 tem diagonais todas de comprimento $\sqrt{\delta}$. Fazendo-se a compressão segundo uma diagonal do δ -cubo, com factor $\sqrt{1 - \delta/p}$, uma boa maneira de imaginar as faces do politopo resultante é ter em conta as diagonais explicitadas em (6), cujos comprimentos são, conforme dissemos,

$$(10) \quad \sqrt{\delta - (\delta - 2k)^2/p}, \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, \delta.$$

Daqui resulta, em particular, que as arestas de \mathfrak{C}_0 têm todas o mesmo comprimento: $\sqrt{1 - 1/p}$. Cada face de dimensão 2 resulta de um quadrado de lado 1 comprimido segundo uma diagonal, isto é, um rombo com diagonal maior $\sqrt{2}$ (a diagonal inalterada do quadrado original) e diagonal menor $\sqrt{2}\sqrt{1 - 2/p}$. Cada face de dimensão 3 (para $p > 4$) é um cubo ‘martelado’ com diagonais de dois tamanhos: a diagonal menor mede $\sqrt{3 - 9/p}$ e as outras três diagonais medem $\sqrt{3 - 1/p}$. De um modo geral, os $\delta + 1$ valores possíveis de k produzem, em (10), $\lfloor \delta/2 \rfloor + 1$ comprimentos possíveis para as diagonais. Na figura 8 representamos em perspectiva as faces tridimensionais para os valores de p : 5, 6 e 20; para cada um destes valores mostramos apenas um exemplar de um total de 20, 120 e 149419800 cubos ‘martelados’, respectivamente. Na segunda linha figuram as faces bidimensionais para os valores de p indicados. Para $p = 4$, a face tridimensional de \mathfrak{C}_0 é o dodecaedro rômbo com facetas iguais ao rombo representado.

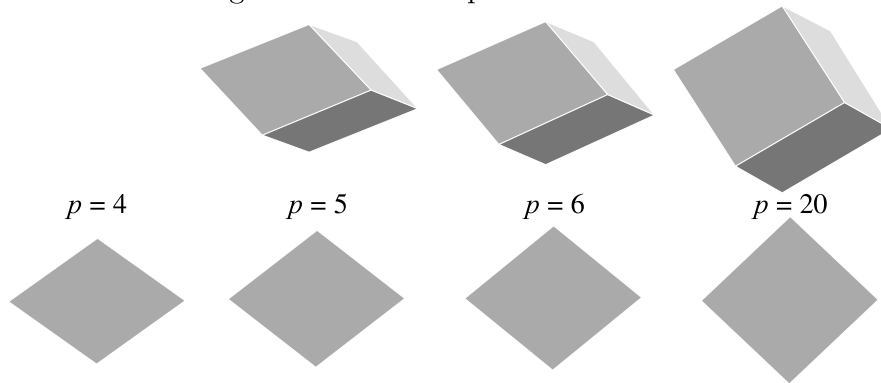


figura 8

As compressões foram feitas segundo diagonais ‘verticais’. Para $p = 20$, o factor de compressão do cubo é de cerca de 92%, o que dá um sólido muito próximo do cubo original, cujas facetas são todas iguais ao rombo da linha de baixo, com diagonal menor cerca de 95% da diagonal maior. De facto, é óbvio que a sequência de faces de dimensão δ , que se obtém fazendo sucessivamente $p = \delta + 1, \delta + 2, \delta + 3, \dots$, tem por ‘limite’ um δ -cubo de aresta 1.

Vamos agora mostrar, para dimensões pequenas, o modo como os politopos \mathbb{S} e \mathbb{H} , definidos na secção 6, se posicionam dentro de \mathfrak{C}_0 .

No caso $p = 3$, \mathfrak{C}_0 é um hexágono regular assente no plano $x_1 + x_2 + x_3 = 0$; \mathbb{S} é um triângulo equilátero e \mathbb{H} é, por isso, o próprio hexágono, conforme mostra a figura:

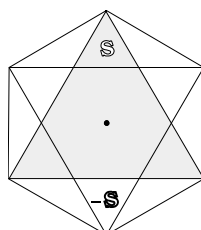


figura 9

De acordo com o Teorema 6, cada automorfismo do hexágono é determinado por uma permutação dos vértices do triângulo \mathbb{S} , seguida, ou não, de uma simetria relativamente à origem. Por exemplo, uma rotação de 60° (em torno da origem) é determinada por uma permutação cíclica dos vértices de \mathbb{S} — ou seja, por uma rotação de 120° — seguida de simetria.

No caso $p = 4$, \mathbb{S} e $-\mathbb{S}$ são tetraedros regulares e \mathbb{H} é um cubo como mostra a figura 10. Os vértices do cubo são os vértices de grau 3 do dodecaedro \mathfrak{C}_0 . Os outros 6 vértices do dodecaedro, todos de grau 4, determinam um octaedro regular, o dual do cubo! Isto faz pensar em algo mais, como a determinação de relações de dualidade existentes entre ‘subpolitopos’ notáveis de \mathfrak{C}_0 em dimensões elevadas. A figura 11 mostra a situação, ilustrando, de algum modo, o facto de os automorfismos do dodecaedro serem exactamente os mesmos que os do cubo \mathbb{H} .

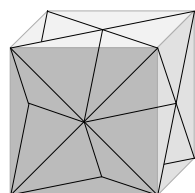


figura 10

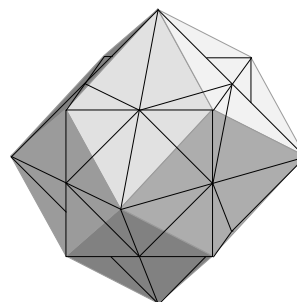


figura 11

8 Células Vizinhas

Nesta secção tratamos as relações de \mathfrak{C}_0 com as células suas vizinhas: quantas e quais as células que tocam \mathfrak{C}_0 ?, de que modo se tocam?, etc.

Claro que nem todas as células intersectam \mathfrak{C}_0 . De facto, a célula- a intersecta \mathfrak{C}_0 se e só se a é de soma nula e tem coordenadas 0, 1 e -1 .

Toda a célula intersecta \mathfrak{C}_0 segundo uma face comum às duas células,

mais precisamente: $\mathfrak{C}_a \cap \mathfrak{C}_0$ é a face \mathfrak{F}_{PN} de \mathfrak{C}_0 , onde

$$P := \{i : a_i = 1\} \quad \text{e} \quad N := \{j : a_j = -1\}.$$

A dimensão desta face de contacto é o número de coordenadas nulas de a .

Também não é difícil mostrar que uma face \mathfrak{F}_{IJ} de \mathfrak{C}_0 é também face de uma célula vizinha se e só se $|I| = |J|$. Disto resulta que a intersecção de duas células tem dimensão da mesma paridade que p . Assim, nem todas as faces de \mathfrak{C}_0 resultam da intersecção de \mathfrak{C}_0 com uma célula vizinha. Por exemplo, no caso $p = 3$ (de células hexagonais), duas células, quando se intersectam, fazem-no segundo uma aresta, mas não segundo um vértice. No caso $p = 4$ (de células dodecaédricas) duas células, quando se intersectam, fazem-no segundo um rombo ou um vértice — nunca segundo uma aresta.

A partir destes resultados simples, torna-se fácil fazer algumas contagens. Por exemplo, a face \mathfrak{F}_{IJ} é comum a $\binom{|I|+|J|}{|I|}$ células \mathfrak{C}_a distintas (\mathfrak{C}_0 incluída). E o número de células \mathfrak{C}_a distintas que intersectam \mathfrak{C}_0 segundo uma face de dimensão $\delta = p - 2k$ é

$$\binom{p}{k} \binom{p-k}{k}.$$

Referências

- [1] A. Bogomolny, *The Constitution and Paradoxes*, January 2002, <http://www.maa.org/editorial/knot/Democracy.html>
- [2] L. Bowen, *Introduction to Contemporary Mathematics*, University of Alabama, 1998-2001, <http://www.ctl.ua.edu/math103/>
- [3] J. Conway, N. Sloane, *Sphere Packings, Lattices and Groups*, Springer Verlag, 1988.
- [4] P. Gruber, J. Wills (Eds.), *Handbook of Convex Geometry*, Vols A & B, North-Holland, 1993.
- [5] B. Grünbaum, *Convex Polytopes*, Interscience Publ., John Wiley & Sons, 1967.
- [6] R.T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton University Press, 1970.
- [7] D. Saari, *Basic Geometry of Voting*, Springer, 1995.
- [8] H. Steinhaus, *Mathematical Snapshots*, G.E. Stechert, New York 1939; para facilitar a tarefa do leitor interessado, as citações que fazemos neste artigo referem-se a uma edição recente, nomeadamente, a Third American Edition, Revised and Enlarged, Dover Publ., 1999.