Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Análise Infinitesimal II

Ano Lectivo 2004/2005 **Folha 2**

(1) (Exame 2001) Considere a função $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} 10 & \text{se } x \text{ racional}\\ 100 & \text{se } x \text{ irracional}\end{cases}$$

(a) Mostre que qualquer que seja a partição P de $[0,1]$, se tem $S(f;P)=100$ e $s(f;P)=10$.
(b) Diga, justificando, o que pode concluir sobre a integrabilidade de f.

(2) Considere as funções escada definidas em $[0,1]$ por

$$g(x)=\begin{cases} 0, & 0\le x\le 1\\ 2, & 1<x\le 2\end{cases}\quad,\quad h(x)=\begin{cases} 2, & 0\le x\le 2/3\\ 4, & 2/3<x\le 4/3\\ 5 & 4/3<x\le 2\end{cases}.$$

(a) Calcule os integrais das funções g e h.
(b) Comparando a função $f:[0,2]\to\mathbb{R}$, definida por $f(x)=x^2+1$, com g e h, diga o que pode concluir sobre os integrais superior e inferior de f.

(3) Prove que a função $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x$ é integrável e calcule o seu integral.

(4) Diga se as seguintes funções são integráveis e, em caso afirmativo, calcule os respectivos integrais.

a) $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{se } 0\le x<2\\ 12 & \text{se } x=2\\ x^3 & \text{se } 2<x<5\\ -2 & \text{se } 5\le x\le 10\end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases} x^3 & \text{se } 0\le x<1/2\\ \frac{1}{x} & \text{se } 1/2\le x<2/3\\ 1 & \text{se } 2/3\le x\le 1\end{cases}$

(5) Sejam $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função contínua e c, d pertencentes a $[a,b]$. Definam-se as funções

$$F(t)=\int_c^t f(s)\,ds \quad G(t)=\int_d^t f(s)\,ds.$$

Mostre que $F-G$ é constante e expresse essa constante como um integral.

(6) Utilizando o **Teorema Fundamental do Cálculo**, calcule os seguintes integrais definidos.

a) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \cot x\,dx$ b) $\int_1^2 \frac{e^{-1/x}}{x^2}\,dx$ c) $\int_0^{\ln 3} \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$ d) $\int_2^{2\sqrt{3}} \frac{1/2}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\,dx$
e) $\int_1^e \frac{x^2+x+1}{x}\,dx$ f) $\int_0^1 t(\sqrt{t}-\sqrt[3]{t})\,dt$ g) $\int_2^4 \frac{dx}{(2x-3)^2}$ h) $\int_{-1}^2 |u-u^2|\,du$

(7) (Frequência 1996) Sendo $f : \left[0, \frac{3\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ uma função derivável e positiva, considere a função $G : \left[0, \frac{3\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ definida por $G(x) = \int_0^x f(t) \frac{\sin t}{2+\cos t}\, dt$.
   (a) Verifique se G é ou não derivável e, em caso afirmativo, determine $G'(x)$.
   (b) Estude a monotonia de G e indique os pontos extremantes.

(8) (Exame 1995) Considere a função $G : \left[\frac{1}{2}, 10\right] \to \mathbb{R}$ definida por $G(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t}\, dt$.
   (a) Mostre que $G(x) < 0$, $\forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[$.
   (b) Calcule $G'(x)$ e $G''(x)$.

(9) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = \int_x^{\cos x} e^{t^2}\, dt$. Verifique que f é derivável e determine $f'(x)$.

(10) (Exame 2001) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(t) = \int_1^{\cos t} \frac{e^x}{2+x}\, dx$. Verifique se zero é um ponto de mínimo local.

(11) (Exame 2001) Seja $\psi : [0,1] \to [0,1]$ uma função derivável tal que:
   - $\psi(0) = \psi'(0) = 0$;
   - $\psi(1) = \psi'(1) = 1$;
   - para todo $x \in]0,1]$, $\psi'(x) > 0$.

   (a) Mostre que ψ é bijectiva.
   (b) Seja $H : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $H(x) = \int_0^{\psi(x)} \frac{e^t}{1+t}\, dt$.
      (i) Estude a monotonia de H.
      (ii) Verifique se $H([0,1]) \subset [0, e-1]$. (Sugestão: majore H(1))
      (iii) Mostre que existe um rectângulo cuja medida do comprimento de um dos lados é 1, com área $H(1)$ e cuja medida do comprimento do outro lado é $\frac{e^y}{1+y}$ onde y é um valor do intervalo $]0,1[$.

(12) Determine uma função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que $f'(x) = 2x$ e $f(0) = 1$.

(13) Determine uma função $f : [1,10] \to \mathbb{R}$ tal que $xf'(x) = 1$ e $f(1) = -10$.

(14) Determine uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f'(x) = f(x)$ e $f(0) = 1$.

(15) Determine uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f'(x) = 3f(x)$ e $f(0) = 2$.

(16) Determine uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f'(x) = 2xf(x)$ e $f(0) = 1$.

(17) Determine uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f''(x) = 1$, $f(0) = 1$ e $f'(0) = 0$.

(18) Determine todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f''(x) = 1$.

★ 18 Determine uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f''(x) = -f(x)$, $f(0) = 1$ e $f(\frac{\pi}{2}) = 0$.

★ 19 Determine uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f''(x) = -f(x)$, $f(0) = 0$ e $f(\frac{\pi}{2}) = 1$.

★ 20 Determine uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f''(x) = -4f(x)$, $f(0) = 1$ e $f(\frac{\pi}{4}) = 1$.

★ 21 Determine todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f''(x) = -\omega^2 f(x)$.