Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Análise Infinitesimal II

Ano Lectivo 2004/2005 **Folha 3**

(1) Verifique, para cada um dos integrais seguintes, se a substituição da variável indicada é permitida. Caso seja possível, efectue essa substituição e calcule o integral.

a) $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2}\,dx$, $\quad x = 2\sin t$ $\qquad$ b) $\int_0^3 \sqrt[3]{2-x^2}\,dx$, $\quad x = \sqrt{2}\cos t$

c) $\int_{-2}^{2} \sqrt[5]{x^2}\,dx$, $\quad \sqrt[5]{x^2} = t$ $\qquad$ d) $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx$, $\quad x = \sec t$

(2) Seja $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ uma função integrável em $[-a, a]$. Mostre que:

(a) $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$, se f é par;

(b) $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$, se f é ímpar.

(3) (Exame 2001) Seja $G : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ a função definida por $G(x) = \int_{-\pi}^{x} \frac{\sin t}{t^2+1}\,dt$.

(a) Calcule $G(-\pi)$ e $G(\pi)$.

(b) Diga se G é derivável.

(c) Calcule os extremos locais de G.

(d) Verifique se G é uma função par.

(4) Aplicando o **Teorema da integração por partes**, calcule os seguintes integrais

a) $\int_2^{10} x^2 \ln x\;dx$ $\qquad$ b) $\int_{-1}^{2} (x^2+1)e^x\;dx$ $\qquad$ c) $\int_1^{7\sqrt{3}} \arctan x\;dx$

(5) (a) Sem calcular o integral, mostre que

$$\int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{x^2-1}\;dx > 0.$$

(b) Mostre que o integral da alínea anterior é igual a

$$\int_0^{-\pi/4} \sqrt{\sec^2 t - 1}.\sec t.\tan t\;dt.$$

(c) Sem calcular o integral, mostre que

$$\int_0^{-\pi/4} \sec t \tan^2 t\;dt < 0.$$

(d) Será que os resultados das alíneas (a) e (c) estão em contradição?

(6) Mostre que, se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ for uma função contínua e $\int_a^b f(x)\;dx = 0$, então a equação $f(x) = 0$ tem pelo menos uma raiz em $[a, b]$.

(7) Use o Teorema do valor médio para integrais, para mostrar que qualquer que seja a circunferência de raio r, a área interior do semi-círculo é a mesma que a de um certo rectângulo cujo comprimento de um dos lados é $2r$.

(8) Use as regras do ponto médio, do trapézio e de Simpson com $n = 6$ para calcular:

a) $\int_1^3 e^{-x}\;dx$; $\qquad$ b) $\int_1^3 \frac{e^x}{x}\;dx$.

(9) Determine n por forma que, na aproximação dos integrais anteriores pela regra do trapézio, se cometa um erro inferior a 5×10^{-4}.

(10) Sabendo que uma certa função contínua é definida nos pontos indicados através da tabela abaixo, use a regra de Simpson para aproximar $\int_0^{10} f(x)\, dx$.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$	7	6	5	6	5	4	4	3	2	1	0

(11) Diga, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

(a) Para calcular $\int_1^3 -e^{x^2}\, dx$, usando a regra do trapézio, e não cometer um erro superior a $\frac{304e^9}{1200}$, basta considerar a partição $\Delta x = \frac{1}{5}$;

(b) Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é definida por $f(x) = mx + c$, com m e c duas constantes reais, então, neste caso, a regra do trapézio dá um valor exacto para $\int_a^b f(x)\, dx$.

(12) Estabeleça a fórmula de Taylor em torno de zero, com resto integral, para as seguintes funções:

a) $\sinh x$;

b) $\cosh x$.