Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Análise Infinitesimal II

Ano Lectivo 2004/2005 **Folha 4**

(1) Esboce o conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x^2 + y^2 \geq 1,\; 0 \leq y \leq e^x,\; 0 \leq x \leq 2\}$$

e determine a respectiva área.

(2) Calcule a área das figuras limitadas por
  (a) a parábola de equação $y = -x^2 + 4x - 3$ e pelas rectas tangentes à parábola nos pontos $(0, -3)$ e $(3, 0)$.
  (b) a parábola de equação $y^2 = -x + 2y$ e pela recta $x = 0$.

(3) (Exame 1998) Considere $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x^2 + y^2 \leq 4 \wedge y \geq mx + b\}$, onde $y = mx + b$ é uma equação da recta tangente ao gráfico da função f, definida por $f(x) = e^x$, no ponto de abcissa $x = 1$.
  (a) Faça um esboço da representação geométrica do conjunto S.
  (b) Estabeleça os integrais que definem a área de S.

(4) Considere o triângulo de vértices em $(-1, 1)$, (x, x^2) e $(3, 9)$ sobre a parábola $y = x^2$.
  (a) Determine a área do triângulo, para um valor arbitrário de x em $[-1, 3]$.
  (b) Determine o valor de x para o qual a área é máxima.

(5) Considere as funções f e g definidas, respectivamente, por $f(x) = e^x + 1$ e $g(x) = 4 - \sqrt{16 - (x - 6)^2}$.
  Determine a área da região delimitada pela tangente ao gráfico de f no ponto $(0, 2)$, pelo eixo xx e pelo gráfico de g.

(6) Calcule o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo dos xx, da região limitada pelas curvas de equações $y = \sqrt{4 - x^2}$ e $y = 0$.

(7) Calcule o volume do sólido gerado pela rotação da região limitada pelas curvas de equações $y = x^2$, $x = 0$, $x = 1$ e $y = 0$
  (a) em torno do eixo dos xx;
  (b) em torno do eixo dos yy.

(8) Considere a região limitada pelas curvas $x^2 = y - 2$, $2y - x - 2 = 0$, $x = 0$ e $x = 1$. Determine o volume do sólido de revolução obtido pela rotação dessa região em torno do eixo dos xx.

(9) Calcule o comprimento das seguintes curvas
  (a) $y = \sqrt{1 - x^2}$, entre os pontos de abcissas $x = 0$ e $x = a$ (com $a \in [0, 1]$);
  (b) $y = x^2$, entre o pontos de abcissas $x = 0$ e $x = 1$;
  (c) $y = \arcsin(e^{-x})$, entre os pontos de abcissas $x = \frac{1}{2}$ e $x = 1$.

(10) Indique quais dos seguintes símbolos representam um integral definido, quais representam um integral impróprio e quais não representam nem um integral definido nem um integral impróprio

a) $\int_{-2}^{0} \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\, dx$ b) $\int_{-2}^{2} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\, dx$ c) $\int_{-2}^{2} \frac{1}{x}\, dx$

d) $\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\, dx$ e) $\int_{-2}^{2} \sqrt{x^2-4}\, dx$ f) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2-x}\, dx$

(11) Use a definição para determinar a natureza dos seguintes integrais impróprios e indique o seu valor no caso de convergência

a) $\int_{-2}^{2} \frac{1}{4-x^2}\, dx$ b) $\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x}+1)}\, dx$ c) $\int_{3/2}^{2} \frac{1}{\sqrt{x-1}-\sqrt[3]{x-1}}\, dx$

d) $\int_{-\infty}^{0} x.5^{-x^2}\, dx$ e) $\int_{-\infty}^{+\infty} \cos x\, dx$

(12) Usando critérios de comparação, determine a natureza dos seguintes integrais impróprios

a) $\int_{0}^{1000} \frac{1}{\sqrt[3]{x}+2\sqrt[4]{x}+x^3}\, dx$ b) $\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin x+\cos x}{x^2+x+1}\, dx$ c) $\int_{1}^{+\infty} \frac{\sinh(x+1)}{x}\, dx$

d) $\int_{0}^{1} \frac{1}{\ln(1+\sqrt{x})}\, dx$