Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Análise Infinitesimal II

Ano Lectivo 2004/2005 **Folha 5**

(1) Determine uma função f tal que $\lim_{t\to+\infty}\int_{-t}^{t} f(x)\,dx$ exista mas $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ seja divergente.

(2) (Frequência 1998)

(a) Mostre que $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx$ é convergente.

(b) Use o resultado estabelecido anteriormente para mostrar que $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ é convergente. (Sugestão: efectue uma integração por partes).

(3) (Exame 1999)

(a) Calcule $\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$.

(b) Determine a natureza do integral impróprio $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2}\,dx$.

(c) Determine o domínio da função g definida por $g(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t^2}\,dt$.

(d) Estude a monotonia, os extremos e os pontos de inflexão de g e faça um esboço do seu gráfico.

(4) Calcule

a) $\int_0^1 \sqrt{x-x^2}\,dx$ b) $\int_2^{+\infty} \frac{2x}{(x-1)^2(x+1)}\,dx$ c) $\int \frac{ee^x+2}{e^2(e^{2x}+e^{x-1})}\,dx$

d) $\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4x}{\pi}}}\,dx$ e) $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ f) $\int \ln(x^2-1)\,dx$

(5) Determine o limite simples das seguintes sucessões de funções. Verifique se ocorre convergência uniforme nos intervalos indicados.

(a) $f_n(x) = x^n(1-x)^n$, $x\in[0,1]$, $n\in\mathbb{N}$.

(b) $f_n(x) = nxe^{-nx}$, $x\in[0,\infty[$, $n\in\mathbb{N}$.

(c) $f_n(x) = x^n$, $x\in[0,\frac{1}{2}]$, $n\in\mathbb{N}$.

(d) $f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x\in[-n,n] \\ 0, & \text{se } x\notin[-n,n] \end{cases}$, $n\in\mathbb{N}$.

(e) $f_n(x) = \begin{cases} 1-\frac{1}{n}|x|, & \text{se } |x|<n \\ 0, & \text{se } |x|\geq n \end{cases}$, $n\in\mathbb{N}$.

(6) Considere a sucessão de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde, para cada $n\in\mathbb{N}$, $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ é definida por

$$f_n(x) = x + \frac{x}{n}.$$

Verifique se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente.

(7) Considere a sucessão de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde, para cada $n\in\mathbb{N}$, $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ é definida por

$$f_n(x) = 2nx(1-x)^n.$$

Mostre que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pontualmente para a função nula. Verifique se há convergência uniforme.

(8) (a) Mostre que a sucessão de funções definida em $[0,1]$ por

$$f_n(x) = \begin{cases} 4nx, & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ -4n^2x + 4n, & \text{se } \frac{1}{2n} < x < \frac{1}{n} \\ 0, & \text{se } \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

converge simplesmente para a função identicamente nula.

(b) Calcule $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx$ e $\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$.

(c) A convergência é uniforme?

(9) Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão tal que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

$$|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n| \leq 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right).$$

(a) Mostre que a sucessão de termo geral $T_n = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$ é limitada.

(b) Conclua que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão convergente.

(c) Indique, justificando, a natureza da série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

(d) O que pode concluir sobre $\lim_{n\to+\infty} x_n$?