Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Análise Infinitesimal II

Ano Lectivo 2004/2005 **Folha 6**

(1) (Exame 1998) Considere a sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$x_n = \begin{cases} 1+e^{-n} & \text{se } n \leq 10^6 \\ \frac{2}{3^{n-1}} & \text{se } n > 10^6 \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(a) Verifique que a série de termo geral x_n é convergente, justificando devidamente.
(b) Considerando a sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definida por $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, diga, justificando, se a série $\sum_{n=1}^{+\infty}(x_n + a_n)$ é convergente.

(2) Determine a natureza das séries de termo geral indicado.

a) $\frac{2^n+3^n}{6^n}$, $n \geq 1$ b) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ c) $\frac{\sin^2(n^2)}{n^2}$, $n \geq 1$ d) $\frac{3n}{2n^3+3}$, $n \geq 1$

e) $\frac{3^{n+1}}{10^{n+2}}$, $n \geq 5$ f) $\frac{1+\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^4-2}}$, $n \geq 2$ g) $\frac{\ln n}{n^2}$, $n \geq 1$ h) $e^{\frac{\ln n}{n^2}} - 1$, $n \geq 1$

i) $\frac{2}{5^n} + \left(1-\frac{7}{n}\right)^n$, $n \geq 7$ j) $\frac{n+1}{n^2}$, $n \geq 1$ l) $\frac{4+3^n}{2^n}$ $n \geq 1$ m) $\frac{1}{\ln n}$ $n \geq 1$

(3) Dê um exemplo de duas séries divergentes cuja soma seja uma série convergente.

(4) Prove que, se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}$ é divergente.

(5) Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de termos positivos. Mostre que, se $\lim_{n\to+\infty} na_n \neq 0$, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é divergente.

(6) Dê um exemplo de uma série convergente, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, e de uma série divergente, $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$, tal que $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$.

(7) Considere duas séries $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$.
(a) Mostre que, se as duas séries forem absolutamente convergentes, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n + b_n)$ também é absolutamente convergente.
(Sugestão: utilize a desigualdade $|a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n|$)
(b) Mostre que, se uma das séries convergir absolutamente e a outra simplesmente, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n + b_n)$ é simplesmente convergente.
(Sugestão: use a desigualdade $|a_n - b_n| \geq ||a_n| - |b_n||$)
(c) Dê um exemplo de duas séries, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$, simplesmente convergentes, tais que a série $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n + b_n)$ seja absolutamente convergente.

(8) Determine a natureza das séries de termo geral dado, indicando, em caso de convergência, se ela é simples ou absoluta.

a) $\frac{(-1)^{n+1}}{\ln n}$, $n \geq 2$	b) $\frac{(-1)^n}{n2^n}$	c) $\frac{(-1)^n}{n+3} - \frac{1}{n^2+3}$	d) $\frac{n!}{2^{n+1}}$
e) n^{-n}	f) $\frac{8^n n!}{n^n}$	g) $\sin^3 \frac{\pi}{2n}$	h) $\left(n \sin \frac{\pi}{3n}\right)^n$
i) $\left(n^4 \tan^4 \frac{\pi}{3n}\right)^n$	j) $\left(\frac{n^2-4}{n^2}\right)^n$	k) $\frac{1}{(2n-1)2^n} + \frac{n^3}{e^n}$	l) $\frac{\cos n}{n^2+1} + \frac{n!}{1+2^n}$
m) $\frac{1}{n^4}$	n) $\frac{(-1)^n(m+1)}{n^2+1}$	o) $\frac{n^2}{2^n}$	p) $\frac{n^2+\cos n}{n^4+\sin n}$
q) $\frac{(-1)^n}{\sqrt{\ln n}}$	r) $\frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n}}$	s) $\frac{n^3 3^n}{n!}$	t) $\frac{1}{n(\ln n)^{2/3}}$

(9) Considere duas sucessões $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reais. Prove que, se a série $\sum_{i=1}^{+\infty} a_n$ convergir absolutamente e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for limitada, então a série $\sum_{i=1}^{+\infty} a_n b_n$ é absolutamente convergente.