Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Análise Infinitesimal II

Ano Lectivo 2004/2005 **Folha 7**

(1) Verifique se as seguintes séries são uniformemente convergentes.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}, \quad x \in \mathbb{R}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x}, \quad x \in \mathbb{R}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{e^{nx}}, \quad x \in [0, 10]$

(2) (a) Prove que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{n^3+x^3}$ é uniformemente convergente em $[0, a]$, $a > 0$.

(b) Mostre que $\lim_{x\to 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{n^3+x^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$.

(3) Prove que a função f definida por $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{2^n}$ é contínua para todo $x \in \mathbb{R}$.

(4) Mostre que $\int_0^{\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin nx}{e^n}\right) dx = \frac{2e}{e^2-1}$.

(5) Determine o raio de convergência das seguintes séries de potências e, em cada caso, indique se nos extremos do intervalo de convergência as respectivas séries são absolutamente convergentes, simplesmente convergentes ou divergentes.

a) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1}$ b) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{2^n} x^n$ c) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{\ln n}$ d) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$

e) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x+1)^n}{n}$ f) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n(x-3)^n}{n}$ g) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\pi^n (x-1)^{2n}}{(2n+1)!}$ h) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2x-3)^n}{4^{2n}}$

(6) (Exame 2001)

(a) Calcule o raio de convergência da série $\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n+2}$.

(b) Mostre que, para $|x| < 1$, se tem $\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n+2} = \frac{x^2}{1-x^2}$ e conclua que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (2n+2) \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} = \frac{16}{9}.$$

(7) (Exame 2001)

(a) Determine um desenvolvimento em série de potências de x da função g definida por $g(x) = \ln(2x+3)$, bem como os pontos onde a série é convergente.

(b) Seja $f : [0, 1[\to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \int_0^x \ln(2t+3)\, dt$. Determine um desenvolvimento em série de potências de x da função f e os pontos onde esta série converge. Justifique.

(8) O desenvolvimento em série de potências de $\sin x$ é $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

(a) Determine o raio de convergência desta série.

(b) Determine um desenvolvimento em série de potências da função $f(y) = \int_0^y \sin(t^2)\, dt$.

(c) Qual o raio de convergência desta série de potências?

(d) Usando o desenvolvimento da função $\sin x$, determine a série de Taylor da função $\cos(x^2)$, em torno de $a = 0$.

(9) Considere a função f definida por $f(x) = \frac{1}{1+2x^2}$.

(a) Determine o seu desenvolvimento em série de potências de x, bem como os pontos onde a série é convergente.
(b) Calcule $f^{(20)}(0)$.
(c) Calcule o desenvolvimento em série de potências de x de uma primitiva de f.

(10) Considere a função f definida por $f(x) = \frac{1}{2+x^2}$.
(a) Determine o seu desenvolvimento em série de potências de x, bem como os pontos onde a série é convergente.
(b) Utilizando o resultado estabelecido na alínea anterior, determine um desenvolvimento em série de potências de x da função $\arctan \frac{x}{\sqrt{2}}$, para $x \in [-1, 1]$.

(11) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \ln(1 + 3x)$.
(a) Determine um desenvolvimento em série de potências de x da função f.
(b) Determine os valores de x para os quais a série é convergente.
(c) Determine $f^{(99)}(0)$.