Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Análise Infinitesimal II

Ano Lectivo 2004/2005 **Folha 8**

(1) Mostre que o período fundamental de $\cos \dfrac{n\pi x}{L}$ é $\dfrac{2L}{n}$.

(2) Verifique que:
(a) A soma de funções pares é uma função par;
(b) A soma de função ímpares é uma função ímpar;
(c) O produto de duas funções pares é uma função par;
(d) O produto de duas funções ímpares é uma função par;
(e) O produto de uma função par por uma função ímpar é uma função ímpar.

(3) Para n, $m \in \mathbb{N}$, prove as seguintes relações de ortogonalidade:
(a) $\displaystyle\int_{-L}^{L} \cos \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L}\, dx = 0$;
(b) $\displaystyle\int_{-L}^{L} \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L}\, dx = L\delta_n^m$;
(c) $\displaystyle\int_{-L}^{L} \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L}\, dx = L\delta_n^m$.

(4) Seja

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \begin{cases} |x|, & |x| \leq 1 \\ \text{periódica de período } 2 \end{cases} \end{aligned}$$

(a) Calcule os coeficientes de Fourier desta função.
(b) Determine a série de Fourier de f.
(c) Use a alínea anterior para calcular a soma da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{(2n-1)^2}$.

(5) (a) Determine a série de Fourier da função

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \begin{cases} 2x, & -L \leq x < L \\ \text{periódica de período } 2L \end{cases} \end{aligned}$$

(b) Faça um esboço do gráfico da função representada pela série de Fourier e compare-o com o gráfico de f.

(6) Seja

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \begin{cases} L - x, & 0 \leq x \leq L \\ L + x, & -L \leq x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

periódica de período $2L$.
(a) Faça um esboboço do gráfico desta função.
(b) Determine a série de Fourier desta função.

(7) Determine a série de Fourier da função

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{e}^x, \ \ -L \leq x < L \\ \text{periódica de período } 2L \end{array} \right. \end{array}$$

(8) Considere a função

$$\begin{array}{rcl} f :]0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

Determine um desenvolvimento em série de Fourier desta função,
(a) em senos;
(b) em co-senos;
(c) envolvendo senos e co-senos e diferente dos anteriores.

(9) Considere a função $\begin{array}{rcl} f : \ [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & x^2 \end{array}$

(a) Determine um desenvolvimento em série de Fourier de f,
 (i) em senos;
 (ii) em co-senos.

(b) Use a série de Fourier para mostrar que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

(c) Determine o desenvolvimento em série de Fourier da função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, periódica de período 2, definida por $g(x) = x^3, \quad x \in [-1,1]$.