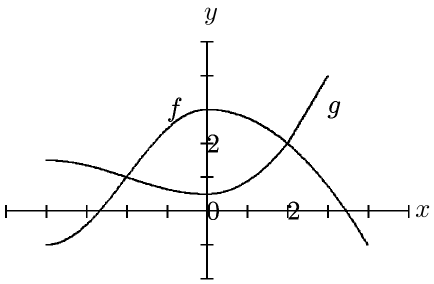
Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Cálculo I
Licenciatura em Engenharia Electrotécnica e de Computadores
Licenciatura em Tecnologias de Informação Visual

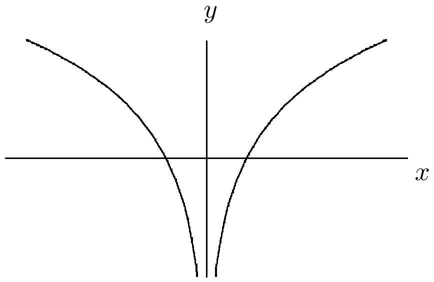
2003/2004 Folha 1

1. Na figura estão representados os gráficos de duas funções f e g .

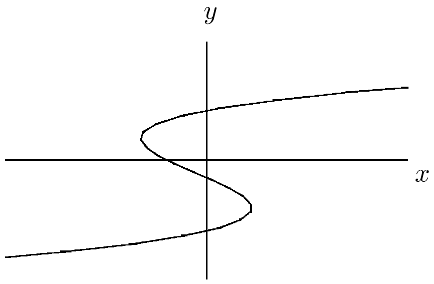


   (a) Indique os valores de $f(-4)$ e $g(0)$.
   (b) Indique os valores de x para os quais $f(x) = g(x)$.
   (c) Em que intervalos f é decrescente?
   (d) Indique o domínio e o contradomínio de f e g.

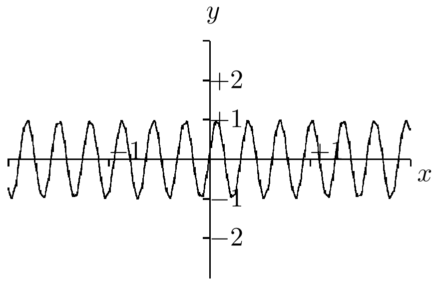
2. Diga, justificando, se a curva dada é o gráfico de uma função de x. Se for o caso, indique o domínio e o contradomínio da função.



(a)



(b)



(c)

3. Quais dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ são gráficos de funções? Esboce cada um dos conjuntos, e se o conjunto for o gráfico de uma função, indique o domínio e o contradomínio.

   (a) $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 4\}$
   (b) $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 4 \text{ e } y \geq 2\}$
   (c) $\{(x, y) : y = \sqrt{4 - x^2}\}$
   (d) $\{(x, y) : |x| + |y| = 1\}$

4. Determine o domínio de cada uma das seguintes funções:

   (a) $f(x) = \frac{x^4}{x^2+2x-1}$
   (b) $f(t) = \sqrt[3]{t-1}$
   (c) $f(x) = \sqrt{x(x-1)(x-2)}$
   (d) $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x^2-1}}$
   (e) $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x}$

5. Determine o domínio e esboçe o gráfico de cada uma das seguintes funções:

   (a) $f(x) = 2x - 3$
   (b) $f(x) = x^2 + 2x - 1$
   (c) $f(x) = \sqrt{x-5}$
   (d) $f(x) = |x|$
   (e) $f(x) = x - |x|$
   (f) $f(x) = \operatorname{sgn} x = \frac{x}{|x|}$
   (g) $f(x) = \frac{x^2+5x+6}{x+2}$

(h) $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{se } x \leq -1 \\ x^2 & \text{se } x > -1 \end{cases}$

(i) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \leq -1 \\ 3x+2 & \text{se } |x| < 1 \\ 7-2x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

6. Encontre a expressão analítica da função cujo gráfico é a curva dada.

   (a) O segmento de recta unindo os pontos $(-2, 1)$ e $(4, -6)$.

   (b) O segmento de recta unindo os pontos $(-3, -2)$ e $(6, 3)$.

   (c) A parte inferior da parábola $x + (y-1)^2 = 0$.

   (d) A parte superior da circunferência $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

7. Deduza a expressão analítica da função descrita, e indique o seu domínio.

   (a) Um rectângulo tem um perímetro de 20 metros. Expresse a área do rectângulo como uma função do comprimento de um dos seus lados.

   (b) Um rectângulo tem uma área de $16\,m^2$. Expresse o perímetro do rectângulo como uma função do comprimento de um dos seus lados.

   (c) Expresse a área de um triângulo equilátero como uma função do comprimento de um lado.

   (d) Expresse a área da superfície de um cubo como uma função do seu volume.

8. Num determinado país, o imposto sobre o rendimento singular é cobrado da seguinte forma: ficam isentos os que têm rendimento até 10.000 EUR; aos que têm um rendimento acima de 10.000 EUR e até 20.000 EUR é cobrado um imposto de 10%; e acima de 20.000 EUR é-lhes cobrado um imposto de 15%.

   (a) Esboce o gráfico da percentagem I cobrada sobre o rendimento R.

   (b) Qual o montante do imposto cobrado sobre um rendimento de 14.000 EUR? E sobre 26.000 EUR?

   (c) Esboce o gráfico do montante de imposto T cobrado sobre o rendimento R.

9. Em cada um dos casos, averigúe se f é uma extensão ou uma restrição de g.

   (a) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^3-1}, \quad g(x) = \frac{x+1}{x^2+x+1}$

   (b) $f(x) = |x|, \quad g(x) = (\sqrt{x})^2$

   (c) $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x+1}}, \quad g(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$

   (d) $f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{|x|}, \quad g(x) = \sqrt{|1-x|} + \sqrt{x}$

10. Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x & \text{se } 1 < x < 2 \end{cases}$$

   Represente graficamente uma extensão de f a $\mathbb{R}$ que...

   (a) ...seja par.

   (b) ...seja ímpar.

   (c) ...tenha período 2.

11. Averigúe se f é par ou ímpar.

   (a) $f(x) = x^4 - 4x^2$

   (b) $f(x) = x^3 - x$

   (c) $f(x) = x^2 + x$

   (d) $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + 1$

12. Calcule as raízes reais dos seguintes polinómios:

   (a) $(x-1)^3(3x^2+5x+2)(x^2+x+1)$

   (b) $2x^5 + x^4 - 3x^3$

   (c) $5x^3 - 4x + 1$

13. A partir do gráfico da função seno, co-seno ou tangente, esboce o gráfico das seguintes funções:

   (a) $f(x) = 2 \operatorname{sen} x$

   (b) $f(x) = -4\cos(2x)$

   (c) $f(x) = |\cos(2x)|$

   (d) $f(x) = \cos|x|$

   (e) $f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{5}\right)$

   (f) $f(x) = \cos x - \frac{\pi}{5}$

   (g) $f(x) = 3 \operatorname{tg} x$

   (h) $f(x) = 4 \operatorname{sen}\left(\frac{x}{6} - 5\pi\right)$

   (i) $f(x) = 4 \operatorname{sen}(6(x + 5\pi))$

   (j) $f(x) = \operatorname{arcsen} x$

   (k) $f(x) = \operatorname{arctg} x$

14. Sejam $f(x) = x^2$, $g(x) = 1/x$ e $h(x) = \operatorname{sen} x$.

   (a) Calcule $(f+g)(-2)$, $(fg)\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $(h/g)\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $(f \circ h)\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $(g \circ h)\left(\frac{\pi}{3}\right)$,

   (b) Determine os domínios das funções $f+g$, $g \circ h$, $h \circ g$, $g \circ g$, $g/(fh)$

15. A partir dos gráficos de f e de g, esboce os gráficos de $f+g$ e de $f-g$.

   (a) $f(x) = x, \quad g(x) = 1/x$

   (b) $f(x) = x^3, \quad g(x) = -x^2$

16. Determine a expressão analítica e o domínio de $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ e $g \circ g$.

   (a) $f(x) = 2x^2 - x, \quad g(x) = 3x + 2$

   (b) $f(x) = \sqrt{x-1}, \quad g(x) = x^2$

   (c) $f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = \frac{1}{x^2-1}$

   (d) $f(x) = \sqrt{x^2-1}, \quad g(x) = \sqrt{1-x}$

17. Determine a expressão analítica e o domínio de $f \circ g \circ h$.

    (a) $f(x) = \frac{1}{x}$, $\quad g(x) = x^3$, $\quad h(x) = x^2 + 1$

    (b) $f(x) = \sqrt{x}$, $\quad g(x) = \frac{x}{x-1}$, $\quad h(x) = \sqrt[3]{x}$

18. Indique funções simples f e g tais que $F = f \circ g$.

    (a) $F(x) = (x-9)^5$

    (b) $F(t) = \sqrt{\cos t}$

    (c) $F(x) = \frac{x^2}{x^2+4}$

19. Indique funções simples f, g e h tais que $\operatorname{sen}^4(\sqrt{x}) = f \circ g \circ h$.

20. A *função de Heaviside* é a função

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ 1 & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$

Esta função é utilizada no estudo de circuitos eléctricos para representar o surgimento repentino de corrente eléctrica, ou voltagem, quando uma chave é instantaneamente ligada.

    (a) Esboce o gráfico da função de Heaviside.

    (b) Esboce o gráfico da voltagem $V(t)$ no circuito se uma chave for ligada no instante $t = 0$ e 120 volts forem aplicados instantaneamante no circuito. Escreva uma fórmula para $V(t)$ em termos de $H(t)$.

    (c) Esboce o gráfico da voltagem $V(t)$ no circuito se uma chave for ligada no instante $t = 5$ segundos e 240 volts forem aplicados instantaneamante no circuito. Escreva uma fórmula para $V(t)$ em termos de $H(t)$.

21. A função de Heaviside definida no exercício 20 pode também ser utilizada para definir uma *função rampa* $y = ctH(t)$, que representa um crescimento gradual na voltagem ou corrente do circuito.

    (a) Esboce o gráfico da função rampa $y = tH(t)$.

    (b) Esboce o gráfico da voltagem $V(t)$ no circuito se uma chave for ligada no instante $t = 0$ e a voltagem crescer gradualmente até 120 volts num intervalo de 60 segundos. Escreva uma fórmula para $V(t)$ em termos de $H(t)$ para $t \leq 60$.

    (c) Esboce o gráfico da voltagem $V(t)$ no circuito se uma chave for ligada no instante $t = 7$ segundos e a voltagem crescer gradualmente até 100 volts num intervalo de 25 segundos. Escreva uma fórmula para $V(t)$ em termos de $H(t)$ para $t \leq 32$.

22. (a) Expresse cada uma das seguintes funções como soma de uma função par com uma função ímpar:

    i. $3 - 2x + x^4 - 5x^7$

    ii. $(x+2)\operatorname{sen} x - x^3 \operatorname{sen}(5x)$

    iii. $\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

    (b) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Observe que

$$f = E + O,$$

    onde

$$E(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$$
$$O(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)).$$

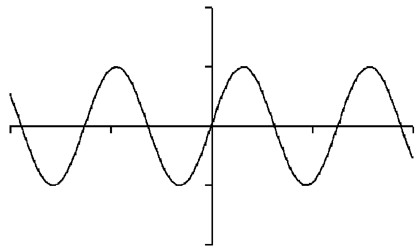
    Mostre que E é par e que O é ímpar. Mostre que existe uma única decomposição de f como soma de uma função par com uma função ímpar.

    (c) Mostre que a soma de duas funções pares (respectivamente ímpares) é uma função par (respectivamente ímpar).

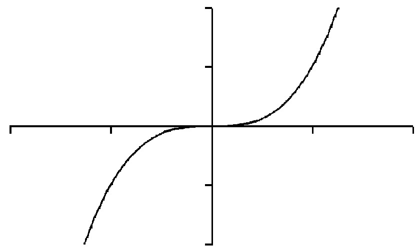
    (d) O que podemos afirmar a respeito do produto de duas funções pares? E o de duas funções ímpares? E o de uma função par com uma função ímpar?

    (e) Responda à mesmas questões, considerando a composição de funções no lugar do produto.

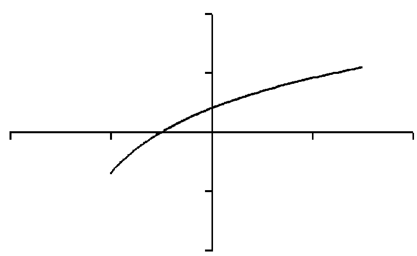
23. Indique quais das funções cujos gráficos são apresentados a seguir são injectivas:



(a)



(b)



(c)

24. Considere as funções definidas pelas seguintes expressões analíticas. Supondo que o contradomínio coincide com o conjunto de chegada, indique as funções que têm inversa; se a inversa existir, determine-a.

    (a) $f(x) = 7x^3 - 3$
    (b) $f(x) = x^2 - 2x + 5$
    (c) $f(x) = \operatorname{sen} x$
    (d) $f(x) = \arccos x$
    (e) $f(x) = |x - 1|$
    (f) $f(x) = \frac{2x-1}{x}$
    (g) $f(x) = 3 + \sqrt{x-2}$
    (h) $f(x) = -3 + \ln \frac{x}{3}$
    (i) $f(x) = 2^{10^x}$
    (j) $$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}\backslash]-1,0[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq -1 \\ 1-x & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \end{array}$$
    (k) $$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}\setminus [-1,0[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} x^2 & \text{se } x < -1 \\ 1-x & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

25. Esboce o gráfico de cada uma das seguintes funções, e indique os respectivos domínio e o contradomínio:

    (a) $2^x + 1$
    (b) 2^{x+1}
    (c) $\left(\frac{3}{5}\right)^x$
    (d) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-x}$
    (e) 3^{-x}
    (f) -3^x
    (g) $2^{|x|}$
    (h) $3 - e^x$
    (i) $-\ln x$
    (j) $\ln(-x)$
    (k) $\ln |x|$
    (l) $|\ln x|$
    (m) $\log_{10}(x+5)$
    (n) $\log_{0,5}(x+5)$
    (o) $2 + \operatorname{senh}(x-1)$
    (p) $-2\cosh(x+1)$
    (q) $|\operatorname{tgh}(2x)|$
    (r) $\operatorname{argsenh}(-x)$
    (s) $\operatorname{argcosh}(-x)$
    (t) $-\operatorname{argtgh} x$

26. Calcule o valor exacto de cada expressão:

    (a) $\log_2 64$
    (b) $\log_6 \left(\frac{1}{36}\right)$
    (c) $\log_5 10 + \log_5 20 - 3\log_5 2$
    (d) $2^{\log_2 3 + \log_2 5}$
    (e) $e^{3\ln 2}$

27. Prove as seguintes igualdades:

    (a) $\cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = 0$
    (b) $\operatorname{sen}(3x) = 3\operatorname{sen} x - 4\operatorname{sen}^3 x$
    (c) $1 + \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{x}{4}\right)$
    (d) $\operatorname{tg}(2x) = \frac{1}{1-\operatorname{tg} x} - \frac{1}{1+\operatorname{tg} x}$
    (e) $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$
    (f) $\operatorname{senh}(x+y) = (\operatorname{senh} x)\cdot(\cosh y) + (\operatorname{senh} y)\cdot(\cosh x)$
    (g) $\operatorname{senh}(3x) = 3\operatorname{senh}(x) + 4\operatorname{senh}^3(x)$

28. Resolva as seguintes equações:

    (a) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{2x^2}{x^2-1}$
    (b) $\left|\frac{x-1}{3x+4}\right| = 2$
    (c) $2\operatorname{sen} x = -\sqrt{3}$
    (d) $\operatorname{sen}(2x) + \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = 0$
    (e) $\cos x = \operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x$
    (f) $\cos x + \operatorname{sen}(2x) = 0$
    (g) $3^{\operatorname{sen} x + (\operatorname{sen} x)\cdot(\operatorname{tg} x)} = 1$
    (h) $|\arcsin(x+1)| = \frac{\pi}{4}$
    (i) $\log_3 x = \frac{1}{2} + \log_9(4x+15)$
    (j) $e^x + 4e^{-x} = 5$
    (k) $\log_2(\operatorname{sen} x + 1) - 1 = 0$
    (l) $\log^2(\operatorname{arctg} x) + 3\log(\operatorname{arctg} x) + 2 = 0$

29. Para cada uma das seguintes afirmações, diga se ela é verdadeira ou falsa. Se verdadeira, explique porquê; se falsa, dê um exemplo que justifique a sua resposta.

    (a) Se f for uma função, então $f(s+t) = f(s) + f(t)$.
    (b) Se $f(s) = f(t)$, então $s = t$.
    (c) Se f for uma função, então $f(3x) = 3f(x)$.
    (d) Se $x_1 < x_2$ e f for uma função decrescente, então $f(x_1) > f(x_2)$.
    (e) Uma recta vertical intercepta o gráfico de uma função no máximo uma vez.
    (f) Se f e g são funções, então $f \circ g = g \circ f$.
    (g) Se f for bijectiva então $f^{-1}(x) = \frac{1}{f(x)}$.
    (h) É sempre possível dividir por e^x.
    (i) Se $0 < a < b$, então $\ln a < \ln b$.
    (j) Se $x > 0$, então $(\ln x)^6 = 6\ln x$.