Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Cálculo I
Licenciatura em Engenharia Electrotécnica e de Computadores
Licenciatura em Tecnologias de Informação Visual

2003/2004 Folha 2

1. Seja
$$h(x) = \begin{cases} x & \text{se } x < 0 \\ x^2 & \text{se } 0 < x \leq 2 \\ 8 - x & \text{se } x > 2 \end{cases}$$
Calcule, se existirem, os seguintes limites:
   (a) $\lim_{x\to 0^+} h(x)$ (c) $\lim_{x\to 1} h(x)$ (e) $\lim_{x\to 2^+} h(x)$
   (b) $\lim_{x\to 0} h(x)$ (d) $\lim_{x\to 2^-} h(x)$ (f) $\lim_{x\to 2} h(x)$

2. Calcule, quando existir, cada um dos limites. No caso do limite não existir, explique porquê.
   (a) $\lim_{x\to -4} |x+4|$
   (b) $\lim_{x\to -4^-} \dfrac{|x+4|}{x+4}$
   (c) $\lim_{x\to 2} \dfrac{|x-2|}{x-2}$
   (d) $\lim_{x\to 0^-} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{|x|}\right)$
   (e) $\lim_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{|x|}\right)$
   (f) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x$
   (g) $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$
   (h) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^2-2x+1}$
   (i) $\lim_{t\to 9} \dfrac{9-t}{3-\sqrt{t}}$
   (j) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{1+x^2+x^3}{5-2x+x^2}$
   (k) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x}}{x}$
   (l) $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$
   (m) $\lim_{x\to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \sec x$
   (n) $\lim_{x\to 5^+} \ln(x-5)$
   (o) $\lim_{x\to +\infty} \operatorname{cotgh}\left(\sqrt{1+x^2}\right)$

3. Determine as assímptotas horizontais e verticais das funções:
   (a) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ (b) $g(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ (c) $h(x) = \frac{x-9}{\sqrt{4x^2+3x+2}}$

4. Dê um exemplo em que $\lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to a} g(x)$ não existem mas existe...
   (a) $\ldots \lim_{x\to a} (f(x)+g(x))$ (b) $\ldots \lim_{x\to a} (f(x)\cdot g(x))$

5. Use o teorema do limite das funções enquadradas para provar que:
   (a) $\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$
   (b) $\lim_{x\to 0} (\operatorname{tgh} x)\cdot \arccos\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$
   (c) $\lim_{x\to -\infty} \left(\dfrac{\operatorname{sen}^3 x}{x} + \cos^2 x + 3^{1-x}\right) = +\infty$
   (d) $\lim_{x\to 1^-} (\arccos x)\cdot \cos\left(\dfrac{1}{\ln x}\right) = 0$

6. Na Teoria da Relatividade, a fórmula da Contracção de Lorentz
$$L = L_0\sqrt{1-v^2/c^2}$$
expressa o comprimento L de um objecto como uma função da sua velocidade v em relação a um observador, onde L_0 é o comprimento do objecto no repouso e c é a velocidade da luz. Determine $\lim_{v\to c^-} L$ e interprete o resultado. Porque é que é necessário o limite à esquerda?

7. Estude a continuidade das seguintes funções, cujo domínio deve sempre indicar.

(a) $f(x) = \begin{cases} 2e^x - 1 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \in [0,2] \\ \operatorname{sen}(x) & \text{se } x > 2 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} x\cos\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

(d) $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{x-1}\right)$

(e) $f(x) = \arccos\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right)$

(f) $f(x) = \ln(\cosh(x))$

(g) $f(x) = \begin{cases} 2\operatorname{senh} x & \text{se } x < 0 \\ e - \frac{1}{e^x} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

8. A força gravitacional exercida pela Terra sobre uma unidade de massa a uma distância r do centro do planeta é

$$F(r) = \begin{cases} \frac{GMr}{R^3} & \text{se } r < R \\ \frac{GM}{r^2} & \text{se } r \geq R \end{cases}$$

onde M é a massa da Terra, R o seu raio e G a constante gravitacional. F é uma função contínua de r?

9. Seja f a função definida por

$$f(x) = \left(1 - \frac{2}{x^2}\right)^{2003} + \ln\left(2 + \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{2}\right)$$

Mostre que f se anula em pelo menos um ponto do intervalo $]1,2[$.

10. Mostre que a equação...

(a) ...$x^3 - 9x^2 + 7 = 0$ tem três soluções, uma em cada um dos intervalos $]-1,0[$, $]0,1[$ e $]6,9[$.

(b) ...$\cos x = x$ tem pelo menos uma solução no intervalo $]0,1[$.

(c) ...$\ln x = e^{-x}$ tem pelo menos uma solução no intervalo $]1,2[$.

11. Seja f uma função contínua em $[0,1]$ e tal que $0 \leq f(x) \leq 1$, para todos os valores de x no intervalo $[0,1]$. Mostre que existe c em $[0,1]$ tal que $f(c) = c$.

12. Para cada uma das seguintes afirmações, diga se ela é verdadeira ou falsa. Se verdadeira, explique porquê; se falsa, dê um exemplo que justifique a sua resposta.

(a) $\lim\limits_{x\to 4}\left(\frac{2x}{x-4} - \frac{8}{x-4}\right) = \lim\limits_{x\to 4}\left(\frac{2x}{x-4}\right) - \lim\limits_{x\to 4}\left(\frac{8}{x-4}\right)$

(b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+6x-7}{x^2+5x-6} = \frac{\lim\limits_{x\to 1}(x^2+6x-7)}{\lim\limits_{x\to 1}(x^2+5x-6)}$

(c) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-3}{x^2+2x-4} = \frac{\lim\limits_{x\to 1}(x-3)}{\lim\limits_{x\to 1}(x^2+2x-4)}$

(d) Se $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = 2$ e $\lim\limits_{x\to 5} g(x) = 0$, então $\lim\limits_{x\to 5}\frac{f(x)}{g(x)}$ não existe.

(e) Se $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to 5} g(x) = 0$, então $\lim\limits_{x\to 5}\frac{f(x)}{g(x)}$ não existe.

(f) Se $\lim\limits_{x\to 6} f(x)g(x)$ existe, então é igual a $f(6)g(6)$.

(g) Se $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = +\infty$, então $\lim\limits_{x\to 0}(f(x) - g(x)) = 0$

(h) Se a recta $x = 1$ for uma assímptota vertical de $y = f(x)$, então f não está definida em 1.

(i) Se $f(1) > 0$ e $f(3) < 0$, então existe um número c entre 1 e 3 tal que $f(c) = 0$.

(j) Se f for contínua em $[-1,1]$, e $f(-1) = 4$ e $f(1) = 3$, então existe um número r tal que $|r| < 1$ e $f(r) = \pi$.

(k) Se f for contínua em 5, e $f(5) = 2$, então $\lim\limits_{x\to 2} f(4x^2 - 11) = 2$.