Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Cálculo I
Licenciatura em Engenharia Electrotécnica e de Computadores
Licenciatura em Tecnologias de Informação Visual

2003/2004 — Folha 3

1. A quantidade de carga Q em coloumbs que passa através de um ponto num fio até ao instante t (medido em segundos) é dada por $Q(t) = t^3 - 2t^2 + 6t + 2$. Determine o valor da corrente em ampères quando $t = 0.5$ e quando $t = 1$.

2. Determine os pontos da curva $y = x^3 - x^2 - x + 1$ onde a tangente é horizontal.

3. Uma partícula move-se segundo a lei do movimento $s = f(t)$, $t \geq 0$, onde t é medido em segundos e s em metros. Para

   - $f(t) = t^2 - 10t + 12$
   - $f(t) = t^3 - 9t^2 + 15t + 10$
   - $f(t) = \frac{t}{t^2+1}$

   resolva os seguintes problemas:

   (a) Determine a velocidade da partícula no instante t.

   (b) Quando é que a partícula está em repouso?

   (c) Quando é que está a movimentar-se no sentido positivo?

   (d) Determine o espaço total percorrido durante os 8 primeiros segundos.

4. Considere a seguinte função:

$$g(x) = \begin{cases} -1 - 2x & \text{se } x < -1 \\ x^2 & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ x & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

   (a) Determine o conjunto dos pontos onde g é diferenciável.

   (b) Determine a expressão analítica de g'.

   (c) Esboce os gráficos de g e de g'.

5. Supondo que $h(x) = f(g(x))$ e que $g(3) = 6$, $g'(3) = 4$, $f'(3) = 2$, $f'(6) = 7$, determine $h'(3)$.

6. Supondo que $w = u \circ v$ e que $u(0) = 1$, $v(0) = 2$, $u'(0) = 3$, $u'(2) = 4$, $v'(0) = 5$ e $v'(2) = 6$, determine $w'(0)$.

7. Calcule a derivada de cada uma das seguintes funções:

(a) $g(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$
(b) $f(x) = 5 + \frac{x^2+4x-3}{\sqrt{x}}$
(c) $v = x\sqrt{x} + \frac{1}{x^2\sqrt{x}}$
(d) $y = \frac{3t-7}{t^2+5t-4}$
(e) $y = \frac{1}{x^4+x^2+1}$
(f) $y = \frac{e^x}{x+e^x}$
(g) $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$
(h) $f(x) = e^x \operatorname{sen} x$
(i) $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\sec x}$
(j) $y = x \operatorname{sen} x \cos x$
(k) $y = \sqrt[3]{1+x^3}$
(l) $y = \operatorname{sen}(e^x)$
(m) $f(t) = \left(t - \frac{1}{t}\right)^{\frac{3}{2}}$
(n) $f(t) = \operatorname{tg} \sqrt[3]{1 + \operatorname{tg} t}$
(o) $g(x) = (3x-2)^{10}(5x^2 - x + 1)$
(p) $y = e^{x \cos x}$
(q) $y = \operatorname{senh}(\cosh x)$
(r) $y = x \operatorname{argtgh} x + \ln \sqrt{1-x^2}$
(s) $y = x^2 \operatorname{argsenh}(2x)$
(t) $y = (\operatorname{sen}^{-1} x)^2$
(u) $y = x \arccos x - \sqrt{1-x^2}$
(v) $y = x^2 \operatorname{arccotg}(3x)$
(w) $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{arcsen} \sqrt{x})$
(x) $y = \log_{10}(x^2 - x)$
(y) $y = \ln \left| \frac{x^2-4}{2x+5} \right|$

8. Determine os pontos do gráfico da função $f(x) = 2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x$ nos quais a recta tangente é horizontal.

9. Determine uma equação da recta tangente à curva no ponto dado:

(a) $y = \frac{2x}{x+1}, \quad (1, 1)$
(b) $y = \frac{e^x}{x}, \quad (1, e)$
(c) $y = \operatorname{tg} x, \quad (\pi/4, 1)$
(d) $y = \frac{1}{\operatorname{sen} x + \cos x}, \quad (0, 1)$
(e) $y = 10^x, \quad (1, 10)$
(f) $y = \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x), \quad (\pi, 0)$

10. Seja $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$.

(a) Por que é que f é contínua em $\mathbb{R}$?
(b) Mostre que $f(-1) = f(1)$ mas que não existe $c \in]-1, 1[$ tal que $f'(c) = 0$. Por que é que isso não contradiz o Teorema de Rolle?

11. Seja $f(x) = |x - 1|$. Mostre que não existe c tal que $f(3) - f(0) = f'(c)(3 - 0)$. Por que é que isso não contradiz o Teorema do Valor Médio?

12. Utilize o Teorema do Valor Médio para provar a desigualdade

$$|\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b| \leq |a - b| \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

13. Mostre que...

(a) ...a equação $x^5 + 10x + 3 = 0$ tem exactamente uma raíz real.
(b) ...a equação $3x + \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 2$ tem exactamente uma raíz real.
(c) ...a equação $x^5 - 5x + c = 0$ tem no máximo uma raíz no intervalo $[-1, 1]$.
(d) ...a equação $x^4 = c - 4x$ tem no máximo duas raízes reais.

14. Sejam $f(x) = \frac{1}{x}$ e

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x > 0 \\ 1 + \frac{1}{x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Mostre que $f'(x) = g'(x)$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Porque é que esta igualdade não nos permite concluir que $f(x) = g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$?

15. Prove as seguinte igualdades:

    (a) $2 \operatorname{arcsen} x = \arccos(1-2x^2)$, $x \in [0,1]$

    (b) $\operatorname{arctg} x = \operatorname{arcsen} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $x \in \mathbb{R}$

16. Um número real a é um *ponto fixo* de uma função f se $f(a) = a$. Mostre que se f for diferenciável em $\mathbb{R}$ e se $f'(x) \neq 1$ para todo o número real x, então f tem no máximo um ponto fixo.

17. Um agricultor dispõe de 2400 pés de cerca para fazer um curral rectangular na margem de um rio recto. Ele não precisa de cerca ao longo da margem do rio. Quais são as dimensões do curral de área máxima?

18. Um agricultor quer cercar uma área de 1500 metros quadrados num campo rectangular e então dividi-lo ao meio com uma cerca paralela a um dos lados do rectângulo. Como fazer isso de forma a minimizar o custo da cerca?

19. Uma caixa sem tampa deve ser construída a partir de um pedaço quadrado de papelão, com 60 centímetros de largura, cortando fora um quadrado de cada um dos quatro cantos e dobrando por cima os lados. Encontre o maior volume que essa caixa poderá ter.

20. Encontre o ponto sobre a hipérbole $y^2 - x^2 = 4$ que está mais próximo do ponto $(2,0)$.

21. Pretende-se fazer uma lata cilíndrica para receber um litro de óleo. Encontre as dimensões que minimizarão o custo do metal para produzir a lata (recorde que $1\,l = 1000\,cm^3$).

22. Supondo que $\lim_{x\to a} f(x) = 0^+$ e que $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$ (respectivamente $-\infty$) mostre que então $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = 0^+$ (respectivamente $+\infty$).

23. Calcule os seguintes limites. Utilize a regra de L'Hôpital quando tal for possível e apropriado. Se existir um método mais elementar, utilize-o. Se a regra de L'Hôpital não for aplicável, explique porquê.

    (a) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x+1}$

    (b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^9-1}{x^5-1}$

    (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{\operatorname{sen} x}$

    (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x}$

    (e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x \operatorname{sen} x}{1-\cos x}$

    (f) $\displaystyle\lim_{x\to \pi} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$

    (g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{sen} x}$

    (h) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} \ln x$

    (i) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} x^2 e^x$

    (j) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$

    (k) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x \operatorname{tg}\left(\frac{1}{x}\right)$

    (l) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^2}\right)$

    (m) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \operatorname{cossec} x\right)$

    (n) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x}\right)$

    (o) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x + \operatorname{sen} x}$

    (p) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x}$

    (q) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} (x e^{\frac{1}{x}} - x)$

    (r) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} (\ln x)^{\frac{1}{x-1}}$

24. (a) Esboce o gráfico de uma função de domínio $[0,3]$ que tenha um máximo local em 2 e que seja diferenciável em 2.

    (b) Esboce o gráfico de uma função de domínio $[0,3]$ que tenha um máximo local em 2 e que seja contínua mas não diferenciável em 2.

    (c) Esboce o gráfico de uma função de domínio $[0,3]$ que tenha um máximo local em 2 e que não seja contínua em 2.

25. Determine, se existirem, os valores máximos e mínimos locais e absolutos de cada uma das seguintes funções:

(a) $f(x) = 8 - 3x$, $x \in [1, +\infty[$

(b) $f(x) = 3 - 2x$, $x \in]-\infty, 5]$

(c) $f(x) = x^2$, $x \in]0, 2[$

(d) $f(x) = x^2$, $x \in]0, 2]$

(e) $f(x) = x^2$, $x \in [0, 2]$

(f) $f(x) = 3x^2 - 12x + 5$, $x \in [0, 3]$

(g) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 4$, $x \in [-2, 1]$

(h) $f(x) = xe^{-x}$, $x \in]0, 2[$

(i) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ 2 - x^2 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$

(j) $f(x) = 2 - x^4, x \in \mathbb{R}$

(k) $f(x) = x^5, x \in \mathbb{R}$

(l) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}, x \in [0, 2]$

(m) $f(x) = x - 3\ln x$, $x \in [1, 4]$

26. Mostre que se $f(x) = x^4$, então $f''(0) = 0$, mas $(0, 0)$ não é um ponto de inflexão do gráfico de f.

27. Mostre que a função $g(x) = x|x|$ tem um ponto de inflexão em $(0, 0)$ mas que $g''(0)$ não existe.

28. Esboce o gráfico de cada uma das funções dadas, averiguando os seguintes aspectos:

- domínio;
- pontos de intersecção com os eixos coordenados;
- simetria;
- assímptotas;
- intervalos de monotonia;
- valores máximos e mínimos locais;
- concavidades e pontos de inflexão.

(a) $f(x) = 2 - 15x + 9x^2 - x^3$

(b) $f(x) = x - \frac{1}{x}$

(c) $f(x) = e^x - x$

(d) $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$

(e) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

(f) $f(x) = x \ln x$

(g) $f(x) = x\sqrt{5-x}$

(h) $f(x) = \sqrt{x^2+1} - 2x$

(i) $f(x) = \operatorname{sen}(2x) - 2\operatorname{sen} x$

(j) $f(x) = \ln(x^2 - x)$

(k) $f(x) = x + \sqrt{|x|}$

(l) $f(x) = xe^{-x^2}$

(m) $f(x) = x - \operatorname{sen} x$

(n) $f(x) = \operatorname{sen} x - \operatorname{tg} x$

(o) $f(x) = \ln(2e^x - 1)$

29. Para cada uma das seguintes afirmações, diga se ela é verdadeira ou falsa. Se verdadeira, explique porquê; se falsa, dê um exemplo que justifique a sua resposta.

(a) Se f é contínua em a, então é diferenciável em a.

(b) Se $f'(c) = 0$, então f tem um máximo ou um mínimo local em c.

(c) Se f tiver um valor mínimo absoluto em c, então $f'(c) = 0$.

(d) Se f for contínua em $]a, b[$, então f atinge um valor máximo absoluto $f(c)$ e um valor mínimo absoluto $f(d)$ para alguns $c, d \in]a, b[$.

(e) Se f for diferenciável em $\mathbb{R}$ e $f(-1) = f(1)$, então existe um número real c tal que $|c| < 1$ e $f'(c) = 0$.

(f) Se $f'(x) < 0$ para $0 < x < 6$, então f é decrescente em $]0, 6[$.

(g) Se $f''(x) = 0$, então $(2, f(2))$ é um ponto de inflexão da curva $y = f(x)$.

(h) Se $f'(x) = g'(x)$ para $0 < x < 1$, então $f(x) = g(x)$ para $0 < x < 1$.