Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Cálculo I
Licenciatura em Engenharia Electrotécnica e de Computadores
Licenciatura em Tecnologia de Informação Visual

2003/2004 Folha 5

1. Mostre que $y' = 2 + e^{-x^3}$ é uma solução da equação diferencial $y' + 3x^2 y = 6x^2$.

2. Verifique que $y = \frac{2+\ln x}{x}$ é uma solução para o problema de valor inicial

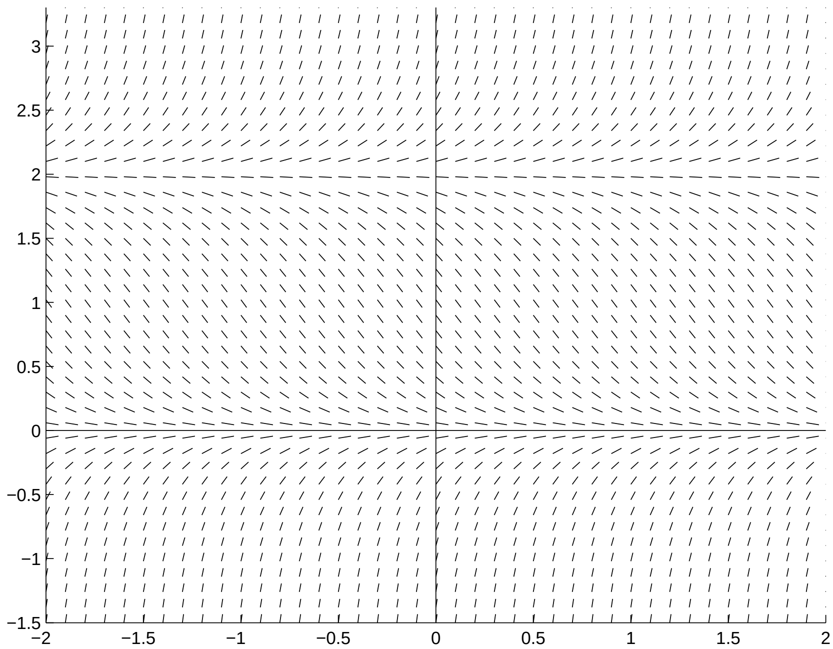
$$x^2 y' + xy = 1 \qquad y(1) = 2.$$

3. Uma determinada população é modelada pela equação diferencial

$$\frac{dP}{dt} = 1,2 \cdot P \cdot \left(1 - \frac{P}{4200}\right).$$

   (a) Para que valores de P a população está a crescer?
   (b) Para que valores de P a população está a diminuir?
   (c) Quais são as soluções de equilíbrio?

4. Considere o seguinte campo de direcções da equação diferencial $y' = 2y(y-2)$.



Determine graficamente a solução que satisfaz a condição dada:

(a) $y(0) = 1$ (b) $y(0) = 2.5$ (c) $y(0) = -1$ (d) $y(1) = 1$

Quais são as soluções de equilíbrio?

5. Use o método de Euler com passo $0,2$ para estimar $y(1)$, onde $y(x)$ é a solução para o problema de valor inicial $y' = x + y^2,\ y(0) = 0$.

6. Use o método de Euler com passo $0,1$ para estimar $y(0,5)$, onde $y(x)$ é a solução para o problema de valor inicial $y' = x^2 + y^2,\ y(0) = 1$.

7. Use o método de Euler com passo $0,2$ para estimar $y(0,4)$, onde $y(x)$ é a solução para o problema de valor inicial $y' = 2xy^2,\ y(0) = 1$. Faça uma nova estimativa utilizando um passo de $0,1$.

8. Resolva cada uma das seguintes equações diferenciais:

   (a) $\frac{dy}{dx} = \frac{e^{2x}}{4y^3}$; (b) $y' = \frac{xy}{2\ln y}$; (c) $\frac{dz}{dt} + e^{t+z} = 0$.

9. Resolva cada um dos seguintes problemas de valor inicial:

   (a) $y' = \mathrm{sen}(5x)y, \quad y(\pi) = -3$; (b) $xe^{-t}\frac{dx}{dt} = t, \quad x(0) = 1$;

   (c) $x + 2y\sqrt{x^2+1}\,\frac{dy}{dx} = 0, \quad y(0) = 1$.

10. Determine uma equação da curva que passa pelo ponto $(1, 1)$ e cuja inclinação em (x, y) é y^2/x^3.

11. Uma cultura de bactérias começa com 500 bactérias e cresce a uma taxa proporcional ao seu tamanho populacional. Depois de 3 horas existem 8000 bactérias.

    (a) Determine uma expressão para o número de bactérias depois de t horas.
    (b) Calcule o número de bactérias e a taxa de crescimento depois de passadas 4 horas.
    (c) Quando é que a população atingirá o número de 30.000 bactérias?

12. A propagação de um boato pode ser modelada da seguinte forma: a taxa de propagação é proporcional ao produto da parte da população que já ouviu o boato com a parte que ainda não ouviu.

    (a) Escreva a equação diferencial correspondente a este modelo e resolva-a.
    (b) Uma vila tem 1000 habitantes. Às 8 horas 80 oitentas pessoas tinham ouvido o boato; e ao meio-dia metade da cidade. A que horas 90% da polulação terá houvido o boato?

13. Indique as equações diferenciais que são lineares:

    (a) $y' + e^x y = x^2y^2$ (b) $y + \mathrm{sen}x = x^3y'$ (c) $xy' + \ln x - x^2y = 0$ (d) $yy' = \mathrm{sen}x$

14. Resolva cada uma das seguintes equações diferenciais:

    (a) $y' + 2y = 2e^x$; (b) $y' = x + 5y$; (c) $xy' + 2y = e^{x^2}$; (d) $y^2\frac{dy}{dx} = x + \sin x$

    (e) $(1 + t)\frac{du}{dt} + u = 1 + t, \quad t > 0$.

15. Resolva cada um dos seguintes problemas de valor inicial:

    (a) $y' + y = x + e^x, \quad y(0) = 0$; (b) $x^2\frac{dy}{dx} + 2xy = \cos x, \quad y(\pi) = 0$.

16. A equação diferencial que governa os circuitos eléctricos é dada por

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E_0\,\mathrm{sen}(\omega t)$$

onde L é a indutância, R é a resistência, ω é a frequência da voltagem, E_0 a voltagem inicial (todas constantes positivas) e I é a intensidade da corrente em função do tempo t. Determine uma expressão que indique a intensidade da corrente em cada instante t, uma vez conhecido o valor inicial I_0.