Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Cálculo I
Licenciatura em Engenharia Electrotécnica e de Computadores
Licenciatura em Tecnologia de Informação Visual

2003/2004 Folha 6

1. Em cada uma das alíneas seguintes, determine o valor do integral definido através da identificação com a área de uma região (que deverá esboçar):

   (a) $\int_{-3}^{2}(2x+6)\,dx$ (b) $\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$ (c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|x-\frac{\pi}{4}\right|\,dx$

2. Calcule os seguintes integrais definidos:

   (a) $\int_0^2 2x\,dx$ (d) $\int_0^{2\pi} 2^x\cos(2^x)\,dx$ (g) $\int_\pi^{2\pi} \operatorname{sen}^4 x\cos x\,dx$ (j) $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2}\,dx$

   (b) $\int_{-2}^{2} \frac{1}{4+x^2}\,dx$ (e) $\int_0^{2\pi} |\cos x|\,dx$ (h) $\int_1^{e^{2\pi}} \operatorname{sen}(\ln x)\,dx$ (k) $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx$

   (c) $\int_0^{2\pi} 2^x\,dx$ (f) $\int_2^5 \frac{t^3+1}{t+1}\,dt$ (i) $\int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{16-x^2}}\,dx$ (l) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{6-5\operatorname{sen} x+\operatorname{sen}^2 x}\,dx$

3. Mostre que são nulos os seguintes integrais:

   (a) $\int_{-1}^{1} x^5\sqrt{x^4+1}\,dx$ e (b) $\int_{-1}^{1} x\operatorname{sen}^2 x\,dx$

4. Suponha que a função f é contínua em $\mathbb{R}$.

   (a) Mostre que
      i. $\int_a^b f(-x)\,dx = \int_{-b}^{-a} f(x)\,dx$
      ii. $\int_a^b f(x+c)\,dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x)\,dx$

   (b) Para o caso em que $f(x)\geq 0$, interprete geometricamente as igualdades anteriores.

5. Se f for contínua em $[a,b]$, mostre que

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

   (*Sugestão*: utilize a desigualdade $-|f(x)|\leq f(x)\leq |f(x)|$).

6. A corrente num fio eléctrico é a derivada da carga: $I(t)=Q'(t)$. O que representa $\int_a^b I(t)\,dt$?

7. A Alabama Instruments Company preparou uma linha de montagem para fabricar uma nova calculadora. A taxa de produção dessas calculadoras após t semanas é modelada pela função

$$\frac{dx}{dt} = 5000\left(1-\frac{100}{(t+100)^2}\right) \text{ calculadoras/semana}$$

   Determine o número de calculadoras produzidas entre o início da terceira semana e o final da quarta semana.

8. Sejam

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } 0 \le x \le 1 \\ 2 - x & \text{se } 1 < x \le 2 \\ 0 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

e

$$g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

   (a) Dê uma expressão a $g(x)$ semelhante à que foi dada para $f(x)$.
   (b) Esboce os gráficos de f e de g.
   (c) Indique os pontos de continuidade de f e de g.
   (d) Indique os pontos onde f e g são diferenciáveis.
   (e) Interprete os resultados da resolução das duas alíneas anteriores à luz do Teorema Fundamental do Cálculo.

9. Determine os intervalos onde o gráfico da função

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t+t^2}$$

tem a concavidade voltada para cima.

10. Calcule

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\left(\frac{x}{x-3}\int_3^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt\right)$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2} e^{t^2}\,dt}{\cos x - 1}$

11. Seja $g : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ uma função com derivada contínua. Sabendo que $g(0) = 2$ e que

$$\int_0^\pi [g'(x)\cos x - g(x)\operatorname{sen} x]\,dx = 4$$

calcule $g(\pi)$.

12. Considere a função real de variável real definida por:

$$F(y) = \int_0^1 x^2 e^{yx}\,dx, \quad y \in \mathbb{R}$$

   (a) Estude a monotonia de F;
   (b) Utilizando uma mudança de variável adequada, mostre que, para todo o y positivo, se tem

$$F(y) = \frac{1}{y^3}\int_0^y t^2 e^t\,dt$$

   (c) Verifique que

$$\lim_{y\to 0^+} F(y) = \frac{1}{3}$$

13. Calcule o limite, reconhecendo a soma como uma soma de Riemann de uma função definida no intervalo $[0,1]$:

   (a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^3}{n^4}$ (b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{i}{n}}$

14. A electricidade doméstica é fornecida na forma de corrente alternada que varia de $155V$ a $-155V$ com uma frequência de 60 ciclos por segundo (Hz). A voltagem é então dada pela seguinte equação:

$$E(t) = 155\,\text{sen}(120\pi t)$$

onde t é o tempo em segundos. Consideremos voltímetros que lêem a voltagem RMS (raíz da média quadrática), que é a raíz quadrada do valor médio de $[E(t)]^2$ num ciclo.

   (a) Calcule a voltagem RMS da corrente doméstica.

   (b) Muitos fornos eléctricos requerem a voltagem RMS de $220V$. Encontre a amplitude A correspondente necessária para a voltagem $E(t) = A\,\text{sen}(120\pi t)$.

15. Mostre que

$$\frac{1}{17} \leq \int_1^2 \frac{1}{1+x^4}\,dx \leq \frac{7}{24}$$

16. Quais dos seguintes símbolos representam integrais impróprios, quais representam integrais definidos e quais não representam integrais definidos ou impróprios?

   (a) $\int_{-2}^{0} \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\,dx$ (c) $\int_{-2}^{2} \text{sen}\,t\,dt$ (e) $\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\,dx$ (g) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{u^2-u}\,dx$

   (b) $\int_{-2}^{2} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$ (d) $\int_{-2}^{2} \frac{1}{x}\,dx$ (f) $\int_{-2}^{2} \sqrt{x^2-4}\,dx$

17. Determine a natureza dos seguintes integrais impróprios e indique os seus valores no caso de convergência:

   (a) $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\,dx$ (d) $\int_{4}^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ (g) $\int_{0}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx$

   (b) $\int_{1}^{+\infty} \frac{2}{x^2}\,dx$ (e) $\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}\,dx$ (h) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$

   (c) $\int_{-\infty}^{0} e^x\,dx$ (f) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^4+9}\,dx$ (i) $\int_{1/2}^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^{1/5}}\,dx$

18. Mostre que o integral impróprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$$

é convergente e de valor $\frac{1}{\alpha-1}$ se $\alpha > 1$, e divergente se $\alpha \leq 1$.

19. Determine a natureza dos seguintes integrais impróprios:

   (a) $\int_{5}^{+\infty} \frac{1}{x^2+6x+12}\,dx$ (c) $\int_{1}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x^3}\,dx$ (e) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\text{sen}\,x}{x^2}\,dx$

   (b) $\int_{0}^{+\infty} \frac{x}{x^3+x^2+1}\,dx$ (d) $\int_{-1}^{+\infty} \frac{3}{2x+\sqrt[3]{x^2+1}+6}\,dx$ (f) $\int_{0}^{1} \frac{1}{\ln(1+\sqrt{x})}\,dx$

20. Use a Regra do Trapézio, a Regra do Ponto Médio e a Regra de Simpson com o valor de n indicado para aproximar o integral dado. Arredonde as aproximações para seis casas decimais.

   (a) $\int_{1}^{2} e^{1/x}\,dx \quad (n=4)$ (b) $\int_{0}^{4} \sqrt{x}\,\text{sen}\,x\,dx \quad (n=8)$ (c) $\int_{0}^{3} \frac{1}{1+y^5}\,dx \quad (n=6)$

21. Calcule um valor de n para o qual a aproximação T_n pela Regra de Trapézio do integral dado tem uma precisão de 10^{-4}:

   (a) $\int_{0}^{1} \cos(x^2)\,dx$ (b) $\int_{0}^{2} e^{-x^2}\,dx$

   Repita o exercício para a aproximação M_n pela regra do Ponto Médio.

22. Calcule um valor de n para o qual a aproximação S_n pela Regra de Simpson do integral $\int_0^1 e^{x^2}\,dx$ tem uma precisão de 10^{-5}.

23. Calcule a área das figuras limitadas...

(a) ...pelas parábolas $y = x^2$ e $x = y^2$;
(b) ...pelas curvas $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{1}{x^2}$ e $x = 2$;
(c) ...pelas curvas $y = \cos x$, $y = \operatorname{sen} 2x$, $x = 0$ e $x = \frac{\pi}{2}$;
(d) ...pelas curvas $y = \operatorname{sen} x$, $y = \operatorname{sen}^3 x$, $x = 0$ e $x = \frac{\pi}{2}$;
(e) ...pelas curvas $y = |x|$, e $y = x^2 - 2$;
(f) ...pela parábola $y^2 = -x + 2y$ e pela recta $x = 0$;
(g) ...pela hipérbole $y^2 - x^2 = 1$ e pela recta $y = 3$;
(h) ...pela elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

24. Considere a região plana $\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq y \leq \frac{1}{2},\ y \leq \cos x\}$.

(a) Determine a área de $\mathcal{A}$.
(b) Determine o volume do sólido gerado pela rotação de $\mathcal{A}$ em torno da recta $y = 0$.

25. Determine o volume do sólido obtido pela rotação da região limitada pelas curvas dadas em torno do eixo especificado:

(a) $y = \operatorname{sen} x$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \pi$, $y = 0$, em torno do eixo dos xx;
(b) $x = y - y^2$, $x = 0$, em torno do eixo dos yy;
(c) $y = x$, $y = \sqrt{x}$, em torno da recta $y = 1$;
(d) $y = x$, $y = \sqrt{x}$, em torno da recta $x = 2$;

26. Considere a região limitada pela curva $y = \cos^2 x$, pelo eixo dos xx e pelas rectas $x = 0$ e $x = \frac{\pi}{2}$.

(a) Determine o volume do sólido gerado pela rotação em torno do eixo dos xx.
(b) Determine o volume do sólido gerado pela rotação em torno do eixo dos yy.

27. Calcule o comprimento de cada uma das seguintes curvas:

(a) $3x = 2(y-1)^{3/2}, \quad 2 \leq y \leq 5$
(b) $y = \ln x - \frac{x^2}{8}, \quad 1 \leq x \leq 4$

28. Atribua, se possível, uma valor à área da região R e um valor ao volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo dos xx, sendo:

(a) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1,\ 0 \leq y \leq \frac{1}{x}\}$
(b) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1,\ 1 \leq y \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\}$
(c) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1,\ 0 \leq y \leq \frac{1}{\sqrt{x}}\}$
(d) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1,\ 0 \leq y \leq \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\}$
(e) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0,\ e^{2x} \leq y \leq e^x\}$
(f) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x \leq 2,\ 0 \leq y \leq \frac{1}{x-1}\}$

29. Para cada uma das seguintes afirmações, diga se ela é verdadeira ou falsa. Se verdadeira, explique porquê; se falsa, dê um exemplo que justifique a sua resposta.

(a) Se f e g forem contínuas em $[a, b]$ então $\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$.
(b) Se f e g forem contínuas em $[a, b]$ então $\int_a^b [f(x)g(x)]\,dx = (\int_a^b f(x)\,dx)(\int_a^b g(x)\,dx)$.
(c) Se f e g forem contínuas em $[a, b]$ então $\int_a^b [5f(x)]\,dx = 5(\int_a^b f(x)\,dx)$.
(d) Se f e g forem contínuas em $[a, b]$ então $\int_a^b [xf(x)]\,dx = x(\int_a^b f(x)\,dx)$.
(e) Se f e g forem contínuas e se $f(x) \geq g(x)$ para $a \leq x \leq b$, então $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$.
(f) Se f e g forem diferenciáveis e se $f(x) \geq g(x)$ para $a < x < b$, então $f'(x) \geq g'(x)$ para $a < x < b$.
(g) Se f for contínua e existir $\lim_{t \to +\infty} \int_{-t}^t f(x)\,dx$ então o integral impróprio $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge e $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t \to +\infty} \int_{-t}^t f(x)\,dx$.
(h) Se para todo $x \in \mathbb{R}$ tivermos $0 \leq f(x) \leq g(x)$ e se $\int_0^{+\infty} g(x)\,dx$ divergir então $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ também diverge.