José Miguel Urbano

Análise Matemática II

– Notas de Curso –

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Coimbra, 2012

Conteúdo

Preâmbulo

Antes de começar, apresentamos algumas reflexões sobre os métodos de ensino e avaliação e sobre como estudar Matemática.

{Métodos de ensino}

As aulas teóricas são aulas de exposição da matéria. A abordagem dos assuntos deve procurar contextualizá-los historicamente e relacioná-los com outros de forma elucidativa e motivadora, salientando a sua relevância em termos de aplicações futuras noutras disciplinas. Os principais resultados devem ser ilustrados com o recurso a abundantes exemplos. Expor a matéria significa essencialmente *fazer* a matemática, ou seja, desenvolver no quadro as demonstrações, explicando cada dedução lógica, justificando cada raciocínio. As demonstrações devem ser completas ou então omitir-se. Não são admissíveis expressões como *um simples raciocínio conduz a...*(o raciocínio em causa raramente é simples) ou *por um resultado conhecido...*(ocorre sempre a pergunta: conhecido por quem?); semelhantes locuções são, normalmente, a manifestação de dificuldades experimentadas por quem as utiliza e só servem o propósito de tornar nebuloso o que deve ser cristalino. Não há demonstrações fáceis, nem difíceis; há demonstrações claras, as que se percebem integralmente, e demonstrações obscuras, as restantes. A função do professor é conduzir o estudante na procura da clareza que resulta da compreensão plena dos raciocínios. É esta simplicidade que fascina quem gosta de Matemática.

As aulas não dispensam a adopção de um texto escrito, trate-se de um livro de referência ou de notas de curso redigidas pelo professor. O estudante deve ter à partida a noção exacta daquilo que o espera, conhecer em pormenor o programa da disciplina, ser-lhe proporcionada uma visão global dos assuntos em estudo. Também as regras de avaliação devem ser claramente explicitadas no início do curso e fornecida a bibliografia complementar julgada adequada.

As aulas teóricas-práticas devem cumprir o objectivo de estimular o trabalho individual do estudante e de o ajudar a marcar o seu ritmo de estudo. O professor fornece, em cada semana, uma lista de problemas que os estudantes deverão resolver até à aula seguinte, onde serão discutidas e esclarecidas as eventuais dificuldades e dúvidas. Deve excluir-se radicalmente o cenário em que o professor resolve os problemas no quadro e os alunos copiam a resolução para o caderno. Tal prática é uma pura perda de tempo ou, sem brandura, um circular jogo de enganos: julga o professor que ensina e o aluno que aprende, quando tudo não passa de um equívoco estéril, ainda que cúmplice.

{**Estudar Matemática**}

Ao estudante é indicado, com antecedência, que assunto será exposto em cada lição, sendo fortemente incentivado a ler, mesmo que superficialmente, a matéria em questão no livro de texto. Os méritos de uma leitura prévia às aulas teóricas são evidentes: familiarização com conceitos e notações, primeiro contacto com dificuldades técnicas, possibilidade de suprir certas lacunas relacionadas com conhecimentos supostamente adquiridos. Acresce um outro, mais difuso mas não menos relevante, relacionado com a estimulação do processo mental de assimilação passiva que faz com que, da noite para o dia (por vezes, mesmo *literalmente*), certos conceitos se tornem claros ou facilmente relacionáveis com outros sem que, pelo menos na aparência, se faça para isso qualquer esforço.

Aprender ouvindo, aprender lendo e aprender fazendo são processos distintos e complementares. E é desta última natureza que deve ser o estudo que se segue à exposição da matéria nas aulas. É com ele que o estudante aprende realmente, *ou não*, o que lhe está a ser ensinado. Este estudo deve ser individual, profundo e completo, de papel e lápis, dirigido à compreensão integral dos conceitos e das demonstrações e complementado com a resolução de exercícios de aplicação.

{**Avaliação**}

A componente principal da avaliação consiste na realização de um exame final escrito (com duas chamadas). Sujeitar os alunos à pressão de uma prova final é um incentivo indispensável ao estudo individual, persistente e continuado, para além de convidar o estudante a adquirir uma visão global das matérias leccionadas. Acresce que a preparação assim adquirida pode vir a revelar-se decisiva para o êxito na vida profissional (seja na Universidade, seja numa empresa), onde o que faz a diferença se revela normalmente de forma discreta e não tanto contínua.

As classificações de mérito (superiores a 17 valores) habilitam o estudante a realizar um exame escrito suplementar. Este exame é facultativo, particularmente exigente e decisivo na atribuição da nota final aos alunos que a ele tenham acesso. Aquela não será, em circunstância alguma, inferior a 17 valores (a classificação que será atribuída a quem não comparecer ao exame suplementar).

1 Sucessões Numéricas

Uma sucessão numérica, ou sucessão de números reais, é uma função real de variável natural, ou seja, uma aplicação de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$:

$$u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Como, para uma sucessão numérica, o domínio e o conjunto de chegada são sempre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$, respectivamente, omite-se a referência explícita a estes conjuntos e identifica-se completamente a sucessão com a indicação da lei de transformação $u(n)$, que se designa por termo geral da sucessão e se representa por u_n. Escreve-se $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_n)_n$ ou, mais simplesmente, (u_n) para indicar a sucessão cujo termo geral é u_n.

O conjunto dos termos da sucessão (u_n) é o seu contradomínio

$$u(\mathbb{N}) = \{u_n \,:\, n \in \mathbb{N}\}.$$

Exemplo 1.1 O conjunto dos termos da sucessão de termo geral $u_n = (-1)^n$ é o conjunto $\{-1, 1\}$. O conjunto dos termos da sucessão de termo geral $v_n = 2n$ é o conjunto dos números pares.

Definição 1.1 *Uma sucessão (u_n) diz-se* ***limitada*** *se o conjunto dos seus termos for limitado, ou seja, se*

$$\exists\, L > 0 : \quad |u_n| < L, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Isto significa que $u(\mathbb{N}) \subset (-L, L)$.

Exemplo 1.2 A sucessão $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada. De facto, o conjunto dos seus termos está contido no intervalo $(0, 1]$ e portanto existe $L > 0$, que pode ser $L = 2$, por exemplo, tal que

$$\left|\frac{1}{n}\right| < 2, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Já a sucessão $(2n)_{n\in\mathbb{N}}$ não é limitada pois, dado qualquer número real positivo L, existe sempre um número par maior do que L.

Definição 1.2 *Uma sucessão* (u_n) *diz-se* ***crescente*** *se*

$$u_{n+1} \geq u_n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \tag{2}$$

e diz-se ***decrescente*** *se*

$$u_{n+1} \leq u_n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Se as desigualdades em (2) *e* (3) *forem estritas, acrescenta-se o qualificativo* ***estritamente****.*

Uma sucessão diz-se ***(estritamente) monótona*** *se for (estrictamente) crescente ou (estritamente) decrescente.*

Exemplo 1.3 A sucessão de termo geral $u_n = \frac{n}{n+1}$ é estritamente crescente. Na verdade,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} &= \frac{n^2 + 2n + 1 - n^2 - 2n}{(n+2)(n+1)} \\ &= \frac{1}{(n+2)(n+1)} > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Exemplo 1.4 A sucessão de termo geral $w_n = cos(n\pi)$ não é monótona. De facto,

$$w_2 - w_1 = 1 - (-1) = 2 > 0 \qquad \text{e} \qquad w_3 - w_2 = -1 - 1 = -2 < 0.$$

Definição 1.3 *Uma* ***subsucessão*** *da sucessão* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma restrição de* u *a um subconjunto infinito* $\{n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots\}$ *de* $\mathbb{N}$*. Designa-se por* $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$*.*

Exemplo 1.5 A sucessão $(\frac{1}{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ é uma subsucessão (a subsucessão dos termos de ordem par) da sucessão $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

1.1 Sucessões convergentes

A noção central da Análise é a noção de limite. O caso mais simples de um limite é o limite de uma sucessão.

Definição 1.4 *Um número real $a \in \mathbb{R}$ diz-se* ***limite*** *da sucessão (u_n) se*

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}: \quad n > n_0 \Longrightarrow |u_n - a| < \epsilon. \tag{4}$$

Diz-se que a sucessão (u_n) converge para a e escreve-se $\lim u_n = a$.

No sentido de interpretar a definição de limite, escreva-se a condição $|u_n - a| < \epsilon$ na forma equivalente $a - \epsilon < u_n < a + \epsilon$, ou ainda

$$u_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon).$$

A um intervalo do tipo $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ chama-se uma *vizinhança* de a.

É agora claro o significado de (4): por mais pequeno que seja $\epsilon > 0$, ou seja, por menor que seja a amplitude da vizinhança $(a-\epsilon, a+\epsilon)$, existe sempre uma ordem n_0, a partir da qual todos os termos da sucessão pertencem a essa vizinhança. Esta pertença a uma vizinhança de a é uma forma de *medir* a proximidade a a e, portanto, uma sucessão tem limite a se os seus termos se tornarem arbitrariamente próximos de a. A ordem n_0 depende de ϵ e, tipicamente, será tanto maior quanto menor for ϵ.

Definição 1.5 *Uma sucessão diz-se* ***convergente*** *se tiver limite. Caso contrário, diz-se* ***divergente***.

Teorema 1.1 (Unicidade do limite) *Uma sucessão não pode ter dois limites diferentes.*

Demonstração **[Reductio ad absurdum]**: Suponhamos que $\lim u_n = a$, $\lim u_n = b$ e, sem perda de generalidade[1], que $a < b$.

Seja $\epsilon = \frac{b-a}{2} > 0$. Como $\lim u_n = a$, existe uma ordem n_0 tal que

$$n > n_0 \Longrightarrow u_n \in \left(a - \frac{b-a}{2}, a + \frac{b-a}{2}\right) = \left(\frac{3a-b}{2}, \frac{a+b}{2}\right).$$

Por outro lado, como $\lim u_n = b$, existe uma ordem n_1 tal que

$$n > n_1 \Longrightarrow u_n \in \left(b - \frac{b-a}{2}, b + \frac{b-a}{2}\right) = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{3b-a}{2}\right).$$

[1] o que isto significa é que se fosse $a > b$ a demonstração seria inteiramente análoga; convença-se, demonstrando o teorema para esse caso.

Seja $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$. Então

$$n > n_2 \Longrightarrow u_n \in \left(\frac{3a-b}{2}, \frac{a+b}{2}\right) \cap \left(\frac{a+b}{2}, \frac{3b-a}{2}\right) = \emptyset,$$

o que é absurdo.

$\square$

Teorema 1.2 *Se* $\lim u_n = a$ *então toda a subsucessão de* (u_n) *converge para o limite* a*.*

Demonstração: Seja $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ a subsucessão. Dado $\epsilon > 0$, existe uma ordem $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Longrightarrow u_n \in (a-\epsilon, a+\epsilon).$$

Em particular, tem-se

$$n_k > n_0 \Longrightarrow u_{n_k} \in (a-\epsilon, a+\epsilon)$$

e portanto $\lim u_{n_k} = a$.

$\square$

Observação 1.1 Este resultado usa-se normalmente para mostrar que uma sucessão não tem limite, exibindo duas subsucessões com limites distintos. Por exemplo, a sucessão de termo geral $(-1)^n$ é divergente porque a subsucessão dos seus termos de ordem par converge para 1 e a subsucessão dos seus termos de ordem ímpar converge para -1.

Teorema 1.3 *Toda a sucessão convergente é limitada.*

Demonstração: Seja $\lim u_n = a$. Escolhido $\epsilon = 1$, existe uma ordem n_0 tal que

$$n > n_0 \Longrightarrow u_n \in (a-1, a+1)\,.$$

Seja

$$L = \max\Big\{|u_1|, |u_2|, \ldots, |u_{n_0}|, |a-1|, |a+1|\Big\} + 1 > 0$$

(note que o conjunto é finito, tem $n_0 + 2$ elementos). Então

$$|u_n| < L, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

$\square$

Observação 1.2 O recíproco é falso. A sucessão de termo geral $(-1)^n$ é limitada mas, como já se viu anteriormente, não converge.

Teorema 1.4 *Toda a sucessão monótona e limitada é convergente.*

Demonstração: Seja (u_n) uma sucessão limitada e, sem perda de generalidade, crescente. Por ser limitada, existe

$$a = \sup \{u_n \ : \ n \in \mathbb{N}\} .$$

Mostremos que $\lim u_n = a$. Dado $\epsilon > 0$, $a - \epsilon$ não é um majorante do conjunto dos termos da sucessão pois é menor do que o seu supremo a, que é o menor dos majorantes do conjunto. Logo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a - \epsilon < u_{n_0} \leq a$. Mas como (u_n) é crescente,

$$n > n_0 \Longrightarrow \ a - \epsilon < u_{n_0} \leq u_n < a + \epsilon \ \Longrightarrow |u_n - a| < \epsilon$$

e a conclusão é imediata.

$\square$

Observação 1.3 A demonstração mostra que se a sucessão for crescente converge para o supremo do conjunto dos seus termos; analogamente, se for decrescente converge para o ínfimo do conjunto dos seus termos.

Exemplo 1.6 A sucessão $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ é (estritamente) decrescente e limitada. Tem-se então:

$$\lim \frac{1}{n} = \inf \left\{ \frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N} \right\} = 0.$$

1.2 Propriedades do limite

Estudam-se nesta secção algumas propriedades do limite de uma sucessão.

Teorema 1.5 *Seja $a = \lim u_n$. Se $b < a$ então existe uma ordem $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$n > n_0 \Longrightarrow b < u_n.$$

Demonstração: Seja $\epsilon = a - b > 0$. Como $\lim u_n = a$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Longrightarrow \; a - \epsilon < u_n < a + \epsilon \; \Longrightarrow b < u_n.$$

$\square$

Corolário 1.1 *Seja $a = \lim u_n$. Se $a > 0$ então existe uma ordem $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$n > n_0 \Longrightarrow u_n > 0.$$

Observação 1.4 São válidos resultados análogos para os casos $b > a$ e $a < 0$, respectivamente.

Corolário 1.2 *Sejam $a = \lim u_n$ e $b = \lim v_n$. Se existe uma ordem $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$n > n_0 \Longrightarrow u_n \leq v_n$$

então $a \leq b$.

Demonstração: Se fosse $a > b$, então pelo Teorema 1.5, ter-se-ia, a partir de uma certa ordem

$$v_n < \frac{a+b}{2} < u_n$$

o que contraria a hipótese.

$\square$

Teorema 1.6 (Sucessões enquadradas) *Se $\lim u_n = \lim v_n = a$ e existe uma ordem $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$u_n \leq w_n \leq v_n \;, \quad \forall n > n_0$$

então $\lim w_n = a$.

Demonstração: Dado $\epsilon > 0$ arbitrário, existem ordens $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$n > n_1 \Longrightarrow a - \epsilon < u_n < a + \epsilon;$$

$$n > n_2 \Longrightarrow a - \epsilon < v_n < a + \epsilon.$$

Seja $n_3 = \max\{n_0, n_1, n_2\}$; então

$$n > n_3 \Longrightarrow a - \epsilon < u_n \leq w_n \leq v_n < a + \epsilon$$

donde $\lim w_n = a$.

$\square$

Exemplo 1.7 Tem-se

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}\ , \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

e portanto $\lim \frac{\sin n}{n} = 0$.

Teorema 1.7 *Se* $\lim u_n = 0$ *e* (v_n) *é limitada então* $\lim(u_n v_n) = 0$.

Demonstração: Como (v_n) é limitada, existe $L > 0$ tal que

$$|v_n| < L, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Dado $\epsilon > 0$ arbitrário, $\epsilon/L > 0$ e, como $\lim u_n = 0$, existe uma ordem $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} n > n_0 \quad &\Longrightarrow \quad |u_n| < \frac{\epsilon}{L} \\ &\Longrightarrow \quad |u_n v_n| = |u_n|\,|v_n| < \frac{\epsilon}{L}\, L = \epsilon. \end{aligned}$$

$\square$

Exemplo 1.8 Como $(-1)^n$ é limitada e $\lim 1/n = 0$ tem-se

$$\lim \frac{(-1)^n}{n} = 0.$$

Teorema 1.8 (Álgebra dos limites) *Se* $\lim u_n = a$ *e* $\lim v_n = b$ *então*

1. $\lim(u_n \pm v_n) = a \pm b$;
2. $\lim(u_n v_n) = ab$;
3. $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{a}{b} \quad$ *se* $\quad b \neq 0$.

Demonstração:

1. Dado $\epsilon > 0$ arbitrário, existem ordens $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$n > n_1 \Longrightarrow |u_n - a| < \epsilon/2;$$

$$n > n_2 \Longrightarrow |v_n - b| < \epsilon/2.$$

   Seja $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$; então

$$\begin{aligned} n > n_0 \Longrightarrow |(u_n + v_n) - (a+b)| &= |(u_n - a) + (v_n - b)| \\ &\leq |u_n - a| + |v_n - b| \\ &< \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon. \end{aligned}$$

   O outro caso é análogo.

2. Escrevendo

$$u_n v_n - ab = u_n(v_n - b) + (u_n - a)b$$

   o resultado segue-se do Teorema 1.3, do Teorema 1.7 e da parte 1.

3. Como $\lim(bv_n) = b^2 > 0$, pondo $\epsilon = b^2/2 > 0$, existe uma ordem $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} n > n_0 \quad &\Longrightarrow \quad b^2 - \frac{b^2}{2} < bv_n < b^2 + \frac{b^2}{2} \\ &\Longrightarrow \quad \frac{b^2}{2} < bv_n < \frac{3b^2}{2} \\ &\Longrightarrow \quad \frac{2}{3b^2} < \frac{1}{bv_n} < \frac{2}{b^2} \end{aligned}$$

   e portanto a sucessão $\left(\dfrac{1}{bv_n}\right)$ é limitada. A conclusão segue-se da igualdade

$$\frac{u_n}{v_n} - \frac{a}{b} = (bu_n - av_n)\frac{1}{bv_n},$$

   das partes 1. e 2. e do Teorema 1.7.

$\square$

1.3 Limites infinitos

Vejamos agora o que significa o limite de uma sucessão ser infinito.

Definição 1.6 *Diz-se que a sucessão* (u_n) *tende para* $+\infty$ *se*

$$\forall\, A > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}: \quad n > n_0 \Longrightarrow u_n > A.$$

Diz-se que a sucessão (v_n) *tende para* $-\infty$ *se*

$$\forall\, A > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}: \quad n > n_0 \Longrightarrow v_n < -A.$$

Escreve-se então, respectivamente, $\lim u_n = +\infty$ *e* $\lim v_n = -\infty$*.*

Observação 1.5 Observe-se enfaticamente que $+\infty$ e $-\infty$ não são números reais e, portanto, se $\lim u_n = +\infty$ ou $\lim v_n = -\infty$ as sucessões são divergentes.

É evidente que se $\lim u_n = +\infty$ então (u_n) não é limitada superiormente. O recíproco é falso como é evidenciado pelo contra-exemplo

$$u_n = [1 + (-1)^n]\, n.$$

Por outro lado, se (u_n) for crescente e não for limitada então fatalmente será $\lim u_n = +\infty$. Convença-se, efectuando a demonstração.

Teorema 1.9

1. *Se* $\lim u_n = +\infty$ *e* (v_n) *é limitada inferiormente então*

$$\lim(u_n + v_n) = +\infty.$$

2. *Se* $\lim u_n = +\infty$ *e* (v_n) *é limitada inferiormente por um número positivo então*

$$\lim(u_n v_n) = +\infty.$$

3. *Se* $u_n > c > 0$*,* $\forall n \in \mathbb{N}$*,* $v_n > 0$*,* $\forall n \in \mathbb{N}$ *e* $\lim v_n = 0$ *então*

$$\lim \frac{u_n}{v_n} = +\infty.$$

4. Se (u_n) é limitada e $\lim v_n = +\infty$ então

$$\lim \frac{u_n}{v_n} = 0.$$

DEMONSTRAÇÃO:

1. Como (v_n) é limitada inferiormente, existe $c \in \mathbb{R}^-$ tal que $v_n \geq c$, para todo o $n \in \mathbb{N}$. Dado $A > 0$ arbitrário, existe uma ordem $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que
$$n > n_0 \Longrightarrow u_n > A - c.$$
Então
$$n > n_0 \Longrightarrow u_n + v_n > A - c + c = A.$$

2. Seja $v_n \geq c > 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$. Dado $A > 0$ arbitrário, existe uma ordem $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que
$$n > n_0 \Longrightarrow u_n > \frac{A}{c}.$$
Então
$$n > n_0 \Longrightarrow u_n v_n > \frac{A}{c}\, c = A.$$

3. Dado $A > 0$ arbitrário, existe uma ordem $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que
$$n > n_0 \Longrightarrow v_n < \frac{c}{A}.$$
Então
$$n > n_0 \Longrightarrow \frac{u_n}{v_n} > c\, \frac{A}{c} = A.$$

4. Como (u_n) é limitada, existe $L > 0$ tal que $|u_n| < L$, para todo o $n \in \mathbb{N}$. Dado $\epsilon > 0$ arbitrário, existe uma ordem $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que
$$n > n_0 \Longrightarrow v_n > \frac{L}{\epsilon}.$$
Então
$$n > n_0 \Longrightarrow \left|\frac{u_n}{v_n}\right| < L\, \frac{\epsilon}{L} = \epsilon.$$

$\square$

As hipóteses no enunciado do teorema anterior excluem as situações genericamente designadas por *indeterminações* ou expressões indeterminadas. Por exemplo no primeiro item, não pode acontecer $\lim u_n = +\infty$ e $\lim v_n = -\infty$, caso em que não é possível determinar *a priori* o valor de $\lim(u_n + v_n)$. Na verdade, esse limite pode, consoante os casos,

- não existir: $u_n = n + (-1)^n$ e $v_n = -n$;
- ser um qualquer número real a: $u_n = n + a$ e $v_n = -n$;
- ser $+\infty$: $u_n = 2n$ e $v_n = -n$;
- ser $-\infty$: $u_n = n$ e $v_n = -2n$.

Por isso se diz que a expressão $\infty - \infty$ é uma indeterminação. Nos outros items, as hipóteses excluem outras indeterminações como

$$0 \times \infty \ , \qquad \frac{0}{0} \ , \qquad \frac{\infty}{\infty}.$$

São também indeterminações

$$\infty^0 \ , \qquad 1^\infty \qquad \text{e} \qquad 0^0.$$

Os limites mais importantes da Análise resultam de expressões indeterminadas; o caso mais evidente é o da derivada.

2 Séries Numéricas

A noção de soma infinita de números reais é o objecto deste capítulo. A atribuição de um significado matemático preciso a uma expressão do tipo $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$, com uma infinidade de parcelas, faz uso do conceito de limite, ubíquo em Análise Matemática.

2.1 Séries convergentes e séries divergentes

Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de números reais. A série numérica de termo geral a_n é a soma infinita $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Definição 2.1 *A sucessão associada*[2] *à série numérica* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *é a sucessão de termo geral*

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \ .$$

Definição 2.2 *A **série** numérica* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *diz-se **convergente** se a sua sucessão associada* (s_n) *for convergente. Nesse caso, chama-se **soma da série** ao limite da sucessão associada e escreve-se*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \lim s_n \ .$$

*Se a sua sucessão associada for divergente, a **série** diz-se **divergente**. Nesse caso, não faz sentido falar em soma.*

Observação 2.1 A variação do índice mudo n na expressão que define a série não tem necessariamente de ocorrer em $\mathbb{N}$, ou seja, de 1 a $+\infty$. Por vezes, é conveniente considerar séries do tipo $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, ou mesmo $\sum_{n=p}^{+\infty} a_n$, com p um inteiro.

---

[2] ou sucessão das somas parciais ou sucessão das reduzidas

Exemplo 2.1 Seja $a \in \mathbb{R}$. À série numérica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a^n = a + a^2 + a^3 + \ldots$$

chama-se **série geométrica** de razão a. A sua sucessão associada é

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a^i = \begin{cases} a\,\dfrac{1-a^n}{1-a} & \text{se} \quad a \neq 1 \\ \\ n & \text{se} \quad a = 1 \end{cases} .$$

A série é convergente (e a sua soma é $\frac{a}{1-a}$) se $|a| < 1$ e divergente se $|a| \geq 1$.

Exemplo 2.2 A série numérica, dita **série telescópica**,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

tem como sucessão associada

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} . \end{aligned}$$

A série é portanto convergente (e a sua soma é 1).

A determinação da soma de uma série numérica, quando convergente, exige normalmente o recurso a séries de funções, que serão estudadas mais adiante. Os casos em que é possível obter a soma usando apenas a definição esgotam-se praticamente nos exemplos anteriores e suas variantes. O principal objectivo de ora em diante vai ser o da determinação da natureza de uma dada série numérica, isto é, o de decidir se a série é convergente ou divergente. Neste contexto, assume um carácter irrelevante a indicação expressa dos índices na escrita do somatório e passaremos a usar simplesmente a notação $\sum a_n$ para nos referirmos a uma série numérica.

O próximo resultado é uma condição necessária de convergência.

Teorema 2.1 *Se* $\sum a_n$ *é uma série convergente então* $\lim a_n = 0$.

DEMONSTRAÇÃO: Seja (s_n) a sucessão associada à série e $s = \lim s_n$ a soma da série. Define-se uma nova sucessão (t_n), com

$$t_n = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad n = 1 \\ \\ s_{n-1} & \text{se} \quad n \geq 2 \end{cases} \quad .$$

É evidente que $\lim t_n = \lim s_n = s$ e que $s_n - t_n = a_n$. Assim

$$\lim a_n = \lim(s_n - t_n) = \lim s_n - \lim t_n = s - s = 0 \ .$$

□

Portanto, se o termo geral de uma série numérica não tender para zero conclui-se imediatamente que a série é divergente. No entanto, o recíproco do teorema anterior é falso. O exemplo clássico é dado pelo

Exemplo 2.3 A série harmónica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \ ,$$

cujo termo geral tende para zero, é divergente. De facto, a subsucessão $(s_{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ da sua sucessão associada é divergente:

$$\begin{aligned} s_{2^n} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \ldots \\ &\qquad + \underbrace{\left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right)}_{2^{n-1} \text{ parcelas}} \\ &> 1 + \frac{1}{2} + 2\,\frac{1}{4} + 4\,\frac{1}{8} + \ldots + 2^{n-1}\,\frac{1}{2^n} \\ &= 1 + n\,\frac{1}{2} \longrightarrow +\infty \ . \end{aligned}$$

A sucessão associada a uma série $\sum a_n$ de termos não-negativos $a_n \geq 0$ é obviamente crescente pois

$$s_{n+1} - s_n = a_{n+1} \geq 0 \ , \ \forall n.$$

Assim, a série converge se, e só se, (s_n) for limitada. E diverge se, e só se, $\lim s_n = +\infty$. Neste caso, escrevemos $\sum a_n = +\infty$.

Exemplo 2.4 A série de termos positivos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \ ,$$

com $\alpha > 1$, é convergente pois a sua sucessão associada é limitada:

$$0 \leq s_n \leq c \ , \ \forall n \in \mathbb{N} \ .$$

Na verdade, dado $n \in \mathbb{N}$, seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $n \leq 2^k - 1$. Então,

$$\begin{aligned}
s_n &\leq s_{2^k-1} \\
&= 1 + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha}\right) + \ldots \\
&\qquad + \underbrace{\left(\frac{1}{(2^{k-1})^\alpha} + \ldots + \frac{1}{(2^k-1)^\alpha}\right)}_{2^{k-1} \text{ parcelas}} \\
&\leq 1 + \frac{2}{2^\alpha} + \frac{4}{4^\alpha} + \ldots + \frac{2^{k-1}}{(2^{k-1})^\alpha} \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{2}{2^\alpha}\right)^i \leq \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{2^\alpha}\right)^i = \frac{1}{1-2^{1-\alpha}} \equiv c \ ,
\end{aligned}$$

visto que a razão da série geométrica é $0 < 2^{1-\alpha} < 1$ porque $\alpha > 1$.

Apresentamos de seguida um **critério de comparação** para séries de termos não-negativos.

Teorema 2.2 *Sejam* $\sum a_n$ *e* $\sum b_n$ *séries de termos não-negativos tais que, para uma constante* $c > 0$ *e um certo* $n_0 \in \mathbb{N}$,

$$a_n \leq c\, b_n \ , \ \forall n > n_0 \ . \tag{5}$$

Então se $\sum b_n$ *convergir,* $\sum a_n$ *também converge.*

Demonstração: Sem perda de generalidade, podemos supor que (5) é válida para todo o $n \in \mathbb{N}$. Sendo (s_n) e (t_n) as sucessões associadas, respectivamente, a $\sum a_n$ e $\sum b_n$, tem-se imediatamente

$$s_n \leq c\, t_n \ , \ \forall n \in \mathbb{N} \ .$$

Sendo $\sum b_n$ convergente, (t_n) é limitada:

$$\exists\, M > 0 \ : \ 0 \leq t_n \leq M \ , \ \forall\, n \in \mathbb{N} \ .$$

Logo, (s_n) também é limitada: $0 \leq s_n \leq c\, M \ , \ \forall n \in \mathbb{N}$. Segue-se que $\sum a_n$ é convergente.

$\square$

Exemplo 2.5 A série de termos positivos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \ ,$$

com $\alpha < 1$, é divergente. Na verdade,

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^\alpha} \ , \ \forall n \in \mathbb{N}$$

e a conclusão resulta do critério de comparação e da divergência da série harmónica.

2.2 Convergência absoluta e convergência condicional

Definição 2.3 *Uma série* $\sum a_n$ *diz-se* ***absolutamente convergente*** *se a série dos módulos* $\sum |a_n|$ *for convergente.*

Exemplo 2.6 Toda a série convergente de termos não-negativos é absolutamente convergente.

Exemplo 2.7 A série geométrica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

é absolutamente convergente.

Exemplo 2.8 A série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

não é absolutamente convergente já que a sua série dos módulos é a série harmónica $\sum \frac{1}{n}$ que é divergente.

Definição 2.4 *Uma série convergente que não seja absolutamente convergente diz-se* ***condicionalmente convergente****.*

Teorema 2.3 (Critério de Leibniz) *Seja (a_n) uma sucessão decrescente com $\lim a_n = 0$. Então a série $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}a_n$ é convergente.*

Demonstração: A sucessão associada à série é

$$s_n = a_1 - a_2 + a_3 + \ldots + (-1)^{n+1}a_n \ .$$

A subsucessão (s_{2n}) dos termos de ordem par é crescente já que

$$s_{2n+2} - s_{2n} = -a_{2n+2} + a_{2n+1} \geq 0 \ ;$$

a subsucessão (s_{2n-1}) dos termos de ordem ímpar é decrescente já que

$$s_{2n+1} - s_{2n-1} = a_{2n+1} - a_{2n} \leq 0 \ .$$

Por outro lado,

$$s_{2n} - s_{2n-1} = -a_{2n} \leq 0 \tag{6}$$

e portanto tem-se

$$s_2 \leq s_4 \leq \ldots \leq s_{2n} \leq \ldots \leq s_{2n-1} \leq \ldots \leq s_3 \leq s_1 \ .$$

Assim, ambas as subsucessões são limitadas inferiormente por s_2 e superiormente por s_1. Como também são monótonas, são convergentes. Resulta então de (6) que

$$\lim s_{2n} - \lim s_{2n-1} = \lim (s_{2n} - s_{2n-1}) = -\lim a_{2n} = 0$$

e portanto $\lim s_{2n} = \lim s_{2n-1}$ donde (s_n) é convergente.

$\square$

Exemplo 2.9 A série do **Exemplo 2.8** é condicionalmente convergente. A série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

é condicionalmente convergente. Porquê?

Mostremos agora que toda a série absolutamente convergente é convergente. Dada uma sucessão (a_n), definimos duas novas sucessões:

$$p_n = \max\{a_n, 0\} = \begin{cases} a_n & \text{se} \quad a_n \geq 0 \\ \\ 0 & \text{se} \quad a_n \leq 0 \end{cases}$$

designada por **parte positiva** de a_n; e

$$q_n = \max\{-a_n, 0\} = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad a_n \geq 0 \\ \\ -a_n & \text{se} \quad a_n \leq 0 \end{cases}$$

designada por **parte negativa** de a_n. São de verificação imediata as seguintes propriedades das partes positiva e negativa:

$$p_n, q_n \geq 0 \quad ; \qquad p_n + q_n = |a_n| \quad ; \qquad p_n - q_n = a_n \ .$$

Teorema 2.4 *Toda a série absolutamente convergente é convergente.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja $\sum |a_n|$ convergente. Como $p_n, q_n \leq |a_n|$, segue-se do **Teorema 2.2** que $\sum p_n$ e $\sum q_n$ são convergentes. Assim, também é convergente a série $\sum a_n = \sum (p_n - q_n) = \sum p_n - \sum q_n$.

□

Observação 2.2 O resultado pode interpretar-se do seguinte modo: dada uma série convergente de termos não-negativos, nenhuma troca de sinais dos termos da série altera a sua natureza.

Corolário 2.1 *Se $\sum a_n$ for condicionalmente convergente então $\sum p_n = \sum q_n = +\infty$.*

DEMONSTRAÇÃO: Se convergir uma das séries, por exemplo $\sum p_n$, ter-se-á $\sum q_n = \sum (p_n - a_n) = \sum p_n - \sum a_n$ e a outra também converge. Mas então $\sum |a_n| = \sum (p_n + q_n) = \sum p_n + \sum q_n$ é convergente, o que é absurdo.

□

2.3 Critérios de convergência

Teorema 2.5 *Seja $\sum b_n$ uma série absolutamente convergente, com $b_n \neq 0$, $\forall n$. Se a sucessão $\left(a_n / b_n\right)_n$ for limitada (em particular, se for convergente) então a série $\sum a_n$ é absolutamente convergente.*

DEMONSTRAÇÃO: Se $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_n$ for limitada, existe $c > 0$ tal que

$$\left|\frac{a_n}{b_n}\right| \leq c \;\Rightarrow\; |a_n| \leq c\,|b_n| \;, \quad \forall n \;.$$

O resultado segue-se do **Teorema 2.2**.

□

Exemplo 2.10 A série $\sum \frac{1}{n^3+4n^2+\pi}$ é absolutamente convergente; de facto, $\sum \frac{1}{n^3}$ é absolutamente convergente e

$$\lim \frac{\frac{1}{n^3+4n^2+\pi}}{\frac{1}{n^3}} = \lim \frac{n^3}{n^3+4n^2+\pi} = 1 \;.$$

Corolário 2.2 (Critério de d'Alembert) *Seja $a_n \neq 0$, $\forall n$. Se existir uma constante $0 < c < 1$ e uma ordem $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que*

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq c \ , \quad \forall n > n_0$$

(em particular, se $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$) então $\sum a_n$ é absolutamente convergente.

Demonstração: Temos, para todo o $n > n_0$,

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq c = \frac{c^{n+1}}{c^n} \quad \Rightarrow \quad \frac{|a_{n+1}|}{c^{n+1}} \leq \frac{|a_n|}{c^n} \ ,$$

pelo que a sucessão de termos não-negativos $(|a_n|/\,c^n)_n$ é decrescente a partir de uma certa ordem, logo limitada.

Como $\sum c^n$ é uma série geométrica (absolutamente) convergente, segue-se do teorema que $\sum |a_n|$ é convergente.

$\square$

Observação 2.3 Na generalidade dos casos práticos, a aplicação do critério de d'Alembert consiste no cálculo de $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$.

- Se $L < 1$, a série $\sum a_n$ é absolutamente convergente.
- Se $L > 1$, a série é divergente pois o seu termo geral não tende para zero já que, a partir de uma certa ordem, se tem $|a_{n+1}| > |a_n|$.
- Se $L = 1$, o critério é inconclusivo como mostram os exemplos das séries $\sum \frac{1}{n^2}$ e $\sum \frac{1}{n}$.

Exemplo 2.11 A série $\sum \frac{n!}{n^n}$ é absolutamente convergente:

$$\lim \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e} < 1 \ .$$

Teorema 2.6 (Critério de Cauchy) *Se existir uma constante* $0 < c < 1$ *e uma ordem* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tais que*

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq c \ , \quad \forall n > n_0$$

(em particular, se $\lim \sqrt[n]{|a_n|} < 1$*) então* $\sum a_n$ *é absolutamente convergente.*

Demonstração: Temos, para todo o $n > n_0$,

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq c \ \Rightarrow \ |a_n| \leq c^n \ .$$

Como $\sum c^n$ é uma série geométrica (absolutamente) convergente, segue-se do **Teorema 2.2** que $\sum |a_n|$ é convergente.

$\square$

Observação 2.4 Na generalidade dos casos práticos, a aplicação do critério de Cauchy consiste no cálculo de $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = L$.

- Se $L < 1$, a série $\sum a_n$ é absolutamente convergente.
- Se $L > 1$, a série é divergente pois o seu termo geral não tende para zero já que, a partir de uma certa ordem, se tem $|a_n| > 1$.
- Se $L = 1$, o critério é inconclusivo como mostram os exemplos das séries $\sum \frac{1}{n^2}$ e $\sum \frac{1}{n}$.

Exemplo 2.12 A série $\sum \left(\frac{\ln n}{n}\right)^n$ é absolutamente convergente:

$$\lim \sqrt[n]{\left(\frac{\ln n}{n}\right)^n} = \lim \frac{\ln n}{n} = 0 < 1 \ .$$

O resultado seguinte, cuja demonstração pode ser consultada em [4, pág. 143], relaciona os dois limites referidos anteriormente.

Teorema 2.7 *Seja* $a_n \neq 0$, $\forall n$. *Se* $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$ *então* $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = L$.

Teorema 2.8 (Critério do integral) *Seja $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ contínua, positiva e decrescente e seja $a_n = f(n)$, $n \in \mathbb{N}$. Então a série $\sum a_n$ é convergente se, e só se, o integral impróprio $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ for convergente.*

DEMONSTRAÇÃO: Mostramos apenas que a convergência da série se segue da convergência do integral impróprio. Para cada $k \in \mathbb{N}$, $k \neq 1$, tem-se

$$a_k = f(k) = \int_{k-1}^{k} f(k)\, dx \leq \int_{k-1}^{k} f(x)\, dx$$

pois, como f é decrescente, $f(k) \leq f(x)$, $\forall\, x \in (k-1, k)$. Assim,

$$\begin{aligned} s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k &\leq a_1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} f(x)\, dx \\ &= a_1 + \int_1^n f(x)\, dx \\ &\leq a_1 + \int_1^{+\infty} f(x)\, dx \end{aligned}$$

porque f é positiva. Logo, sendo o integral impróprio convergente, a sucessão associada à série é limitada e portanto, como é de termos positivos, é convergente.

□

Exemplo 2.13 A série de Riemann

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

converge se $\alpha > 1$. Na verdade,

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx &= \lim_{X \to +\infty} \int_1^X \frac{1}{x^\alpha}\, dx \\ &= \lim_{X \to +\infty} \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_1^X \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \lim_{X \to +\infty} \left(X^{1-\alpha} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{\alpha - 1}. \end{aligned}$$

Recorde, a propósito, o **Exemplo 2.4**.

2.4 Comutatividade

Para somas finitas de números reais é válida a propriedade comutativa. No caso das séries, nem sempre a convergência e a soma da série são independentes da ordem das parcelas.

Definição 2.5 *Uma série* $\sum a_n$ *diz-se* ***comutativamente convergente*** *se, dada qualquer bijecção* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$*, a série* $\sum a_{\varphi(n)}$ *for convergente e* $\sum a_{\varphi(n)} = \sum a_n$*.*

Exemplo 2.14 A série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

é (condicionalmente) convergente. Seja s a sua soma; então

$$\begin{aligned} s &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \dots \\ \frac{s}{2} &= 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{10} + 0 - \frac{1}{12} + \dots, \end{aligned}$$

multiplicando por $1/2$ e acrescentando parcelas nulas. Somando agora termo a termo as duas séries anteriores, obtém-se

$$\frac{3s}{2} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots$$

que é uma série com os mesmos termos da série inicial, tomados por uma ordem diferente. Esta reordenação conduziu a uma soma diferente da inicial logo a série não é comutativamente convergente.

Os dois próximos resultados mostram que as séries comutativamente convergentes são as séries absolutamente convergentes.

Teorema 2.9 *Toda a série absolutamente convergente é comutativamente convergente.*

DEMONSTRAÇÃO: Suponhamos, para começar, que $a_n \geq 0$, para todo o n e que $\sum a_n = s$. Seja $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma bijecção e s_n e t_n as sucessões associadas, respectivamente, a $\sum a_n$ e $\sum a_{\varphi(n)}$. Dado $m \in \mathbb{N}$, seja

$$n = \max \Big\{ \varphi(1), \varphi(2), \ldots, \varphi(m) \Big\} \ .$$

Então

$$t_m = \sum_{i=1}^{m} a_{\varphi(i)} \leq \sum_{j=1}^{n} a_j = s_n \ .$$

Analogamente, dado $n \in \mathbb{N}$, existe $m = \max \left\{ \varphi^{-1}(1), \varphi^{-1}(2), \ldots, \varphi^{-1}(n) \right\}$ tal que $s_n \leq t_m$. Daqui resulta que $\lim t_n = \lim s_n = s$. De facto, dado $\epsilon > 0$, seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow s - \epsilon < s_n \leq s$ (recorde-se que s_n é crescente). Consideremos a ordem m_0 tal que $s_{n_0+1} \leq t_{m_0}$; então, como t_n é crescente,

$$n > m_0 \Rightarrow s - \epsilon < s_{n_0+1} \leq t_{m_0} \leq t_n \leq s \ .$$

Falta justificar a última desigualdade: se, para alguma ordem m^*, $t_{m^*} > s$, existiria uma ordem n^* tal que $s_{n^*} \geq t_{m^*} > s$, o que é absurdo, pois a sucessão crescente s_n não convergiria para s.

O caso geral reduz-se a este considerando a decomposição da série nas suas partes positiva e negativa $\sum a_n = \sum p_n - \sum q_n$. Uma reordenação $a_{\varphi(n)}$ dos termos da série determina uma reordenação $p_{\varphi(n)}$ dos p_n e uma reordenação $q_{\varphi(n)}$ dos q_n, que são, respectivamente, as partes positiva e negativa de $a_{\varphi(n)}$. Então, resulta do caso anterior que

$$\sum a_{\varphi(n)} = \sum p_{\varphi(n)} - \sum q_{\varphi(n)} = \sum p_n - \sum q_n = \sum a_n \ .$$

$\square$

Teorema 2.10 (Riemann) *Seja $\sum a_n$ uma série condicionalmente convergente. Dado um qualquer número real σ, existe uma bijecção $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $\sum a_{\varphi(n)} = \sigma$.*

DEMONSTRAÇÃO: Fixado $\sigma \in \mathbb{R}$, definimos uma nova série $\sum a_{\varphi(n)}$, obtida por reordenação dos termos de $\sum a_n$ do modo seguinte: começamos a somar os termos positivos de $\sum a_n$, na sua ordem natural, até que, ao somar a_{n_1}, a soma seja, pela primeira vez, superior a σ. Isto é possível pois $\sum p_n = +\infty$ (ver **Corolário 2.1**). Acrescentamos a seguir termos negativos, também na sua ordem natural, até que, ao somar a_{n_2}, a soma seja, pela primeira vez, inferior a σ. Isto é possível pois $\sum -q_n = -\infty$ (ver **Corolário 2.1**). Prosseguindo deste modo, obtemos a reordenação procurada. A sucessão t_n associada à nova série oscila em torno de σ e verifica a propriedade, a partir do termo obtido ao somar a_{n_1},

$$|t_n - \sigma| \leq |a_{n_k}| \ ,$$

onde a_{n_k} é o termo que originou a última oscilação em torno de σ. Como $\lim a_{n_k} = 0$ (porque a série $\sum a_n$ é convergente), temos que $\lim t_n = \sigma$.

$\square$

Observação 2.5 Um raciocínio análogo permite demonstrar que existem reordenações dos termos da série que dão origem a séries divergentes, com sucessões associadas a tender para $+\infty$ (ou $-\infty$).

3 Sucessões de funções

Seja $X \subset \mathbb{R}$ e $\mathcal{F}$ o conjunto das funções reais definidas em X. Uma aplicação de $\mathbb{N}$ em $\mathcal{F}$ é dita uma **sucessão de funções**. Ao invés das sucessões numéricas, para as quais só existe uma noção de limite, para as sucessões de funções são várias as possibilidades de definir o limite. Analisamos de seguida as mais usuais.

3.1 Convergência simples e convergência uniforme

Definição 3.1 *Uma sucessão de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$ **converge simplesmente** (ou pontualmente) para uma função $f : X \to \mathbb{R}$ se, para todo o $x \in X$, se tem $f_n(x) \to f(x)$, i.e.,*

$$\forall x \in X \ , \ \forall \epsilon > 0 \ , \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ : \ n > n_0 \ \Rightarrow \ \Big| f_n(x) - f(x) \Big| < \epsilon \ .$$

Observação 3.1 A interpretação geométrica desta noção de limite é a seguinte: para cada ponto $x \in X$, a sucessão de pontos $(x, f_n(x))$, correspondente à intersecção da recta vertical que passa por x com os gráficos das funções f_n, converge para $(x, f(x))$, o ponto de intersecção da mesma recta com o gráfico de f.

Exemplo 3.1 Analisemos quais os limites simples das seguintes sucessões de funções:

1. $f_n(x) = \dfrac{x}{n}$, $x \in \mathbb{R}$.

   Para cada $x \in \mathbb{R}$, a sucessão numérica $\dfrac{x}{n}$ converge para 0, pelo que o limite é a função nula em $\mathbb{R}$.

2. $f_n(x) = x^n$, $x \in [0, 1]$.

   Para cada $x \in [0, 1)$, a sucessão numérica x^n converge para 0; já para $x = 1$, a sucessão constante 1^n tende para 1. O limite é pois a função $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \in [0,1) \\ \\ 1 & \text{se} \quad x = 1 \ . \end{cases}$$

3. $f_n(x) = x^n(1 - x^n)\ ,\ x \in [0, 1]$.

   Usando o que foi dito anteriormente, é fácil verificar que o limite é a função nula em $[0, 1]$.

Na definição da convergência simples, a ordem n_0 a determinar depende não apenas de ϵ mas também do ponto x_0. Para o mesmo ϵ, nada obriga a que, para pontos diferentes, o n_0 seja o mesmo. A definição considera cada ponto isoladamente e não a função como um todo. Como consequência, algumas propriedades, por exemplo a continuidade, perdem-se na passagem ao limite (cf. o exemplo anterior). A definição seguinte vem dar resposta a estas limitações.

Definição 3.2 *Uma sucessão de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$* ***converge uniformemente*** *para uma função $f : X \to \mathbb{R}$ se*

$$\forall \epsilon > 0\ ,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ :\ n > n_0\ \Rightarrow \left| f_n(x) - f(x) \right| < \epsilon\ ,\ \forall x \in X\ .$$

Observação 3.2 A interpretação geométrica é a seguinte: para cada $\epsilon > 0$, a faixa de raio ϵ em torno do gráfico de f

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x \in X\ ;\ |y - f(x)| < \epsilon \right\}$$

contém, a partir da ordem n_0, os gráficos de todas as funções f_n.

Observação 3.3 É evidente que se uma sucessão converge uniformemente para um dado limite também converge simplesmente para o mesmo limite. O limite uniforme, se existir, será, portanto, o limite simples.

Observação 3.4 A definição dada é trivialmente equivalente a afirmar-se que a sucessão numérica

$$M_n \equiv \sup_{x \in X} \left| f_n(x) - f(x) \right| \tag{7}$$

é um infinitésimo. Esta observação constitui um critério prático para investigar se, identificado o limite simples de uma dada sucessão de funções, a convergência é uniforme.

Exemplo 3.2 Reanalisemos os exemplos anteriores quanto à convergência uniforme:

1. $M_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{x}{n} - 0 \right| = +\infty.$

   Logo, a convergência não é uniforme. Já se o domínio das funções fosse um intervalo limitado, digamos $[-L, L]$, a convergência seria uniforme:

$$M_n = \sup_{x \in [-L,L]} \left| \frac{x}{n} - 0 \right| = \frac{L}{n} \longrightarrow 0 \ .$$

2. $M_n = \sup_{x \in [0,1]} \left| x^n - f(x) \right| = \sup_{x \in [0,1)} x^n = 1.$

   Logo, a convergência não é uniforme.

3. $M_n = \sup_{x \in [0,1]} \left| x^n(1 - x^n) - 0 \right| = \frac{1}{4}.$

   Logo, a convergência não é uniforme.

3.2 Propriedades da convergência uniforme

O primeiro teorema desta secção justifica a afirmação heurística de que *o limite uniforme de funções contínuas é uma função contínua.*

Teorema 3.1 *Seja $f_n : X \to \mathbb{R}$ uma sucessão de funções uniformemente convergente para $f : X \to \mathbb{R}$. Se cada f_n for contínua no ponto $a \in X$ então f também é contínua no ponto a.*

DEMONSTRAÇÃO: Queremos provar que

$$\forall \epsilon > 0 \ , \ \exists \delta > 0 \ : \ x \in (a - \delta, a + \delta) \cap X \ \Rightarrow \ \left| f(x) - f(a) \right| < \epsilon \ .$$

Fixemos $\epsilon > 0$. Como a convergência dos f_n para f é uniforme, ao número real positivo $\frac{\epsilon}{3}$ corresponde uma ordem n_0 tal que

$$n > n_0 \ \Rightarrow \ \left| f_n(x) - f(x) \right| < \frac{\epsilon}{3} \ , \ \forall x \in X \ .$$

Fixemos uma ordem $n_* > n_0$; por hipótese, a função f_{n_*} é contínua em a. Logo, dado o número real positivo $\frac{\epsilon}{3}$,

$$\exists \delta > 0 \ : \ x \in (a - \delta, a + \delta) \cap X \ \Rightarrow \ \Big| f_{n_*}(x) - f_{n_*}(a) \Big| < \frac{\epsilon}{3} \ .$$

Então, para $x \in (a - \delta, a + \delta) \cap X$, tem-se

$$\begin{aligned} \Big| f(x) - f(a) \Big| &= \Big| f(x) - f_{n_*}(x) + f_{n_*}(x) - f_{n_*}(a) + f_{n_*}(a) - f(a) \Big| \\ &\leq \Big| f_{n_*}(x) - f(x) \Big| + \Big| f_{n_*}(x) - f_{n_*}(a) \Big| + \Big| f_{n_*}(a) - f(a) \Big| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon \ . \end{aligned}$$

□

Exemplo 3.3 A sucessão de funções contínuas do exemplo 2. acima converge para uma função descontínua. Imediatamente se conclui que a convergência não é uniforme.

De seguida, respondemos afirmativamente à questão da passagem ao limite sob o sinal de integral: se a convergência for uniforme, *o integral do limite é o limite dos integrais.*

Teorema 3.2 *Se a sucessão de funções integráveis $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ converge uniformemente para $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ então f é integrável e*

$$\int_a^b f(x)\, dx \ = \lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx \ . \tag{8}$$

Demonstração: Omitimos a demonstração de que f é integrável, não sem observar que, para funções f_n contínuas, o resultado é imediato já que, pelo teorema anterior, f também será contínua, logo integrável.

Quanto à igualdade (8), seja $\epsilon > 0$. Como a convergência dos f_n para f é uniforme, ao número real positivo $\frac{\epsilon}{b-a}$ corresponde uma ordem n_0 tal que

$$n > n_o \ \Rightarrow \ \Big| f_n(x) - f(x) \Big| < \frac{\epsilon}{b - a} \ , \ \forall x \in [a, b] \ .$$

Portanto, para $n > n_0$,

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(x)\, dx - \int_a^b f(x)\, dx \right| &\leq \int_a^b \Big| f_n(x) - f(x) \Big|\, dx \\ &< (b-a)\, \frac{\epsilon}{b-a} = \epsilon \ , \end{aligned}$$

e o resultado segue-se da definição de limite de uma sucessão numérica.

□

Exemplo 3.4 Verifiquemos que o resultado não é válido se se exigir apenas a convergência simples: a sucessão de funções $f_n(x) = nx^n(1-x^n)$ converge simplesmente, no intervalo $[0,1]$, para a função nula. Tem-se

$$0 = \int_0^1 0\ dx \ \neq \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{(n+1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \ .$$

A convergência não é uniforme já que, por inspecção da monotonia da função, se conclui que

$$M_n = \sup_{x\in[0,1]} \Big| nx^n(1-x^n) - 0 \Big| = \frac{n}{4} \ \longrightarrow \ +\infty \ .$$

O exemplo seguinte mostra que, no caso da derivação, não é a convergência uniforme da sucessão de funções que faz com que *a derivada do limite seja o limite das derivadas.*

Exemplo 3.5 A sucessão de funções $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$ converge uniformemente em $\mathbb{R}$ para a função nula. No entanto, a sucessão das derivadas ${f_n}'(x) = \cos(nx)$ nem sequer é convergente.

A condição relevante é a convergência uniforme das derivadas, como se precisa a seguir.

Teorema 3.3 *Seja (f_n) uma sucessão de funções de classe C^1 em $[a,b]$. Se, para um certo $c \in [a,b]$, a sucessão numérica $(f_n(c))$ convergir e a sucessão das derivadas $({f_n}')$ convergir uniformemente em $[a,b]$ para uma função g, então (f_n) converge uniformemente em $[a,b]$ para uma função f, de classe C^1, tal que $f' = g$.*

DEMONSTRAÇÃO: Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, para cada $n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$f_n(x) = f_n(c) + \int_c^x {f_n}'(t)\,dt\ , \quad \forall x \in [a,b]\ .$$

Passando ao limite quando $n \to +\infty$, resulta da hipótese e do teorema anterior que, para cada $x \in [a,b]$, existe

$$f(x) := \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(c) + \int_c^x g(t)\,dt\ .$$

Fazendo $x = c$, obtém-se $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(c) = f(c)$. Como g é contínua (pois é o limite uniforme de funções contínuas), f é derivável, novamente como consequência o Teorema Fundamental do Cálculo, e $f'(x) = g(x)$, $\forall x \in [a,b]$. Assim f é de classe C^1.

Resta provar que $f_n \to f$ uniformemente. Dado $\epsilon > 0$, existem ordens $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$\begin{aligned}
n > n_1 \quad &\Rightarrow \quad \left|f_n(c) - f(c)\right| < \frac{\epsilon}{2} \\
n > n_2 \quad &\Rightarrow \quad \left|{f_n}'(t) - g(t)\right| < \frac{\epsilon}{2(b-a)}\ , \quad \forall t \in [a,b]\ .
\end{aligned}$$

Seja $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Então, para $n > n_0$,

$$\begin{aligned}
\left|f_n(x) - f(x)\right| &= \left|f_n(c) + \int_c^x {f_n}'(t)\,dt - f(c) - \int_c^x g(t)\,dt\right| \\
&\le \left|f_n(c) - f(c)\right| + \int_c^x \left|{f_n}'(t) - g(t)\right| dt \\
&\le \frac{\epsilon}{2} + |x-c| \sup_{t\in(c,x)} \left|{f_n}'(t) - g(t)\right| \\
&\le \frac{\epsilon}{2} + (b-a)\,\frac{\epsilon}{2(b-a)} = \epsilon\ ,
\end{aligned}$$

qualquer que seja $x \in [a,b]$.

$\square$

4 Séries de funções

Por analogia com o caso das séries numéricas, definimos série de funções convergente através da sua sucessão (de funções) associada. Assim, dadas funções $f_n : X \to \mathbb{R}$, dizemos que a série $\sum f_n(x)$ é convergente e tem soma $f : X \to \mathbb{R}$ se a sua sucessão associada

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = f_1(x) + \ldots + f_n(x) \ , \ n \in \mathbb{N} \ , \ x \in X$$

for convergente para f.

A série converge uniformemente se a sua sucessão associada (s_n) convergir uniformemente para f, o que é equivalente a dizer que a sucessão dos restos

$$r_n(x) = \sum_{k>n} f_k(x) = f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \ldots \ , \ n \in \mathbb{N} \ , \ x \in X$$

converge uniformemente para zero. Esta equivalência é evidente pois

$$r_n = f - s_n \ , \ \forall n \in \mathbb{N} \ .$$

Os teoremas relativos à convergência demonstrados no capítulo anterior têm análogos óbvios no contexto das séries de funções:

- Se $\sum f_n$ convergir uniformemente para f e cada f_n for contínua no ponto a então f também é contínua no ponto a.
- Se $\sum f_n$ convergir uniformemente para f e cada f_n for integrável em $[a, b]$ então f é integrável em $[a, b]$ e $\int_a^b f(x)\, dx = \sum \int_a^b f_n(x)\, dx$.
- Se cada f_n for de classe C^1 em $[a, b]$, se, para um certo $c \in [a, b]$, a série $\sum f_n(c)$ convergir e se a série das derivadas $\sum f_n{}'$ convergir uniformemente em $[a, b]$, então $\sum f_n$ converge uniformemente em $[a, b]$ para uma função de classe C^1 e $(\sum f_n)' = \sum f_n{}'$.

Exemplo 4.1 A série de funções $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$, que, para $x \neq 0$, é uma série geométrica, converge para a função descontínua

$$f(x) = \begin{cases} 1+x^2 & \text{se} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \ . \end{cases}$$

Logo, a convergência não é uniforme.

A forma mais conveniente de concluir que uma série converge uniformemente é dada pelo critério seguinte.

Teorema 4.1 (Critério de Weierstraß) *Sejam $f_n : X \to \mathbb{R}$ e $\sum a_n$ uma série numérica convergente, de termos $a_n \geq 0$, tal que*

$$|f_n(x)| \leq a_n \ , \quad \forall n \in \mathbb{N} \, , \ \forall x \in X \ .$$

Então as séries $\sum |f_n|$ e $\sum f_n$ são uniformemente convergentes.

Demonstração: É evidente que as séries convergem para cada $x \in X$, em virtude do critério de comparação fornecido pelo **Teorema 2.2**. Para mostrar que a convergência é uniforme, fixemos $\epsilon > 0$. Como a série numérica $\sum a_n$ é convergente, existe uma ordem n_0 tal que

$$\sum_{k>n} a_k < \epsilon \ , \quad \forall n > n_0 \ .$$

Assim

$$\left| \sum_{k>n} f_k(x) \right| \leq \sum_{k>n} |f_k(x)| \leq \sum_{k>n} a_k < \epsilon \ , \quad \forall n > n_0 \ , \quad \forall x \in X \ ,$$

pelo que os restos de ambas as séries convergem uniformemente para zero.

$\square$

Exemplo 4.2 A série de funções $\displaystyle\sum \frac{\sin(nx)}{n^2}$ é uniformemente convergente. Na verdade, tem-se

$$\left| \frac{\sin(nx)}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2} \ , \quad \forall n \in \mathbb{N} \, , \ \forall x \in \mathbb{R}$$

e a série numérica de termos positivos $\displaystyle\sum \frac{1}{n^2}$ é convergente.

4.1 Séries de potências

Um tipo particularmente importante de séries de funções são as chamadas **séries de potências**, que constituem a generalização natural dos polinómios (podemos dizer, de forma heurística, que são polinómios de *grau infinito*). Uma série de potências de x é uma expressão da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

Mais geralmente,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots$$

diz-se uma série de potências de $x - x_0$. Serão apenas consideradas séries de potências de x e, doravante, a expressão série de potências quererá dizer série de potências de x; o caso geral reduz-se a este através da mudança de variável $y = x - x_0$.

A importância destas séries resulta do facto de as principais funções da Análise se poderem representar como séries de potências. Antes de abordar esta questão, detenhamo-nos na determinação dos valores de x para os quais converge uma série de potências. O conjunto de tais valores tem uma estrutura bem determinada, a saber, trata-se de um intervalo de centro na origem. Tal intervalo pode ser limitado (aberto, fechado ou semi-aberto), estender-se a toda a recta ou reduzir-se apenas à origem. Antes de demonstrar este facto, analisemos exemplos ilustrativos das diversas situações referidas.

Exemplo 4.3

1. A série $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge (absolutamente) para $x \in \mathbb{R}$, como se conclui facilmente usando os critérios de Cauchy ou de d'Alembert.

2. A série $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ converge (absolutamente) para $x \in (-1, 1)$, como se conclui facilmente usando os mesmos critérios e diverge fora de $[-1, 1]$. Converge ainda nas extremidades deste intervalo, como consequência do Critério de Leibniz. Assim, converge para $x \in [-1, 1]$.

3. Analogamente, a série $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ converge (absolutamente) para $x \in (-1, 1)$ e ainda para $x = 1$, como consequência do Critério de Leibniz mas diverge para $x = -1$. Assim, converge para $x \in (-1, 1]$.

4. A série geométrica de razão x, $\sum x^n$, converge (absolutamente) para $x \in (-1, 1)$.

5. A série $\sum n^n x^n$ só converge para $x = 0$, já que o seu termo geral não tende para zero se $x \neq 0$.

Teorema 4.2 *Uma série de potências $\sum a_n x^n$, ou converge apenas para $x = 0$ ou existe $r \in (0, +\infty]$ tal que a série converge absolutamente no intervalo aberto $(-r, r)$ e diverge fora do intervalo fechado $[-r, r]$. Se existir $L = \lim \sqrt[n]{|a_n|}$ então $r = 1/L$.*

Demonstração: Se a sucessão $(\sqrt[n]{|a_n|})$ for ilimitada então o mesmo acontece, para $x \neq 0$, com a sucessão $(|a_n x^n|)$, pelo que o termo geral da série $\sum a_n x^n$ não é um infinitésimo. Assim, a série de potências converge apenas para $x = 0$.

Se, em alternativa, a sucessão $(\sqrt[n]{|a_n|})$ for limitada então o conjunto

$$X = \left\{ \rho > 0 \ : \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ : \ \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{\rho} \ , \ \forall n > n_0 \right\}$$

é não-vazio e, portanto, existe $r = \sup X \in (0, +\infty]$[3]. Mostremos que X é um intervalo de extremos 0 e r, ou seja, que $X = (0, r)$ ou $X = (0, r]$ ou $X = (0, +\infty)$: seja $\rho \in X$ e $0 < x < \rho$; então

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{\rho} < \frac{1}{x} \ , \ \forall n > n_0$$

pelo que $x \in X$. Mostremos agora que

- a série converge absolutamente no intervalo aberto $(-r, r)$:

[3]Atenção ao abuso de linguagem: admitimos $\sup X = +\infty$ se X for ilimitado.

seja $x \in (-r, r)$ e $\rho \in X$ tal que $|x| < \rho < r$; tem-se

$$\sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{|x|}{\rho} < 1 \, , \ \forall n > n_0$$

e a afirmação segue-se do critério de Cauchy (**Teorema 2.6**);

- a série diverge fora do intervalo fechado $[-r, r]$:

  seja $|x| > r$; então $|x| \notin X$ e, para uma infinidade de valores de n, tem-se

$$\sqrt[n]{|a_n|} \geq \frac{1}{|x|} \ \Leftrightarrow \ |a_n x^n| \geq 1$$

  pelo que a série $\sum a_n x^n$ diverge já que o se termo geral não é um infinitésimo.

Finalmente, se existir $L = \lim \sqrt[n]{|a_n|}$ então, para cada $\rho \in X$, tem -se (convencionando que $1/L = +\infty$ para $L = 0$)

$$L = \lim \sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{1}{\rho} \ \Leftrightarrow \ \rho \leq \frac{1}{L}$$

pelo que $r = \sup X \leq 1/L$. Suponhamos, por absurdo que $r < 1/L$ e seja ρ tal que $r < \rho < 1/L$. Então $L = \lim \sqrt[n]{|a_n|} < 1/\rho$ e, pela definição de limite, existe uma ordem n_0 tal que

$$\sqrt[n]{|a_n|} < 1/\rho \, , \ \forall n > n_0 \ .$$

Então $\rho \in X$ e portanto $\rho \leq r = \sup X$, uma contradição.

$\square$

Definição 4.1 *A $r \in [0, +\infty]$ chama-se* ***raio de convergência*** *da série de potências e ao intervalo $(-r, r)$ chama-se* ***intervalo de convergência****.*

Observação 4.1 Uma série de potências pode convergir ou divergir nas extremidades $-r$ e r do seu intervalo de convergência, nada podendo afirmar-se em geral.

Observação 4.2 É consequência do teorema anterior e do **Teorema 2.7** que, se $a_n \neq 0$, $\forall n$ e existir $\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L$ então o raio de convergência da série de potências $\sum a_n x^n$ é $r = 1/L$.

As propriedades das séries de potências relativas à continuidade, integração e derivação são consequência dos resultados gerais.

Teorema 4.3 *Seja $r > 0$ o raio de convergência da série de potências $\sum a_n x^n$ e $\rho \in (0, r)$. A série converge uniformemente no compacto $[-\rho, \rho]$.*

DEMONSTRAÇÃO: O resultado é consequência imediata do Critério de Weierstraß:

$$|a_n x^n| \leq |a_n| \rho^n \ , \quad \forall n \in \mathbb{N} \ , \ \forall x \in [-\rho, \rho]$$

e a série $\sum a_n \rho^n$ é absolutamente convergente pois $\rho \in (-r, r)$.

□

Corolário 4.1 *Seja $r > 0$ o raio de convergência da série de potências $\sum a_n x^n$. A função $f : (-r, r) \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sum a_n x^n$, é contínua.*

O teorema afirma que uma série de potências converge uniformemente em todo o intervalo compacto contido no seu intervalo de convergência. A série pode não convergir uniformemente no intervalo de convergência. No entanto, vale o seguinte resultado (para a demonstração, ver [4, pág. 388]).

Teorema 4.4 (Abel) *Seja r, positivo e finito, o raio de convergência da série de potências $\sum a_n x^n$. Se $\sum a_n r^n$ convergir então a série de potências converge uniformemente em $[0, r]$. Em particular,*

$$\lim_{x \to r^-} \left(\sum a_n x^n \right) = \sum a_n r^n \ .$$

Teorema 4.5 (Integração termo a termo) *Seja r o raio de convergência da série de potências $\sum a_n x^n$. Se $[\alpha, \beta] \subset (-r, r)$ então*

$$\int_\alpha^\beta \left(\sum a_n x^n \right) dx = \sum \frac{a_n}{n+1} \left(\beta^{n+1} - \alpha^{n+1} \right) \ .$$

DEMONSTRAÇÃO: A convergência é uniforme no intervalo compacto $[\alpha, \beta]$ contido no intervalo de convergência. Logo, pode-se integrar termo a termo.

□

Teorema 4.6 (Derivação termo a termo) *Seja r o raio de convergência da série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. A função $f : (-r, r) \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, é derivável, com $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$. A série de potências de f' ainda tem raio de convergência r.*

DEMONSTRAÇÃO: Omite-se a demonstração de que o raio de convergência da série das derivadas ainda é r.

Seja $x \in (-r, r)$ e $\rho \in (|x|, r)$. Como a convergência da série das derivadas é uniforme em $[-\rho, \rho]$, f é derivável e vale a igualdade

$$f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \ .$$

□

Observação 4.3 Ao integrar termo a termo uma série de potências com raio de convergência r, pode acontecer que a nova série convirja em alguma das extremidades de $(-r, r)$, ou em ambas, sem que isso aconteça para a série original. Ao derivar termo a termo, pode acontecer o inverso e *perder-se* a convergência em alguma das extremidades do intervalo de convergência, ou mesmo em ambas.

Corolário 4.2 *Seja r o raio de convergência da série de potências $\sum a_n x^n$. A função $f : (-r, r) \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sum a_n x^n$, é de classe C^∞. Para cada $k \in \mathbb{N}$, tem-se*

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n \geq k} n(n-1)\dots(n-k+1)\, a_n x^{n-k} \ , \quad \forall x \in (-r, r) \ .$$

Em particular, $a_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$.

Assim, $a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ é o polinómio de Taylor de grau n da função $f(x) = \sum a_n x^n$ em torno do ponto $x = 0$.

Corolário 4.3 (Unicidade) *Sejam $\sum a_n x^n$ e $\sum b_n x^n$ duas séries de potências convergentes em $(-r, r)$ e $X \subset (-r, r)$ um conjunto com um ponto de acumulação nesse intervalo. Se $\sum a_n x^n = \sum b_n x^n$, para todo o $x \in X$, então $a_n = b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

Estudadas as séries de potências, interessa-nos agora saber em que condições se pode representar uma dada função através de uma série de potências, ou seja, como se pode *desenvolver* uma função em série de potências.

Definição 4.2 *Seja I um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função com derivadas de todas as ordens em $x_0 \in I$. Chama-se **série de Taylor** de f em torno do ponto x_0 à série de potências* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$.

Resulta imediatamente do **Corolário 4.2** que a série de Taylor em torno de zero da função $f : (-r, r) \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sum a_n x^n$, é precisamente $\sum a_n x^n$.

Dada uma função de classe C^∞ e determinada a sua série de Taylor, digamos em torno de zero, colocam-se duas questões: a de se saber para que valores de x a série converge e a de determinar se a série converge para $f(x)$. Isso acontecerá se o resto da fórmula de Taylor

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x)$$

verificar $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

Exemplo 4.4 A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x^2} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ \\ 0 & \text{se} \quad x = 0\ , \end{cases}$$

é tal que $f^{(n)}(0) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Assim, a sua série de Taylor em torno de zero, que é a função nula, é uma série convergente mas não converge para $f(x)$ em nenhum intervalo.

Exemplo 4.5 A fórmula de Taylor em torno de zero, com resto de Lagrange, para a função exponencial é dada por

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1}\ , \quad |c| < |x|\ .$$

Como $\lim_{n\to\infty} \dfrac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1} = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \ , \quad x \in \mathbb{R} \ .$$

Exemplo 4.6 A fórmula de Taylor em torno de zero, com resto de Lagrange, para a função seno é dada por

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \frac{[\sin]^{(2n+2)}(c)}{(2n+2)!} x^{2n+2} \ , \quad |c| < |x| \ .$$

Como $\left| \frac{[\sin]^{(2n+2)}(c)}{(2n+2)!} x^{2n+2} \right| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \longrightarrow 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \ , \quad x \in \mathbb{R} \ .$$

Mas nem sempre é prático utilizar este procedimento de escrita da fórmula de Taylor e inspecção do limite do resto para obter o desenvolvimento em série de potências de uma dada função. Podem usar-se as propriedades das séries e obter desenvolvimentos a partir de outros já conhecidos.

Exemplo 4.7

$$\begin{aligned}
\cosh x &= \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}\right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + (-1)^n\right) \frac{x^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \ , \quad x \in \mathbb{R} \ .
\end{aligned}$$

Exemplo 4.8 A expressão para a soma de um número finito de termos de uma progressão geométrica de razão x é dada por

$$1 + x + \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \ .$$

Logo,

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \ldots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x} \ .$$

Como, para $|x| < 1$, se tem $\lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{1-x} = 0$, obtém-se

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \ldots + x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \ , \quad \forall x \in (-1,1) \ .$$

Esta série é a série de Taylor de $f(x) = \frac{1}{1-x}$ em torno de zero, donde $f^{(n)}(0) = n!$.

Exemplo 4.9 Como $|x^2| < 1 \Leftrightarrow |x| < 1$, tem-se

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \ , \quad \forall x \in (-1,1) \ .$$

Integrando termo a termo, vem

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \ ,$$

para $x \in (-1,1)$. Mas esta série converge, pelo **Critério de Leibniz**, nas extremidades do intervalo e o **Teorema de Abel** permite então estender a igualdade acima a $x \in [-1,1]$. Fazendo $x = 1$, obtemos a fórmula de Leibniz

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

4.2 Séries de Fourier

As séries de potências permitem representar, em intervalos apropriados, um vasto conjunto de funções mas apresentam uma limitação evidente: as funções têm que ser regulares. A descoberta por Fourier[4], na sua *Théorie analytique de la chaleur*, de que para uma muito mais vasta classe de funções, incluindo funções descontínuas que surgem em inúmeras aplicações em Mecânica, era válida uma representação em *série trigonométrica* da forma

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \tag{9}$$

teve, pois, uma enorme importância no desenvolvimento da Análise.

Verifica-se facilmente que as funções $\cos \frac{n\pi x}{L}$ e $\sin \frac{n\pi x}{L}$ são periódicas de período (positivo mínimo) igual a $\frac{2L}{n}$. Um período comum a todas elas é, portanto, $2L$, e a validade de (9) implica naturalmente a periodicidade de f. Esta é uma restrição relativamente inócua, já que uma função definida num intervalo limitado pode ser estendida a toda a recta de forma a tornar-se periódica.

Admitindo a validade de (9) e a convergência uniforme da série trigonométrica, basta multiplicar por $\cos \frac{m\pi x}{L}$ ou $\sin \frac{m\pi x}{L}$ e integrar termo a termo para obter, por força das seguintes **relações de ortogonalidade**

$$\begin{aligned}
\int_{-L}^{L} \cos \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} &= 0 \\
\int_{-L}^{L} \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} &= \begin{cases} L & \text{se} \quad n = m \\ 0 & \text{se} \quad n \neq m \end{cases} \\
\int_{-L}^{L} \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} &= \begin{cases} L & \text{se} \quad n = m \\ 0 & \text{se} \quad n \neq m \end{cases} \quad ,
\end{aligned}$$

válidas para quaisquer $n, m \in \mathbb{N}$, expressões para os coeficientes a_n e b_n.

[4] Joseph Fourier (1768–1830)

Definição 4.3 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função periódica, de período $2L$, integrável em cada intervalo limitado. Os* ***coeficientes de Fourier*** *de f são os números reais*

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos\frac{n\pi x}{L}\, dx \ , \qquad n \geq 0 \quad ; \tag{10}$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin\frac{n\pi x}{L}\, dx \ , \qquad n \geq 1 \quad . \tag{11}$$

A presença do factor $\frac{1}{2}$ no termo independente de (9) justifica-se por tornar válida a fórmula (10) para $n = 0$.

O principal resultado relativo a séries de Fourier estabelece as condições em que uma função periódica por ser representada pela sua série de Fourier, ou seja, uma série trigonométrica da forma (9) em que os coeficientes são determinados pelas fórmulas (10) e (11).

Definição 4.4 *Uma função $f : I \to \mathbb{R}$ diz-se* ***seccionalmente contínua*** *se, em cada intervalo limitado, tiver apenas um número finito de descontinuidades, todas de primeira espécie. Se x_0 for uma descontinuidade, define-se*

$$f(x_0 + 0) = \lim_{x \to {x_0}^+} f(x) \qquad e \qquad f(x_0 - 0) = \lim_{x \to {x_0}^-} f(x) \ .$$

A função diz-se ***seccionalmente derivável*** *se for seccionalmente contínua e a sua derivada também.*

Observação 4.4 Uma função seccionalmente derivável não precisa de estar definida nos seus pontos de descontinuidade. Nesses pontos, faz-se

$$f(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \ ,$$

ou seja, toma-se para valor da função a média dos limites laterais. O mesmo vale para a sua derivada.

Exemplo 4.10 A função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad -\pi < x < 0 \\ \\ 1 & \text{se} \quad 0 < x < \pi \end{cases}$$

é seccionalmente derivável. O seu valor na descontinuidade $x = 0$ pode tomar-se $f(x) = \frac{1}{2}$.

Teorema 4.7 (Dirichlet) *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função seccionalmente derivável e periódica, de período $2L$. Então a sua série de Fourier converge em cada ponto $x \in \mathbb{R}$ e*

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

A demonstração está para além do âmbito da disciplina; pode ser consultada em [3].

Exemplo 4.11 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função periódica, de período 2π, definida em $[-\pi, \pi)$ por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad -\pi \leq x < 0 \\ \\ 1 & \text{se} \quad 0 \leq x < \pi \ . \end{cases}$$

Os coeficientes de Fourier de f são

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \, dx = 1 \ ; \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(nx) \, dx = 0 \ , \qquad n \geq 1 \ ; \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx) \, dx = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad n \text{ é par} \\ \frac{2}{n\pi} & \text{se} \quad n \text{ é ímpar} \end{cases} \ , \qquad n \geq 1 \ . \end{aligned}$$

logo, como a função é seccionalmente derivável,

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)\pi} \sin \Big[(2n-1)x \Big] \ .$$

Fazendo $x = \pi/2$, obtemos novamente a fórmula de Leibniz

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Se uma função periódica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de período $2L$, for par então a sua série de Fourier é uma série de co-senos. Na verdade, os seus coeficientes de Fourier são

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} \, dx \;, \qquad n \geq 0 \quad ; \\ b_n &= 0 \;, \qquad n \geq 1 \quad , \end{aligned}$$

pois as funções $f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}$ e $f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}$ são, respectivamente, par e ímpar.

Analogamente, a série de Fourier de uma função ímpar é uma série de senos.

Exemplo 4.12 Seja $f(x) = x$ em $[0, \pi]$. Se quisermos desenvolver f em série de co-senos, temos que prolongar a função por paridade a $[-\pi, 0]$ (ou seja, $f(x) = -x$ em $[-\pi, 0]$) e, de seguida, estendê-la, de modo periódico (com período 2π) a toda a recta. Os coeficientes de Fourier não-nulos são

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \, dx = \pi \;; \\ a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \, \cos(nx) \, dx = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad n \text{ é par} \\ -\frac{4}{n^2 \pi} & \text{se} \quad n \text{ é ímpar} \end{cases} \;, \qquad n \geq 1 \;. \end{aligned}$$

Como a função é contínua e seccionalmente derivável, vem

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos\Big[(2n-1)x\Big] \;.$$

Se quisermos desenvolver f em série de senos, prolongamo-la como função ímpar (ou seja, $f(x) = x$ em $[-\pi, 0]$). Os coeficientes de Fourier não-nulos são então

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \, \sin(nx) \, dx = \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \;, \qquad n \geq 1$$

e

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx) \ . \tag{12}$$

Terminamos com uma importante fórmula, a chamada **identidade de Parseval**.

Teorema 4.8 (Parseval) *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função seccionalmente contínua e periódica, de período $2L$. Então os seus coeficientes de Fourier verificam a identidade*

$$\frac{1}{2}\, {a_0}^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left({a_n}^2 + {b_n}^2\right) = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} |f(x)|^2 \, dx \ .$$

Exemplo 4.13 Recordando (12) no exemplo anterior e utilizando a fórmula de Parseval, obtém-se

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \ = \ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \, dx \ = \ \frac{2\pi^2}{3}$$

donde

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \ .$$

Bibliografia

[1] T. Apostol, *Calculus, vol. I*, Wiley, 1967.

[2] J. Campos Ferreira, *Introdução à Análise Matemática*, Fundação Calouste Gulbenkian, 1993.

[3] R. Courant – F. John, *Introduction to Calculus and Analysis, vol. I*, Interscience Publishers, 1965.

[4] E. Lages Lima, *Curso de Análise, vol. 1 (11ª edição)*, Projecto Euclides, IMPA, 2004.

[5] J. Stewart, *Cálculo, vol. I e vol. II*, Thomson Learning, 2001.