

José Miguel Urbano

ANÁLISE INFINITESIMAL II

– NOTAS DE CURSO –

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Coimbra, 2005

Conteúdo

1	Primitivas	3
2	O integral de Riemann	8
2.1	Propriedades do integral de Riemann	15
2.2	Condições suficientes de integrabilidade	19
2.3	O Teorema Fundamental do Cálculo	22
2.4	Os teoremas clássicos do Cálculo Integral	24
2.5	O logaritmo e a exponencial	27
2.6	Integração numérica	28
3	Aplicações do cálculo integral	33
3.1	Área de figuras planas	33
3.2	Volume de sólidos de revolução	33
3.3	Comprimento de curvas	34
4	Integrais impróprios	35
4.1	Intervalo de integração ilimitado	35
4.2	Função integranda ilimitada	37
4.3	Critérios de comparação	38
5	Séries Numéricas	42
5.1	Séries convergentes e séries divergentes	42
5.2	Convergência absoluta e convergência condicional	46
5.3	Critérios de convergência	49
5.4	Comutatividade	52
6	Sucessões de funções	55
6.1	Convergência simples e convergência uniforme	55
6.2	Propriedades da convergência uniforme	57
7	Séries de funções	61
7.1	Séries de potências	63
7.2	Séries de Fourier	71

1 Primitivas

A primitivação é o processo inverso da derivação.

Definição 1.1 *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Uma primitiva¹ de f em I é uma função derivável $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F' = f$.*

Para designar F usam-se os símbolos

$$Pf \quad \text{ou} \quad \int f \quad \text{ou} \quad \int f(x) dx ;$$

no último destes símbolos, a partícula dx não tem nenhum significado particular, servindo apenas para indicar qual a variável independente em causa no processo.

Exemplo 1.1 Como $(\sin x)' = \cos x$, tem-se

$$\int \cos x dx = \sin x .$$

Observação 1.1 Chama-se enfaticamente a atenção para o facto de só se considerar a primitiva de uma função definida num intervalo. Só este caso é verdadeiramente relevante e o que se ganha em termos de facilidade na exposição supera claramente o que se perde em termos de generalidade. Quando não for explicitamente indicado o intervalo em causa, considera-se que se trata do maior intervalo em que a função está definida.

Colocam-se, de imediato, três questões:

1. Uma função definida num intervalo tem necessariamente primitiva?
2. Quando existe, a primitiva é única?
3. Como se determina a primitiva de uma função num intervalo?

¹ou anti-derivada ou integral indefinido

A resposta à primeira questão é obviamente negativa. O teorema de Darboux afirma que se uma função for derivável num intervalo $[a, b]$, a sua derivada satisfaz necessariamente a condição do valor intermédio (mesmo sendo descontínua). Assim, uma função que não satisfaça esta condição num intervalo não pode, nesse intervalo, ser derivada de nenhuma função e portanto não tem primitiva.

Exemplo 1.2 A função $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [-1, 0] \\ 1 & \text{se } x \in (0, 1] \end{cases}$$

não tem primitiva em $[-1, 1]$, pois não verifica nesse intervalo a condição do valor intermédio.

A segunda questão tem também resposta negativa. Basta observar que se F for uma primitiva de f num dado intervalo então $F + C$, com C uma qualquer constante, também é uma primitiva de f nesse intervalo pois

$$(F + C)' = F' + C' = f + 0 = f .$$

Mas não há outras primitivas para além destas, como explicita o próximo resultado.

Proposição 1.1 *Sejam F_1 e F_2 duas primitivas de f num intervalo I . Então $F_1 - F_2$ é constante em I .*

DEMONSTRAÇÃO: A função $F_1 - F_2$ é contínua em I e

$$(F_1 - F_2)' = F_1' - F_2' = f - f = 0 .$$

Por um dos corolários do teorema de Lagrange, $F_1 - F_2$ é constante em I . □

Por este motivo, de agora em diante, passamos a escrever

$$\int f = F + C ,$$

onde F é uma qualquer primitiva de f e C é uma constante arbitrária. Indicamos assim a família de todas as primitivas de f no intervalo em causa.

Passemos agora à questão da determinação da primitiva de uma dada função. Uma primeira nota diz respeito à impossibilidade de determinar a primitiva nalguns casos, mesmo quando se sabe que a primitiva existe. Veremos adiante que toda a função contínua num intervalo I tem primitiva nesse intervalo. Por exemplo, as funções

$$\frac{\sin x}{x}; \quad e^{-x^2}; \quad \sin(x^2); \quad \frac{1}{\ln x}$$

são contínuas em intervalos apropriados, tendo portanto primitiva nesses intervalos. Sucede que as primitivas não podem ser determinadas! Isto significa que se demonstra não ser possível exprimir a primitiva usando um número finito de operações usuais envolvendo as funções elementares.

O cálculo de primitivas baseia-se num conjunto de regras, as chamadas regras de primitivação. As mais simples são as que resultam da identificação imediata de uma função como uma derivada – são as regras de primitivação imediata, que se obtêm por inversão de uma tabela de derivadas.

Tratando-se a primitivação do processo inverso da derivação, é natural que se obtenham regras de primitivação a partir das regras de derivação.

• **Regra da decomposição:**

é consequência da regra da derivada da soma e da regra da derivada do produto por uma constante; sejam F e G primitivas de f e g , respectivamente; como

$$(\alpha F + \beta G)' = \alpha F' + \beta G' = \alpha f + \beta g$$

tem-se

$$\int (\alpha f + \beta g) = \alpha F + \beta G + C ,$$

ou seja,

$$\boxed{\int (\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g + C}$$

Exemplo 1.3

$$\int (2x^2 + 5 \sinh x) dx = 2\frac{x^3}{3} + 5 \cosh x + C .$$

- **Regra da integração por partes:**

é consequência da regra da derivada do produto; seja F a primitiva de f ; como

$$(F g)' = F' g + F g' = f g + F g'$$

tem-se

$$\int (f g + F g') = F g + C$$

e, pela regra da decomposição,

$$\int (f g) = F g - \int (F g') + C ,$$

ou seja,

$$\boxed{\int (f g) = \left(\int f\right) g - \int \left[\left(\int f\right) g'\right] + C}$$

A designação da regra é clara: primitiva-se primeiro um dos factores, portanto uma *parte* (na notação acima $\int f$), determinando-se depois outra primitiva ($\int [(\int f) g']$), que deverá ser mais simples de calcular do que a primitiva inicial. Em geral, começa-se a primitivar pelo factor que menos se simplifica por derivação, mas há excepções a esta regra (ver exemplo 1.5).

Exemplo 1.4

$$\int x \cos x dx = (\sin x)x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C .$$

Exemplo 1.5

$$\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C .$$

Exemplo 1.6

$$\int \ln x \, dx = \int 1 \cdot \ln x \, dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} \, dx = x \ln x - x + C .$$

- **Regra da integração por substituição:**

é consequência da regra da derivada da função composta; seja G a primitiva de g e f uma função invertível; como

$$(G \circ f)' = (G' \circ f) f' = (g \circ f) f'$$

tem-se

$$\int [(g \circ f) f'] = G \circ f = \left(\int g \right) \circ f$$

e portanto

$$\int g = \left(\int [(g \circ f) f'] \right) \circ f^{-1}$$

que se pode escrever, de forma mais sugestiva, como

$$\boxed{\int g(x) \, dx = \left[\int g[f(t)] f'(t) \, dt \right]_{t=f^{-1}(x)}}$$

trata-se, na prática, de efectuar uma *substituição* de variável, $x = f(t)$, que transforma a primitiva noutra primitiva mais simples de calcular. A substituição adequada depende naturalmente da expressão que define g e existem tabelas que listam os principais casos.

Exemplo 1.7 Para uma função do tipo da indicada a seguir, a tabela sugere a substituição $x = \ln t \Leftrightarrow t = e^x$; assim,

$$\begin{aligned} \int \frac{e^x}{\cosh x} \, dx &= \left[\int \frac{2t}{t + \frac{1}{t}} \frac{1}{t} \, dt \right]_{t=e^x} = \left[\int \frac{2t}{t^2 + 1} : dt \right]_{t=e^x} \\ &= [\ln(t^2 + 1) + C]_{t=e^x} = \ln(e^{2x} + 1) + C . \end{aligned}$$

2 O integral de Riemann

If I have seen further, it is by standing on the shoulders of giants.

ISAAC NEWTON, numa carta para Robert Hooke, 1676.

Apesar de as suas origens remontarem à antiguidade e, em particular, aos trabalhos de Arquimedes, foi no século XVII que se desenvolveu de forma sistemática o Cálculo Integral, com a descoberta por Newton e Leibniz da relação de reciprocidade entre integração e diferenciação – a pedra angular da Análise Infinitesimal. O estabelecimento de uma rigorosa teoria da integração só foi, no entanto, possível depois de adequadamente fundamentada a análise real, em que se destacaram Cauchy e Riemann.

Definição 2.1 *Seja $[a, b]$ um intervalo limitado e fechado. Uma **partição** de $[a, b]$ é um subconjunto finito de $[a, b]$ que contém a e b .*

Convencionamos escrever sempre os elementos de uma partição de um intervalo $[a, b]$,

$$P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\} ,$$

por ordem crescente. Assim, na notação acima, $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$. Observe-se que uma partição com $n + 1$ pontos divide (ou particiona) o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos da forma $[t_{i-1}, t_i]$, com $i = 1, 2, \dots, n$.

Exemplo 2.1 $\{1, 2, \pi, 5\}$ é uma partição do intervalo $[1, 5]$. Já $\{0, \frac{4}{3}, 3\}$ não é uma partição de $[0, 6]$, pois não contém 6.

Dada uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitada, definem-se

$$m = \inf_{x \in [a, b]} f(x) \quad \text{e} \quad M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$$

e, analogamente, dada uma partição $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ de $[a, b]$,

$$m_i = \inf_{x \in [t_{i-1}, t_i]} f(x) \quad \text{e} \quad M_i = \sup_{x \in [t_{i-1}, t_i]} f(x) .$$

Definição 2.2 A *soma inferior* de f relativamente à partição P é o número real

$$s(f; P) = \sum_{i=1}^n m_i (t_i - t_{i-1}) ;$$

a *soma superior* de f relativamente à partição P é o número real

$$S(f; P) = \sum_{i=1}^n M_i (t_i - t_{i-1}) .$$

É evidente que, qualquer que seja a partição P de $[a, b]$,

$$m(b - a) \leq s(f; P) \leq S(f; P) \leq M(b - a) . \quad (1)$$

Observação 2.1 No caso em que f é não negativa em $[a, b]$, os números reais $s(f; P)$ e $S(f; P)$ são valores aproximados, respectivamente por defeito e por excesso, para a medida da área da região limitada pelo gráfico de f , pelo eixo das abcissas e pelas rectas verticais $x = a$ e $x = b$. Ambos correspondem à soma das medidas das áreas de rectângulos: no primeiro caso, inscritos na região, no segundo caso, circunscritos.

Definição 2.3 Dadas duas partições, P e Q , de um intervalo $[a, b]$, diz-se que Q é **mais fina** do que P (ou que Q *refina* P) se $Q \supset P$.

Exemplo 2.2 $\{1, 2, 3, \pi, 5\}$ é mais fina do que $\{1, 2, \pi, 5\}$.

O resultado seguinte afirma que, quando se refina uma partição, a soma inferior de uma função f não diminui e a soma superior não aumenta.

Teorema 2.1 Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitada e $Q \supset P$ duas partições de $[a, b]$. Então

$$s(f; Q) \geq s(f; P) \quad \text{e} \quad S(f; Q) \leq S(f; P) .$$

DEMONSTRAÇÃO: Provamos apenas o resultado relativo à soma superior (o outro caso é inteiramente análogo). Suponhamos que

$$Q = P \cup \{r\} = \{t_0, t_1, \dots, t_n\} \cup \{r\} ,$$

ou seja, que Q refina P por acréscimo de um só ponto r . Naturalmente, $r \in (t_{j-1}, t_j)$, para algum $1 \leq j \leq n$. Definindo

$$M' = \sup_{x \in [t_{j-1}, r]} f(x) \quad \text{e} \quad M'' = \sup_{x \in [r, t_j]} f(x)$$

e recordando que

$$M_j = \sup_{x \in [t_{j-1}, t_j]} f(x) ,$$

é evidente que $M_j \geq M'$ e $M_j \geq M''$. Assim

$$\begin{aligned} S(f; P) - S(f; Q) &= M_j(t_j - t_{j-1}) - M'(r - t_{j-1}) - M''(t_j - r) \\ &= M_j(t_j - r + r - t_{j-1}) - M'(r - t_{j-1}) - M''(t_j - r) \\ &= (M_j - M')(r - t_{j-1}) + (M_j - M'')(t_j - r) \\ &\geq 0 . \end{aligned}$$

No caso geral, em que Q se obtém de P acrescentando-lhe k pontos, repete-se este raciocínio k vezes.

□

Corolário 2.1 *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitada e P e Q duas quaisquer partições de $[a, b]$. Então*

$$s(f; Q) \leq S(f; P) .$$

DEMONSTRAÇÃO: De facto, $P \cup Q$ refina simultaneamente P e Q . Assim, resulta do **Teorema 2.1** e de (1) que

$$s(f; Q) \leq s(f; P \cup Q) \leq S(f; P \cup Q) \leq S(f; P) .$$

□

Resulta das desigualdades (1) que o conjunto formado por todas as somas inferiores de f – ou seja, pelas somas inferiores de f relativas a todas as partições de $[a, b]$ – é limitado (e o mesmo vale para as somas superiores). Faz portanto sentido a seguinte

Definição 2.4 *O integral inferior de f em $[a, b]$ é o número real*

$$\int_a^b f(x) dx = \sup_P s(f; P) ;$$

o integral superior de f em $[a, b]$ é o número real

$$\int_a^b f(x) dx = \inf_P S(f; P) ,$$

sendo o supremo e o ínfimo tomados relativamente a todas as partições de $[a, b]$.

Recordemos um resultado relativo a ínfimos e supremos cuja demonstração é deixada como exercício (muito instrutivo).

Lema 2.1 *Sejam A e B dois subconjuntos limitados de \mathbb{R} tais que*

$$\forall a \in A, \forall b \in B, a \leq b .$$

Então:

$$(i) \sup A \leq \inf B .$$

$$(ii) \sup A = \inf B \text{ se, e só se, } \forall \epsilon > 0, \exists a \in A, \exists b \in B : b - a < \epsilon .$$

Um outro corolário do **Teorema 2.1** é o

Corolário 2.2 *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitada, com*

$$m \leq f(x) \leq M, \quad \forall x \in [a, b] .$$

Então

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a) .$$

DEMONSTRAÇÃO: A primeira e a última desigualdades resultam trivialmente de (1). A outra segue-se do **Corolário 2.1** e do **Lema 2.1-(i)**. \square

Definição 2.5 Uma função limitada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável (à Riemann) em $[a, b]$ se

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx .$$

O valor comum é o integral (de Riemann) de f em $[a, b]$, que se denota por $\int_a^b f(x) dx$.

Observação 2.2 Geometricamente, e no caso em que f é não negativa em $[a, b]$, a existência do integral significa que a região limitada pelo gráfico de f , pelo eixo das abcissas e pelas rectas verticais $x = a$ e $x = b$ é mensurável (isto é, pode medir-se) e o valor do integral é, por definição, a medida da área dessa região.

Observação 2.3 Dada uma partição P , chama-se *amplitude da partição*, e representa-se por $|P|$, ao maior dos comprimentos dos subintervalos de P . Uma *partição pontilhada* P^* é uma partição para a qual foram escolhidos arbitrariamente n pontos $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$. Uma alternativa à definição de integral apresentada consiste em considerar **somas de Riemann** para f em $[a, b]$

$$\sum(f; P^*) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(t_i - t_{i-1})$$

e tomar o limite I destas somas quando a amplitude da partição tende para zero. Mostra-se que f é integrável se, e só se, esse limite existe e, nesse caso, tem-se

$$I = \int_a^b f(x) dx .$$

O limite é tomado no seguinte sentido:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \left| \sum(f; P^*) - I \right| < \epsilon, \quad \forall P^* : |P| < \delta .$$

Exemplo 2.3 Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = c$, para todo o $x \in [a, b]$, ou seja, f é constante em $[a, b]$. Espera-se, como é óbvio, que esta função seja integrável e que o seu integral seja a área de um retângulo de comprimento $b - a$ e largura c , ou seja $c(b - a)$. Seja P uma qualquer partição de $[a, b]$. Como f é constante igual a c , tem-se $m_i = M_i = c$, $i = 1, 2, \dots, n$. Assim

$$s(f; P) = \sum_{i=1}^n m_i (t_i - t_{i-1}) = c \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) = c(b - a)$$

e, analogamente, $S(f; P) = c(b - a)$. Logo, os conjuntos das somas inferiores e das somas superiores só têm o elemento $c(b - a)$, pelo que o integral inferior e o integral superior são ambos iguais a $c(b - a)$. Portanto, f é integrável e

$$\int_a^b f(x) dx = c(b - a) .$$

Exemplo 2.4 A função de Dirichlet $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbf{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbf{Q} \end{cases}$$

não é integrável. De facto, dada uma qualquer partição Q de $[a, b]$, tem-se $m_i = 0$ e $M_i = 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$), já que, em qualquer dos subintervalos, existem números racionais e números irracionais. Assim

$$S(\varphi; Q) = \sum_{i=1}^n M_i (t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) = b - a$$

e, analogamente, $s(\varphi; Q) = 0$. Logo,

$$0 = \int_a^b \varphi(x) dx \neq \int_a^b \varphi(x) dx = b - a .$$

O teorema seguinte fornece condições necessárias e suficientes de integrabilidade.

Teorema 2.2 *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitada. São equivalentes:*

(i) f é integrável em $[a, b]$.

(ii) $\forall \epsilon > 0$, existem partições P e Q de $[a, b]$, tais que

$$S(f; Q) - s(f; P) < \epsilon .$$

(iii) $\forall \epsilon > 0$, existe uma partição R de $[a, b]$, tal que

$$S(f; R) - s(f; R) < \epsilon .$$

DEMONSTRAÇÃO: O conjunto das somas inferiores e o conjunto das somas superiores satisfazem, em virtude do **Corolário 2.1**, a hipótese do **Lema 2.1**. Assim as implicações (i) \Rightarrow (ii) e (iii) \Rightarrow (i) são consequências imediatas do **Lema 2.1**-(ii).

Para provar que (ii) \Rightarrow (iii), fixemos $\epsilon > 0$. Existem partições P e Q de $[a, b]$, tais que

$$S(f; Q) - s(f; P) < \epsilon .$$

Seja $R = P \cup Q$, uma partição que refina simultaneamente P e Q . Pelo **Teorema 2.1**, $s(f; P) \leq s(f; R) \leq S(f; R) \leq S(f; Q)$, pelo que

$$S(f; R) - s(f; R) \leq S(f; Q) - s(f; P) < \epsilon .$$

□

Exemplo 2.5 Vamos usar o resultado anterior para mostrar que, modificando o valor de uma função constante num ponto, a função permanece integrável e o seu integral não se altera. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} c & \text{se } x \in [a, b] \setminus \{x_0\} \\ c' & \text{se } x = x_0 \end{cases} ,$$

onde $x_0 \in [a, b]$ e, sem perda de generalidade, $c' > c$. Dada uma qualquer partição P de $[a, b]$, seja $[t_{j-1}, t_j]$ o subintervalo que contém x_0 . Tem-se $m_i = c$, para todo o $i = 1, 2, \dots, n$; e $M_i = c$ para $i \neq j$, $M_j = c'$. Assim

$$S(f; P) - s(f; P) = (c' - c)(t_j - t_{j-1}) .$$

Dado $\epsilon > 0$, escolhamos uma partição P tal que $t_j - t_{j-1} < \frac{\epsilon}{c' - c}$. Então

$$S(f; P) - s(f; P) = (c' - c)(t_j - t_{j-1}) < (c' - c) \frac{\epsilon}{c' - c} = \epsilon$$

e, pelo **Teorema 2.2**, f é integrável. Mais, como todas as somas inferiores são iguais a $c(b - a)$, tem-se

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx = c(b - a) .$$

2.1 Propriedades do integral de Riemann

A demonstração do seguinte resultado pode ser encontrada em [4, págs. 308 e 317].

Teorema 2.3 *Seja $a < c < b$. Uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitada é integrável no intervalo $[a, b]$ se, e só se, as suas restrições aos intervalos $[a, c]$ e $[c, b]$ são integráveis. Nesse caso, tem-se*

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx . \quad (2)$$

De agora em diante, convencionou-se que

$$\int_a^a f(x) dx = 0 \quad \text{e} \quad \int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx ,$$

passando (2) a fazer sentido para quaisquer valores reais de a , b e c desde que f seja integrável no maior dos intervalos em causa.

Exemplo 2.6 Uma função $\xi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se uma **função em escada** se existirem uma partição $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ de $[a, b]$ e números reais c_1, \dots, c_n , tais que

$$\xi(x) = c_i , \quad \forall x \in (t_{i-1}, t_i) ; \quad i = 1, 2, \dots, n .$$

Usando (2) e o **Exemplo 2.5**, conclui-se que uma função em escada é integrável e que

$$\int_a^b \xi(x) dx = \sum_{i=1}^n c_i (t_i - t_{i-1}) .$$

Observe-se que o valor do integral não depende dos valores de ξ nos extremos dos subintervalos da partição.

Teorema 2.4 *Sejam $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funções integráveis. Então:*

1. se $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, b]$ então

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx ;$$

2. $|f|$ é integrável e

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx ;$$

3. a soma $f + g$ é integrável e

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx ; \quad (3)$$

4. o produto fg é integrável; se $c \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx ; \quad (4)$$

5. se $0 < k \leq |g(x)|, \forall x \in [a, b]$ então o quociente f/g é integrável.

DEMONSTRAÇÃO: 1. O resultado é trivial, bastando observar que, para qualquer partição P , se tem $s(f; P) \leq s(g; P)$ e $S(f; P) \leq S(g; P)$.

2. Para mostrar que $|f|$ é integrável usa-se o **Teorema 2.2** e o facto (cuja demonstração é deixada como exercício) de, para uma função $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ limitada, se ter

$$\sup_{x \in X} g(x) - \inf_{x \in X} g(x) = \sup_{x, y \in X} |g(x) - g(y)| . \quad (5)$$

Dado $\epsilon > 0$, como f é integrável, existe uma partição $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ de $[a, b]$ tal que $S(f; P) - s(f; P) < \epsilon$. Então

$$\begin{aligned}
S(|f|; P) - s(|f|; P) &= \sum_{i=1}^n \left(\sup_{x \in [t_{i-1}, t_i]} |f(x)| - \inf_{x \in [t_{i-1}, t_i]} |f(x)| \right) (t_i - t_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^n \sup_{x, y \in [t_{i-1}, t_i]} \left| |f(x)| - |f(y)| \right| (t_i - t_{i-1}) \\
&\leq \sum_{i=1}^n \sup_{x, y \in [t_{i-1}, t_i]} |f(x) - f(y)| (t_i - t_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^n \left(\sup_{x \in [t_{i-1}, t_i]} f(x) - \inf_{x \in [t_{i-1}, t_i]} f(x) \right) (t_i - t_{i-1}) \\
&= S(f; P) - s(f; P) < \epsilon,
\end{aligned}$$

onde a segunda e penúltima igualdades resultam de (5) e a desigualdade $\left| |a| - |b| \right| \leq |a - b|$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$ é de verificação imediata. Logo, $|f|$ é integrável. A desigualdade entre o módulo do integral e o integral do módulo é consequência imediata de

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|, \quad \forall x \in [a, b]$$

e da propriedade 1.

3. Seja $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ uma partição de $[a, b]$ e

$$m'_i = \inf_{x \in [t_{i-1}, t_i]} f(x); \quad m''_i = \inf_{x \in [t_{i-1}, t_i]} g(x); \quad m_i = \inf_{x \in [t_{i-1}, t_i]} (f + g)(x).$$

Tem-se $m'_i + m''_i \leq m_i$ já que, para f e g limitadas, $\inf(f + g) \geq \inf f + \inf g$ (a demonstração deste facto é deixada como exercício). Assim, qualquer que seja a partição P ,

$$s(f; P) + s(g; P) \leq s(f + g; P) \leq \int_a^b (f + g)(x) dx.$$

Se considerarmos duas partições P e Q , temos

$$\begin{aligned}
s(f; P) + s(g; Q) &\leq s(f; P \cup Q) + s(g; P \cup Q) \leq s(f + g; P \cup Q) \\
&\leq \int_a^b (f + g)(x) dx.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx &= \sup_P s(f; P) + \sup_Q s(g; Q) \\ &= \sup_{P, Q} [s(f; P) + s(g; Q)] \\ &\leq \int_a^b (f + g)(x) dx \end{aligned}$$

De modo análogo se demonstra a terceira das desigualdades seguintes (sendo a segunda trivial):

$$\int_a^b f + \int_a^b g \leq \int_a^b (f + g) \leq \int_a^b (f + g) \leq \int_a^b f + \int_a^b g$$

Como f e g são integráveis, estas desigualdades reduzem-se a igualdades, obtendo-se o pretendido.

Omitimos a demonstração das propriedades 4. e 5. (ver [4]).

□

Observação 2.4 As propriedades (3) e (4) traduzem a *linearidade* do integral de Riemann como operador definido no espaço vectorial das funções integráveis em $[a, b]$, com valores em \mathbb{R} .

Corolário 2.3 *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrável. Então:*

1. se $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$,

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0 ;$$

2. se $|f(x)| \leq k, \forall x \in [a, b]$,

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq k(b - a) .$$

Observação 2.5 Uma função não-negativa pode ter integral igual a zero sem ser identicamente nula. Um exemplo é dado pela função $f : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0, 4] \setminus \{\pi\} \\ \sqrt{2} & \text{se } x = \pi \end{cases} .$$

No entanto, se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ for não-negativa e integrável em $[a, b]$ e se for contínua num ponto $c \in [a, b]$ tal que $f(c) > 0$, então necessariamente $\int_a^b f(x) dx > 0$.

2.2 Condições suficientes de integrabilidade

A noção de continuidade para uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é uma noção local: se para cada ponto $x \in X$ existir uma vizinhança V_x tal que a restrição de f a $V_x \cap X$ é contínua, então f é contínua em X .

Introduz-se, de seguida, uma noção de continuidade global, que não decorre directamente do comportamento de f na vizinhança de cada ponto.

Definição 2.6 *Seja $X \subset \mathbb{R}$. Uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se **uniformemente contínua em X** se*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \left. \begin{array}{l} x, y \in X \\ |x - y| < \delta \end{array} \right\} \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon .$$

Nesta definição, x e y desempenham papéis inteiramente simétricos. Fixado ϵ , a escolha de δ só depende de ϵ , ao contrário do que sucede na definição de função contínua num ponto em que, para cada ϵ , a escolha de δ depende de ϵ e do ponto em causa.

Exemplo 2.7 A função $f : [-2, 2] \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \in [-2, 0) \\ 1 & \text{se } x \in (0, 2] \end{cases}$$

não é uniformemente contínua em $[-2, 2] \setminus \{0\}$, apesar de ser obviamente contínua. De facto, fixado $\epsilon = 1$, é possível, qualquer que seja $\delta > 0$,

encontrar pontos x, y em $[-2, 2] \setminus \{0\}$, por exemplo

$$x = \max \left\{ -2, -\frac{\delta}{4} \right\} \quad y = \min \left\{ \frac{\delta}{4}, 2 \right\},$$

tais que $|x - y| = \min \left\{ \frac{\delta}{2}, 4 \right\} < \delta$ e $|f(x) - f(y)| = |-1 - 1| = 2 > 1 = \epsilon$.

A demonstração do resultado seguinte pode ser consultada em [4, pág. 244].

Teorema 2.5 *Uma função contínua num conjunto limitado e fechado X é uniformemente contínua em X .*

A função do exemplo anterior falha a condição de estar definida num conjunto fechado.

Apresentamos, agora, duas condições suficientes de integrabilidade para um função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, a saber, a continuidade e a monotonia.

Teorema 2.6 *Uma função contínua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável em $[a, b]$.*

DEMONSTRAÇÃO: Como $[a, b]$ é limitado e fechado, f é uniformemente contínua em $[a, b]$ (pelo **Teorema 2.5**). Fixemos $\epsilon > 0$. Como $\frac{\epsilon}{b-a} > 0$, pela continuidade uniforme de f ,

$$\exists \delta > 0 : \left. \begin{array}{l} x, y \in X \\ |x - y| < \delta \end{array} \right\} \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{b-a}.$$

Escolhemos uma partição P de $[a, b]$ tal que $t_i - t_{i-1} < \delta$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Então,

$$\begin{aligned} S(f; P) - s(f; P) &= \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n [f(x_i) - f(y_i)](t_i - t_{i-1}) ; \quad x_i, y_i \in [t_{i-1}, t_i] \\ &< \frac{\epsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \\ &= \frac{\epsilon}{b-a} (b-a) = \epsilon \end{aligned}$$

e a integrabilidade de f segue-se do **Teorema 2.2**. A segunda igualdade acima resulta do teorema de Weirstraß, já que f é contínua em cada intervalo fechado e limitado $[t_{i-1}, t_i]$. A desigualdade é consequência da continuidade uniforme, já que, para $x_i, y_i \in [t_{i-1}, t_i]$, se tem necessariamente $|x_i - y_i| < \delta$, em virtude do modo como foi escolhida da partição. □

Teorema 2.7 *Uma função monótona $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável em $[a, b]$.*

DEMONSTRAÇÃO: Suponhamos, sem perda de generalidade, que f é não-crescente. Fixemos $\epsilon > 0$. Observando que $f(a) - f(b) > 0$ (excepto no caso trivial em que f é constante), escolhemos uma partição P de $[a, b]$ tal que

$$t_i - t_{i-1} < \frac{\epsilon}{f(a) - f(b)}, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Então,

$$\begin{aligned} S(f; P) - s(f; P) &= \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n [f(t_{i-1}) - f(t_i)](t_i - t_{i-1}) \\ &< \frac{\epsilon}{f(a) - f(b)} \sum_{i=1}^n [f(t_{i-1}) - f(t_i)] \\ &= \frac{\epsilon}{f(a) - f(b)} [f(a) - f(b)] = \epsilon \end{aligned}$$

e a integrabilidade de f segue-se do **Teorema 2.2**. □

Finalmente, enunciamos, sem demonstração, uma outra condição suficiente de integrabilidade, que mostra que uma função limitada não-integrável tem necessariamente uma infinidade não-numerável de descontinuidades.

Teorema 2.8 *Se o conjunto das descontinuidades de uma função limitada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ for numerável então f é integrável em $[a, b]$.*

2.3 O Teorema Fundamental do Cálculo

A pedra angular do Cálculo Infinitesimal é a relação de reciprocidade entre os conceitos de derivada e integral estabelecida pelo seguinte teorema, justamente apelidado de fundamental.

Teorema 2.9 (Teorema Fundamental do Cálculo) *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. A função definida em $[a, b]$ por*

$$G(x) = \int_a^x f(t) dt$$

é uma primitiva de f em $[a, b]$.

DEMONSTRAÇÃO: Mostremos que $G'_+(x_0) = f(x_0)$, para todo o $x_0 \in [a, b)$. De modo análogo se provaria que $G'_-(x_0) = f(x_0)$, para todo o $x_0 \in (a, b]$. Seja então $x_0 \in [a, b)$. Dado $\epsilon > 0$, como f é contínua em x_0 ,

$$\exists \delta > 0 : t \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a, b] \Rightarrow |f(t) - f(x_0)| < \epsilon .$$

Seja $0 < h < \delta$ tal que $x_0 + h \in [a, b]$. Então,

$$\begin{aligned} \left| \frac{G(x_0 + h) - G(x_0)}{h} - f(x_0) \right| &= \frac{1}{h} \left| \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt - hf(x_0) \right| \\ &= \frac{1}{h} \left| \int_{x_0}^{x_0+h} [f(t) - f(x_0)] dt \right| \\ &\leq \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)| dt \\ &\leq \frac{1}{h} h \epsilon = \epsilon \end{aligned}$$

porque, para $t \in [x_0, x_0 + h]$, se tem $|t - x_0| \leq h < \delta$. Daqui resulta que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{G(x_0 + h) - G(x_0)}{h} = f(x_0) ,$$

ou seja, que $G'_+(x_0) = f(x_0)$.

□

Exemplo 2.8

$$\left(\int_0^{x^2} \sin t \, dt \right)' = \sin(x^2)(x^2)' = 2x \sin(x^2) ,$$

aplicando o teorema da derivada da função composta e o Teorema Fundamental do Cálculo.

De agora em diante, será utilizada a notação $F \Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

Corolário 2.4 (Fórmula de Barrow²) *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e F uma qualquer primitiva de f em $[a, b]$. Então,*

$$\int_a^b f(x) \, dx = F \Big|_a^b = F(b) - F(a) .$$

DEMONSTRAÇÃO: Como duas primitivas de uma mesma função num intervalo diferem por uma constante (**Proposição 1.1**), resulta do Teorema Fundamental do Cálculo que

$$F(x) - \int_a^x f(t) \, dt = C , \quad \forall x \in [a, b] .$$

Pondo $x = a$, vem imediatamente $C = F(a)$. A fórmula de Barrow resulta agora de escolher $x = b$ nesta identidade.

□

O teorema mostra que toda a função contínua num intervalo tem primitiva nesse intervalo e justifica a notação $\int f$ e a designação de integral indefinido, utilizadas anteriormente para a primitiva de uma função.

Exemplo 2.9

$$\int_0^1 x^2 \, dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^1 = \frac{1}{3} ; \quad \int_0^\pi \cos x \, dx = \left. \sin x \right|_0^\pi = 0 .$$

²Isaac Barrow (1630-1677), professor de Isaac Newton.

2.4 Os teoremas clássicos do Cálculo Integral

Apresentamos, de seguida, alguns resultados que são consequência, mais ou menos imediata, do Teorema Fundamental do Cálculo.

Teorema 2.10 (mudança de variável) *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e $g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 tal que $g([c, d]) \subset [a, b]$. Então,*

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x) dx = \int_c^d f[g(t)] g'(t) dt .$$

DEMONSTRAÇÃO: Como f é contínua em $[a, b]$, possui uma primitiva F . A fórmula de Barrow dá-nos

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x) dx = F \Big]_{g(c)}^{g(d)} = F[g(d)] - F[g(c)] . \quad (6)$$

Por outro lado, pelo teorema da derivada da função composta, $(F \circ g)'(t) = f[g(t)] g'(t)$ em $[c, d]$ e portanto, usando outra vez a fórmula de Barrow,

$$\begin{aligned} \int_c^d f[g(t)] g'(t) dt &= F \circ g \Big]_c^d = (F \circ g)(d) - (F \circ g)(c) \\ &= F[g(d)] - F[g(c)] . \end{aligned} \quad (7)$$

Comparando (6) com (7), obtemos o resultado. □

Teorema 2.11 (integração por partes) *Sejam $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funções de classe C^1 . Então,*

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = fg \Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx .$$

DEMONSTRAÇÃO: Como, pelo teorema da derivada do produto,

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) ,$$

o resultado é consequência imediata da aplicação da fórmula de Barrow. □

Definição 2.7 A *média* de uma função contínua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é o número real

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx .$$

Teorema 2.12 (fórmula do valor médio) Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua então a sua média é atingida em (a, b) , i.e., existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\int_a^b f(x) dx = f(c) .$$

DEMONSTRAÇÃO: Seja F uma primitiva de f em $[a, b]$. Como F está nas condições do teorema do valor médio de Lagrange, existe $c \in (a, b)$ tal que $\frac{F(b) - F(a)}{b - a} = F'(c)$. Assim,

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \frac{F(b) - F(a)}{b-a} = F'(c) = f(c) .$$

□

O resultado tem uma interpretação geométrica muito simples para funções não-negativas: a medida da área da região limitada pelo gráfico da função, pelo eixo das abcissas e pelas rectas verticais $x = a$ e $x = b$ é igual à de um rectângulo de comprimento igual a $b - a$ e largura igual ao valor da função nalgum ponto $c \in (a, b)$.

Lema 2.2 Seja $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^n . Então, para todo o $n = 1, 2, \dots$,

$$\varphi(1) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(i)}(0)}{i!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!} \varphi^{(n)}(t) dt .$$

DEMONSTRAÇÃO: A prova é por indução. O caso $n = 1$ resulta imediatamente do Teorema Fundamental do Cálculo:

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \int_0^1 \varphi'(t) dt .$$

Suponhamos que o resultado é válido para $k - 1$ e provemos que também é válido para k . Ora, aplicando primeiro o teorema da integração por partes e depois a hipótese de indução, obtemos

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 \frac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!} \varphi^{(k)}(t) dt \\
 &= \left. \frac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!} \varphi^{(k-1)}(t) \right|_0^1 + \int_0^1 \frac{(1-t)^{k-2}}{(k-2)!} \varphi^{(k-1)}(t) dt \\
 &= -\frac{\varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!} + \varphi(1) - \sum_{i=0}^{k-2} \frac{\varphi^{(i)}(0)}{i!} \\
 &= \varphi(1) - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\varphi^{(i)}(0)}{i!},
 \end{aligned}$$

tendo em conta, na primeira igualdade, que

$$\left(\frac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!} \right)' = -\frac{(k-1)(1-t)^{k-2}}{(k-1)(k-2)!} = -\frac{(1-t)^{k-2}}{(k-2)!}.$$

O resultado está demonstrado. □

A seguinte fórmula de Taylor apresenta um resto na forma integral que é útil, em muitas circunstâncias, para a obtenção de boas estimativas de erro quando se aproxima uma função usando o seu polinómio de Taylor.

Teorema 2.13 (fórmula de Taylor com resto integral) *Seja f uma função de classe C^n no intervalo $[a, a+h]$. Então,*

$$f(a+h) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} h^i + \left[\int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(a+th) dt \right] h^n.$$

DEMONSTRAÇÃO: Definindo, no intervalo $[0, 1]$, a função $\varphi(t) = f(a+th)$, tem-se $\varphi^{(i)}(0) = f^{(i)}(a) h^i$. O resultado é consequência imediata do **Lema 2.2**. □

2.5 O logaritmo e a exponencial

Usando o cálculo integral, é possível definir o logaritmo de forma alternativa.

Definição 2.8 Chama-se **logaritmo** à função

$$\begin{aligned} \ln : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}. \end{aligned}$$

Resulta imediatamente da definição que $\ln x < 0$ para $0 < x < 1$, $\ln 1 = 0$ e $\ln x > 0$ para $x > 1$. É ainda evidente que o logaritmo é uma função infinitamente derivável, logo de classe C^∞ . Como $(\ln x)' = 1/x > 0$, é uma função monótona crescente e como $(\ln x)'' = -1/x^2 < 0$, é côncava (tem a concavidade voltada para baixo).

Teorema 2.14 Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^+$, tem-se $\ln(xy) = \ln x + \ln y$.

DEMONSTRAÇÃO: Tem-se

$$\ln(xy) = \int_1^{xy} \frac{dt}{t} = \int_1^x \frac{dt}{t} + \int_x^{xy} \frac{dt}{t} = \ln x + \int_x^{xy} \frac{dt}{t}.$$

Efectuando a mudança de variável $t = xs$, obtemos

$$\int_x^{xy} \frac{dt}{t} = \int_1^y \frac{x}{xs} ds = \int_1^y \frac{ds}{s} = \ln y$$

e o resultado. □

Corolário 2.5 Para quaisquer $r \in \mathbb{Q}$ e $x \in \mathbb{R}^+$, tem-se $\ln(x^r) = r \ln x$.

DEMONSTRAÇÃO: Resulta imediatamente do **Teorema 2.14** que, para todo $n \in \mathbb{N}$, se tem $\ln(x^n) = n \ln x$. A extensão do resultado a $r \in \mathbb{Z}$ é consequência de

$$0 = \ln 1 = \ln(x^n x^{-n}) = \ln(x^n) + \ln(x^{-n}) = n \ln x + \ln(x^{-n})$$

que dá $\ln(x^{-n}) = -n \ln x$. No caso geral $r = p/q$, tem-se

$$p \ln x = \ln(x^p) = \ln\left((x^{p/q})^q\right) = q \ln\left(x^{p/q}\right)$$

donde $\ln(x^r) = \ln\left(x^{p/q}\right) = \frac{p}{q} \ln x = r \ln x$. □

Corolário 2.6 A função logaritmo é bijectiva.

DEMONSTRAÇÃO: A injectividade é consequência da monotonia. A função é contínua, logo o seu contradomínio é um intervalo. Como, quando $n \rightarrow +\infty$,

$$\ln(2^n) = n \ln 2 \longrightarrow +\infty \quad ; \quad \ln(2^{-n}) = -n \ln 2 \longrightarrow -\infty$$

esse intervalo é $(-\infty, +\infty)$.

□

Sendo bijectiva, a função logaritmo é invertível. A sua inversa chama-se **função exponencial**

$$\begin{aligned} \exp : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\longmapsto \exp x \quad : \quad y = \exp x \Leftrightarrow x = \ln y \end{aligned}$$

e as suas propriedades poderiam agora deduzir-se a partir das propriedades demonstradas para o logaritmo.

2.6 Integração numérica

O cálculo do valor de um integral através da fórmula de Barrow exige a determinação de uma primitiva da função integranda. Quando tal não é possível, por exemplo porque a primitiva não é uma função elementar (ver **secção 1**), assume particular importância o cálculo de um valor aproximado para o integral, através dos chamados métodos numéricos. Neste contexto, é também muito relevante a obtenção de estimativas para o erro cometido com a aproximação.

O que está essencialmente em causa nos métodos numéricos para o cálculo de integrais é aproximar o processo de natureza infinitesimal do cálculo do integral por um processo discreto – a soma de um número finito de parcelas em que intervêm os valores da função num número finito de pontos. Consideremos um intervalo $[a, b]$ e uma sua partição $\{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ uniforme, *i.e.*, uma partição em que os subintervalos têm todos o mesmo comprimento:

$$t_i = a + ih \quad , \quad i = 0, 1, \dots, n \quad ; \quad h = \frac{b - a}{n} \quad .$$

Uma primeira possibilidade, que surge naturalmente a partir da definição do integral de Riemann, é aproximar a função usando funções em escada. Geometricamente, trata-se de aproximar a área sob o gráfico da função pela soma das áreas de rectângulos. São exemplos as aproximações que usam os valores da função no extremo inferior – ou esquerdo (*left*) – dos subintervalos

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \sum_{i=1}^n f(t_{i-1}) = h [f(t_0) + \dots + f(t_{n-1})] =: L_n$$

ou no extremo superior – ou direito (*right*) –

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \sum_{i=1}^n f(t_i) = h [f(t_1) + \dots + f(t_n)] =: R_n$$

para contradomínio das funções em escada (ou, geometricamente, para os comprimentos dos rectângulos).

Outra possibilidade é aproximar a função através de funções seccionalmente lineares que coincidam com f nos extremos de cada subintervalo. Geometricamente, trata-se de aproximar a área sob o gráfico da função pela soma das áreas de trapézios, limitados superiormente pelo segmento de recta que une os pontos $(t_{i-1}, f(t_{i-1}))$ e $(t_i, f(t_i))$, $i = 1, \dots, n$. Obtém-se, deste modo, a **regra do trapézio**:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx h \sum_{i=1}^n \frac{f(t_{i-1}) + f(t_i)}{2} \\ &= \frac{h}{2} [f(t_0) + 2f(t_1) + \dots + 2f(t_{n-1}) + f(t_n)] =: T_n . \end{aligned}$$

Trata-se, como se observa facilmente, da média aritmética das aproximações anteriores: $T_n = \frac{1}{2}(L_n + R_n)$.

Outra aproximação possível consiste em usar trapézios limitados superiormente pela tangente ao gráfico de f no ponto médio de cada subintervalo

$$\bar{t}_i = \frac{t_{i-1} + t_i}{2} .$$

É elementar verificar que as áreas destes trapézios coincidem com as áreas dos rectângulos de comprimento $f(\bar{t}_i)$. Obtemos assim a **regra do ponto**

médio (ou da tangente):

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \sum_{i=1}^n f(\bar{t}_i) = h \left[f(\bar{t}_1) + \dots + f(\bar{t}_n) \right] =: M_n .$$

O teorema seguinte apresenta uma estimativa para o erro

$$E_M = \int_a^b f(x) dx - M_n$$

que se comete ao aproximar o valor do integral usando a regra do ponto médio.

Teorema 2.15 *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 tal que*

$$|f''(x)| \leq K , \quad \forall x \in [a, b] .$$

Então

$$|E_M| \leq \frac{K(b-a)^3}{24n^2} .$$

DEMONSTRAÇÃO: No subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$, a tangente ao gráfico de f no seu ponto médio é a recta de equação $y = \phi(x)$, com

$$\phi(x) = f(\bar{t}_i) + f'(\bar{t}_i)(x - \bar{t}_i) ,$$

que não é senão o polinómio de Taylor de ordem 1 de f no ponto \bar{t}_i . Considerando a fórmula de Taylor com resto de Lagrange

$$f(x) = \phi(x) + \frac{f''(c)}{2}(x - \bar{t}_i)^2 ,$$

em que c está entre x e \bar{t}_i , obtemos a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned} \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} [f(x) - \phi(x)] dx \right| &\leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left| \frac{f''(c)}{2}(x - \bar{t}_i)^2 \right| dx \\ &\leq \frac{K}{2} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (x - \bar{t}_i)^2 dx \\ &= \frac{K}{2} \left[\frac{(x - \bar{t}_i)^3}{3} \right]_{t_{i-1}}^{t_i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{K}{2} \left[\frac{(h/2)^3}{3} - \frac{(-h/2)^3}{3} \right] \\
&= \frac{Kh^3}{24} .
\end{aligned}$$

Assim, o erro total é majorado por

$$|E_M| \leq \frac{nKh^3}{24} = \frac{K(b-a)^3}{24n^2} .$$

□

Uma estimativa do erro para a regra do trapézio, com a mesma hipótese acerca da majoração uniforme da segunda derivada de f , é dada por

$$|E_T| \leq \frac{K(b-a)^3}{12n^2} .$$

Exemplo 2.10 O cálculo aproximado de

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{x} dx ,$$

com $n = 5$ (ou seja, $h = 1/5$), dá

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx \approx \frac{1}{5} \left(\frac{1}{1,1} + \frac{1}{1,3} + \frac{1}{1,5} + \frac{1}{1,7} + \frac{1}{1,9} \right) \approx 0,691908 ,$$

usando a regra do ponto médio e

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx \approx \frac{1}{10} \left(1 + \frac{2}{1,2} + \frac{2}{1,4} + \frac{2}{1,6} + \frac{2}{1,8} + \frac{1}{2} \right) \approx 0,695635 ,$$

usando a regra do trapézio. Refira-se que o erro cometido é maior no caso da regra do trapézio.

Finalmente, apresentamos a **regra de Simpson**, que corresponde a aproximar a função usando parábolas que coincidem com f nos extremos de cada par de subintervalos, ou seja, nos pontos $(t_{i-1}, f(t_{i-1}))$, $(t_i, f(t_i))$ e $(t_{i+1}, f(t_{i+1}))$, $i = 1, 3, \dots, n-1$, com n par:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} [f(t_0) + 4f(t_1) + 2f(t_2) + \dots + 4f(t_{n-1}) + f(t_n)]$$

$$+ \dots + 4f(t_{n-3}) + 2f(t_{n-2}) + 4f(t_{n-1}) + f(t_n) \Big] =: S_n .$$

O padrão dos coeficientes é o seguinte:

$$\left(1, 4, 2, \underbrace{\dots, 4, 2, 4, 1}_{\frac{n-2}{2} \text{ pares } (4, 2)} \right) .$$

Refira-se que $S_{2n} = \frac{1}{3}T_n + \frac{2}{3}M_n$, ou seja, as aproximações pela regra de Simpson são médias pesadas das aproximações pelas regras do ponto médio e do trapézio. A estimativa para o erro, supondo que

$$\left| f^{(4)}(x) \right| \leq K , \quad \forall x \in [a, b] ,$$

é dada por

$$|E_S| \leq \frac{K(b-a)^5}{180n^4} .$$

3 Aplicações do cálculo integral

3.1 Área de figuras planas

O cálculo da medida da área de uma figura plana, limitada superiormente pelo gráfico de uma função contínua e não-negativa, serviu de motivação para a definição de integral. Em geral, a medida da área da figura plana limitada pelos gráficos de duas funções contínuas $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e pelas rectas verticais $x = a$ e $x = b$ é dada por

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

3.2 Volume de sólidos de revolução

Consideremos o sólido obtido por rotação em torno do eixo OX de uma figura plana limitada inferiormente pelo eixo OX , superiormente pelo gráfico de uma função contínua e não-negativa f e lateralmente pelas rectas verticais $x = a$ e $x = b$. Para calcular o seu volume comecemos por considerar uma partição de $[a, b]$ e por escolher um ponto ξ_i em cada subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$. O volume do sólido obtido por rotação em torno do eixo OX da figura formada pelos n rectângulos de largura $t_i - t_{i-1}$ e comprimento $f(\xi_i)$, para $i = 1, \dots, n$, é dado por

$$\sum_{i=1}^n \pi [f(\xi_i)]^2 (t_i - t_{i-1}) ,$$

já que estamos em presença de n cones com raio da base igual a $f(\xi_i)$ e altura $t_i - t_{i-1}$. Ora a expressão anterior não é senão uma soma de Riemann para a função πf^2 (ver **Observação 2.3**), pelo que o volume pretendido é dado pela fórmula

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

Exemplo 3.1 Uma esfera de raio R pode obter-se por rotação em torno do eixo OX do semi-círculo centrado na origem e com raio R , que é gráfico da função $f : [-R, R] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$. Aplicando a fórmula acima, obtemos o volume de uma esfera de raio R :

$$V = \pi \int_{-R}^R \left[\sqrt{R^2 - x^2} \right]^2 dx = \pi \left[R^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-R}^R = \frac{4}{3} \pi R^3 .$$

3.3 Comprimento de curvas

Consideremos a curva definida pela porção do gráfico de uma função de classe C^1 , $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, compreendida entre os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. Dada uma partição de $[a, b]$, o comprimento da linha quebrada formada pelos n segmentos de recta que unem os $n + 1$ pontos $(t_i, f(t_i))$, $i = 0, \dots, n$, é dado por

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{(t_i - t_{i-1})^2 + [f(t_i) - f(t_{i-1})]^2} . \quad (8)$$

Como a função f é de classe C^1 , em cada subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$ existe um ponto ξ_i tal que

$$\frac{f(t_i) - f(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} = f'(\xi_i) ,$$

como consequência do Teorema de Lagrange. Substituindo em (8), obtemos

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{(t_i - t_{i-1})^2 + [f'(\xi_i)]^2 (t_i - t_{i-1})^2} = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} (t_i - t_{i-1}) ,$$

que é uma soma de Riemann para a função $\sqrt{1 + [f']^2}$. Assim, o comprimento pretendido é dado pela fórmula

$$C = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

4 Integrais impróprios

A definição do integral de Riemann só faz sentido para funções definidas num intervalo limitado $[a, b]$ e que sejam limitadas. De facto, se o intervalo for ilimitado, qualquer partição contém, pelo menos, um subintervalo ilimitado e, portanto, de comprimento infinito, o que inviabiliza a definição das somas de Darboux. O mesmo acontece no caso de a função não ser limitada pois nesse caso, haverá pelo menos um subintervalo onde o ínfimo ou o supremo da função não existem. Os integrais que envolvem intervalos de integração ilimitados ou funções ilimitadas dizem-se, por isso, *impróprios* e o seu significado deverá ser tornado preciso estendendo a definição de integral.

4.1 Intervalo de integração ilimitado

Definição 4.1 *Seja $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável em cada intervalo limitado $[a, X]$, para $X > a$. O **integral impróprio** $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ diz-se **convergente** se existir*

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_a^X f(x) dx ,$$

escrevendo-se, nesse caso,

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{X \rightarrow +\infty} \int_a^X f(x) dx .$$

Caso o limite não exista, o integral impróprio diz-se divergente.

Exemplo 4.1 *Seja $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$. Se $\alpha \neq 1$, tem-se*

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_1^X \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{se } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha < 1 \end{cases} .$$

Por seu lado,

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_1^X \frac{1}{x} dx = \lim_{X \rightarrow +\infty} \ln X = +\infty .$$

Assim, o integral impróprio $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ é divergente para $\alpha \leq 1$ e convergente para $\alpha > 1$, com

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1}{\alpha - 1} .$$

Exemplo 4.2

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx &= \lim_{X \rightarrow +\infty} \int_0^X \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \lim_{X \rightarrow +\infty} \left(\arctan X - \arctan 0 \right) = \frac{\pi}{2} . \end{aligned}$$

Para um integral impróprio do tipo $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ a definição é análoga. No caso em que $f : (-\infty, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, escolhe-se um ponto arbitrário $c \in \mathbb{R}$ (geralmente $c = 0$) e faz-se

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx .$$

O integral diz-se convergente se ambos os integrais no segundo membro forem convergentes. Refira-se enfaticamente que esta definição não é equivalente a tomar-se

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_{-X}^X f(x) dx ,$$

que, quando existe, se chama **valor principal de Cauchy** do integral impróprio. É evidente que se o integral for convergente o valor principal de Cauchy coincide com o valor do integral. A existência do valor principal de Cauchy é, no entanto, mais geral como mostra o exemplo seguinte.

Exemplo 4.3 O integral impróprio $\int_{-\infty}^{+\infty} x dx$ é divergente já que, por exemplo,

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_0^X x dx = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X^2}{2} = +\infty .$$

Porém, existe

$$vp \int_{-\infty}^{+\infty} x dx = \lim_{X \rightarrow +\infty} \int_{-X}^X x dx = 0 .$$

4.2 Função integranda ilimitada

Definição 4.2 Seja $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função ilimitada mas integrável em qualquer intervalo do tipo $[a + \epsilon, b]$, para $0 < \epsilon < b - a$. O **integral impróprio** $\int_a^b f(x) dx$ diz-se **convergente** se existir

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x) dx ,$$

escrevendo-se, nesse caso,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x) dx .$$

Caso o limite não exista, o integral impróprio diz-se **divergente**.

Exemplo 4.4 Seja $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$. Se $\alpha \neq 1$, tem-se

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1 - \epsilon^{1-\alpha}}{1 - \alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 1 \\ \frac{1}{1-\alpha} & \text{se } \alpha < 1 \end{cases} .$$

Por seu lado,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (-\ln \epsilon) = +\infty .$$

Assim, o integral impróprio $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$ é divergente para $\alpha \geq 1$ e convergente para $\alpha < 1$, com

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1}{1 - \alpha} .$$

O caso de uma função ilimitada $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ trata-se de forma análoga e o caso de $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ reduz-se aos anteriores, escolhendo $c \in (a, b)$ e pondo

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx .$$

4.3 Critérios de comparação

Para determinar a natureza de um integral impróprio, isto é, decidir se o integral é convergente ou divergente, nem sempre é prático utilizar a definição. Assumem, por isso, particular relevância alguns critérios que permitem obter conclusões acerca da natureza de certos integrais impróprios por comparação com outros cuja natureza é conhecida (como os dos **Exemplos 4.1** e **4.4**). Restringir-nos-emos ao caso de integrais impróprios em que o intervalo de integração é ilimitado mas existem resultados análogos para o caso de integrais impróprios de funções ilimitadas.

Teorema 4.1 (1º critério de comparação) *Sejam $f, g : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ funções integráveis em $[a, X]$, para todo o $X > a$, e não-negativas. Se existir uma constante $k > 0$, tal que*

$$f(x) \leq k g(x) , \quad \forall x \in [a, +\infty)$$

e o integral impróprio $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ for convergente então o integral impróprio $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ também é convergente.

DEMONSTRAÇÃO: As funções

$$\phi(X) = \int_a^X f(x) dx \quad \text{e} \quad \varphi(X) = \int_a^X g(x) dx$$

são não-decrescentes em $[a, +\infty]$ já que as suas derivadas f e g , respectivamente, são não-negativas. Como

$$\phi(X) = \int_a^X f(x) dx \leq \int_a^X k g(x) dx = k \varphi(X)$$

e φ é limitada (porque o integral impróprio $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ é convergente), concluímos que $\phi(X)$ também é limitada. Logo, existe $\lim_{X \rightarrow +\infty} \phi(x)$ e o integral impróprio $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ é convergente. □

Teorema 4.2 (2º critério de comparação) *Sejam $f, g : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ funções integráveis em $[a, X]$, para todo o $X > a$, com f não-negativa e g positiva. Se*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda ,$$

então

1. se $\lambda \in \mathbb{R}^+$, os integrais impróprios $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ e $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ são da mesma natureza;
2. se $\lambda = 0$, a convergência de $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ implica a convergência de $\int_a^{+\infty} f(x) dx$;
3. se $\lambda = +\infty$, a convergência de $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ implica a convergência de $\int_a^{+\infty} g(x) dx$.

DEMONSTRAÇÃO: Consideramos apenas o caso 1. já que os restantes se demonstram de forma análoga.

Seja $0 < \epsilon < \lambda$. Pela definição de limite,

$$\exists A > a : x > A \implies \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \lambda \right| < \epsilon .$$

Obtemos então as duas desigualdades

$$f(x) < (\lambda + \epsilon) g(x) \quad \text{e} \quad g(x) < \frac{1}{\lambda - \epsilon} f(x)$$

válidas em $[A, +\infty)$, com $\lambda + \epsilon$ e $\frac{1}{\lambda - \epsilon}$ constantes positivas. Pelo **Teorema 4.1**, os integrais impróprios $\int_A^{+\infty} f(x) dx$ e $\int_A^{+\infty} g(x) dx$ são da mesma natureza. Como

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_a^A f(x) dx + \int_A^{+\infty} f(x) dx$$

e o mesmo sucede com g , o resultado está demonstrado. □

Exemplo 4.5 O integral impróprio $\int_1^{+\infty} \frac{1}{5x^4+3x+\pi} dx$ é convergente já que

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{5x^4+3x+\pi}}{\frac{1}{x^4}} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{5x^4+3x+\pi} = \frac{1}{5}$$

e o integral impróprio $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4} dx$ é convergente (ver **Exemplo 4.1**).

Exemplo 4.6 O integral impróprio $\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$ é convergente já que

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{2x}{2x e^{x^2}} = 0$$

e o integral impróprio $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ é convergente (ver **Exemplo 4.1**).

Exemplo 4.7 O integral impróprio $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\ln x} dx$ é divergente já que

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\ln x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = +\infty .$$

De facto, usando \mathcal{I} . no **Teorema 4.2**, a convergência deste integral implicaria a do integral $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ que sabemos ser divergente (ver **Exemplo 4.1**).

Definição 4.3 Seja $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$. O integral impróprio $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ diz-se **absolutamente convergente** se for convergente o integral impróprio $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$.

Teorema 4.3 (3º critério de comparação) Seja $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável em $[a, X]$, para todo o $X > a$. Se o integral impróprio $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ for absolutamente convergente então é convergente e verifica-se a relação

$$\left| \int_a^{+\infty} f(x) dx \right| \leq \int_a^{+\infty} |f(x)| dx . \quad (9)$$

DEMONSTRAÇÃO: A integrabilidade de $|f|$ em qualquer intervalo $[a, X]$, com $X > a$, é garantida pelo **Teorema 2.4-2.**, do qual resulta ainda a desigualdade

$$\left| \int_a^X f(x) dx \right| \leq \int_a^X |f(x)| dx . \quad (10)$$

Das desigualdades

$$0 \leq f(x) + |f(x)| \leq 2|f(x)|$$

e da convergência de $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ resulta, pelo **Teorema 4.1**, a convergência de

$$\int_a^{+\infty} (f(x) + |f(x)|) dx .$$

A convergência de $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ segue-se da igualdade

$$f(x) = f(x) + |f(x)| - |f(x)| .$$

Para obter (9) basta tomar $\lim_{x \rightarrow +\infty}$ em (10).

□

Exemplo 4.8 O integral impróprio $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$ é absolutamente convergente já que $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x^2} \right| dx$ é convergente pois

$$\left| \frac{\sin x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$$

e o integral $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ é convergente (ver **Exemplo 4.1**).

5 Séries Numéricas

A noção de soma infinita de números reais é o objecto deste capítulo. A atribuição de um significado matemático preciso a uma expressão do tipo $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$, com uma infinidade de parcelas, faz uso do conceito de limite, ubíquo em Análise Infinitesimal.

5.1 Séries convergentes e séries divergentes

Seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de números reais. A série numérica de termo geral a_n é a soma infinita $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Definição 5.1 A sucessão associada³ à série numérica $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é a sucessão de termo geral

$$s_n = \sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n .$$

Definição 5.2 A série numérica $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diz-se **convergente** se a sua sucessão associada (s_n) for convergente. Nesse caso, chama-se **soma da série** ao limite da sucessão associada e escreve-se

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \lim s_n .$$

Se a sua sucessão associada for divergente, a **série** diz-se **divergente**. Nesse caso, não faz sentido falar em soma.

Observação 5.1 A variação do índice mudo n na expressão que define a série não tem necessariamente de ocorrer em \mathbb{N} , ou seja, de 1 a $+\infty$. Por vezes, é conveniente considerar séries do tipo $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, ou mesmo $\sum_{n=p}^{+\infty} a_n$, com p um inteiro.

³ou sucessão das somas parciais ou sucessão das reduzidas

Exemplo 5.1 Seja $a \in \mathbb{R}$. À série numérica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a^n = a + a^2 + a^3 + \dots$$

chama-se **série geométrica** de razão a . A sua sucessão associada é

$$s_n = \sum_{i=1}^n a^i = \begin{cases} a \frac{1 - a^n}{1 - a} & \text{se } a \neq 1 \\ n & \text{se } a = 1 \end{cases} .$$

A série é convergente (e a sua soma é $\frac{a}{1-a}$) se $|a| < 1$ e divergente se $|a| \geq 1$.

Exemplo 5.2 A série numérica, dita **série telescópica**,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

tem como sucessão associada

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} . \end{aligned}$$

A série é portanto convergente (e a sua soma é 1).

A determinação da soma de uma série numérica, quando convergente, exige normalmente o recurso a séries de funções, que serão estudadas mais adiante. Os casos em que é possível obter a soma usando apenas a definição esgotam-se praticamente nos exemplos anteriores e suas variantes. O principal objectivo de ora em diante vai ser o da determinação da natureza de uma dada série numérica, isto é, o de decidir se a série é convergente ou

divergente. Neste contexto, assume um carácter irrelevante a indicação expressa dos índices na escrita do somatório e passaremos a usar simplesmente a notação $\sum a_n$ para nos referirmos a uma série numérica.

O próximo resultado é uma condição necessária de convergência.

Teorema 5.1 *Se $\sum a_n$ é uma série convergente então $\lim a_n = 0$.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja (s_n) a sucessão associada à série e $s = \lim s_n$ a soma da série. Define-se uma nova sucessão (t_n) , com

$$t_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 1 \\ s_{n-1} & \text{se } n \geq 2 \end{cases} .$$

É evidente que $\lim t_n = \lim s_n = s$ e que $s_n - t_n = a_n$. Assim

$$\lim a_n = \lim(s_n - t_n) = \lim s_n - \lim t_n = s - s = 0 .$$

□

Portanto, se o termo geral de uma série numérica não tender para zero conclui-se imediatamente que a série é divergente. No entanto, o recíproco do teorema anterior é falso. O exemplo clássico é dado pelo

Exemplo 5.3 *A série harmónica*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} ,$$

cujo termo geral tende para zero, é divergente. De facto, a subsucessão $(s_{2^n})_{n \in \mathbb{N}}$ da sua sucessão associada é divergente:

$$\begin{aligned} s_{2^n} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots \\ &\quad + \underbrace{\left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^n}\right)}_{2^{n-1} \text{ parcelas}} \\ &> 1 + \frac{1}{2} + 2 \frac{1}{4} + 4 \frac{1}{8} + \dots + 2^{n-1} \frac{1}{2^n} \\ &= 1 + n \frac{1}{2} \longrightarrow +\infty . \end{aligned}$$

A sucessão associada a uma série $\sum a_n$ de termos não-negativos $a_n \geq 0$ é obviamente não-decrescente pois

$$s_{n+1} - s_n = a_{n+1} \geq 0, \forall n.$$

Assim, a série converge se, e só se, (s_n) for limitada. E diverge se, e só se, $\lim s_n = +\infty$. Neste caso, escrevemos $\sum a_n = +\infty$.

Exemplo 5.4 A série de termos positivos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha},$$

com $\alpha > 1$, é convergente pois a sua sucessão associada é limitada:

$$0 \leq s_n \leq c, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Na verdade, dado $n \in \mathbb{N}$, seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $n \leq 2^k - 1$. Então,

$$\begin{aligned} s_n &\leq s_{2^k-1} \\ &= 1 + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha}\right) + \dots \\ &\quad + \underbrace{\left(\frac{1}{(2^{k-1})^\alpha} + \dots + \frac{1}{(2^k-1)^\alpha}\right)}_{2^{k-1} \text{ parcelas}} \\ &\leq 1 + \frac{2}{2^\alpha} + \frac{4}{4^\alpha} + \dots + \frac{2^{k-1}}{(2^k-1)^\alpha} \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{2}{2^\alpha}\right)^i \leq \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{2^\alpha}\right)^i = \frac{1}{1-2^{1-\alpha}} \equiv c, \end{aligned}$$

visto que a razão da série geométrica é $0 < 2^{1-\alpha} < 1$ porque $\alpha > 1$.

Apresentamos de seguida um **critério de comparação** para séries de termos não-negativos.

Teorema 5.2 *Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ séries de termos não-negativos tais que, para uma constante $c > 0$ e um certo $n_0 \in \mathbb{N}$,*

$$a_n \leq c b_n, \quad \forall n > n_0. \quad (11)$$

Então se $\sum b_n$ convergir, $\sum a_n$ também converge.

DEMONSTRAÇÃO: Sem perda de generalidade, podemos supor que (11) é válida para todo o $n \in \mathbb{N}$. Sendo (s_n) e (t_n) as sucessões associadas, respectivamente, a $\sum a_n$ e $\sum b_n$, tem-se imediatamente

$$s_n \leq c t_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sendo $\sum b_n$ convergente, (t_n) é limitada:

$$\exists M > 0 : 0 \leq t_n \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo, (s_n) também é limitada: $0 \leq s_n \leq c M, \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Segue-se que $\sum a_n$ é convergente. □

Exemplo 5.5 A série de termos positivos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha},$$

com $\alpha < 1$, é divergente. Na verdade,

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^\alpha}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e a conclusão resulta do critério de comparação e da divergência da série harmônica.

5.2 Convergência absoluta e convergência condicional

Definição 5.3 *Uma série $\sum a_n$ diz-se **absolutamente convergente** se a série dos módulos $\sum |a_n|$ for convergente.*

Exemplo 5.6 Toda a série convergente de termos não-negativos é absolutamente convergente.

Exemplo 5.7 A série geométrica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

é absolutamente convergente.

Exemplo 5.8 A série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

não é absolutamente convergente já que a sua série dos módulos é a série harmónica $\sum \frac{1}{n}$ que é divergente.

Definição 5.4 *Uma série convergente que não seja absolutamente convergente diz-se **condicionalmente convergente**.*

Teorema 5.3 (Critério de Leibniz) *Seja (a_n) uma sucessão não-crescente com $\lim a_n = 0$. Então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n$ é convergente.*

DEMONSTRAÇÃO: A sucessão associada à série é

$$s_n = a_1 - a_2 + a_3 + \dots + (-1)^{n+1} a_n .$$

A subsucessão (s_{2n}) dos termos de ordem par é não-decrescente já que

$$s_{2n+2} - s_{2n} = -a_{2n+2} + a_{2n+1} \geq 0 ;$$

a subsucessão (s_{2n-1}) dos termos de ordem ímpar é não-crescente já que

$$s_{2n+1} - s_{2n-1} = a_{2n+1} - a_{2n} \leq 0 .$$

Por outro lado,

$$s_{2n} - s_{2n-1} = -a_{2n} \leq 0 \tag{12}$$

e portanto tem-se

$$s_2 \leq s_4 \leq \dots \leq s_{2n} \leq \dots \leq s_{2n-1} \leq \dots \leq s_3 \leq s_1 .$$

Assim, ambas as subsucessões são limitadas inferiormente por s_2 e superiormente por s_1 . Como também são monótonas, são convergentes. Resulta então de (12) que

$$\lim s_{2n} - \lim s_{2n-1} = \lim (s_{2n} - s_{2n-1}) = -\lim a_{2n} = 0$$

e portanto $\lim s_{2n} = \lim s_{2n-1}$ donde (s_n) é convergente. □

Exemplo 5.9 A série do **Exemplo 5.8** é condicionalmente convergente. A série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

é condicionalmente convergente. Porquê?

Mostremos agora que toda a série absolutamente convergente é convergente. Dada uma sucessão (a_n) , definimos duas novas sucessões:

$$p_n = \max\{a_n, 0\} = \begin{cases} a_n & \text{se } a_n \geq 0 \\ 0 & \text{se } a_n \leq 0 \end{cases}$$

designada por **parte positiva** de a_n ; e

$$q_n = \max\{-a_n, 0\} = \begin{cases} 0 & \text{se } a_n \geq 0 \\ -a_n & \text{se } a_n \leq 0 \end{cases}$$

designada por **parte negativa** de a_n . São de verificação imediata as seguintes propriedades das partes positiva e negativa:

$$p_n, q_n \geq 0 \quad ; \quad p_n + q_n = |a_n| \quad ; \quad p_n - q_n = a_n .$$

Teorema 5.4 *Toda a série absolutamente convergente é convergente.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja $\sum |a_n|$ convergente. Como $p_n, q_n \leq |a_n|$, segue-se do **Teorema 5.2** que $\sum p_n$ e $\sum q_n$ são convergentes. Assim, também é convergente a série $\sum a_n = \sum (p_n - q_n) = \sum p_n - \sum q_n$.

□

Observação 5.2 O resultado pode interpretar-se do seguinte modo: dada uma série convergente de termos não-negativos, nenhuma troca de sinais dos termos da série altera a sua natureza.

Corolário 5.1 Se $\sum a_n$ for condicionalmente convergente então $\sum p_n = \sum q_n = +\infty$.

DEMONSTRAÇÃO: Se convergir uma das séries, por exemplo $\sum p_n$, ter-se-á $\sum q_n = \sum (p_n - a_n) = \sum p_n - \sum a_n$ e a outra também converge. Mas então $\sum |a_n| = \sum (p_n + q_n) = \sum p_n + \sum q_n$ é convergente, o que é absurdo.

□

5.3 Critérios de convergência

Teorema 5.5 Seja $\sum b_n$ uma série absolutamente convergente, com $b_n \neq 0$, $\forall n$. Se a sucessão $(a_n/b_n)_n$ for limitada (em particular, se for convergente) então a série $\sum a_n$ é absolutamente convergente.

DEMONSTRAÇÃO: Se $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_n$ for limitada, existe $c > 0$ tal que

$$\left| \frac{a_n}{b_n} \right| \leq c \Rightarrow |a_n| \leq c |b_n|, \quad \forall n.$$

O resultado segue-se do **Teorema 5.2**.

□

Exemplo 5.10 A série $\sum \frac{1}{n^3+4n^2+\pi}$ é absolutamente convergente; de facto, $\sum \frac{1}{n^3}$ é absolutamente convergente e

$$\lim \frac{\frac{1}{n^3+4n^2+\pi}}{\frac{1}{n^3}} = \lim \frac{n^3}{n^3+4n^2+\pi} = 1.$$

Corolário 5.2 (Critério de d'Alembert) *Seja $a_n \neq 0, \forall n$. Se existir uma constante $0 < c < 1$ e uma ordem $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que*

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq c, \quad \forall n > n_0$$

(em particular, se $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$) então $\sum a_n$ é absolutamente convergente.

DEMONSTRAÇÃO: Temos, para todo o $n > n_0$,

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq c = \frac{c^{n+1}}{c^n} \Rightarrow \frac{|a_{n+1}|}{c^{n+1}} \leq \frac{|a_n|}{c^n},$$

pelo que a sucessão de termos não-negativos $(|a_n|/c^n)_n$ é não-crescente a partir de uma certa ordem, logo limitada.

Como $\sum c^n$ é uma série geométrica (absolutamente) convergente, segue-se do teorema que $\sum |a_n|$ é convergente. □

Observação 5.3 Na generalidade dos casos práticos, a aplicação do critério de d'Alembert consiste no cálculo de $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$.

- Se $L < 1$, a série $\sum a_n$ é absolutamente convergente.
- Se $L > 1$, a série é divergente pois o seu termos geral não tende para zero já que, a partir de uma certa ordem, se tem $|a_{n+1}| > |a_n|$.
- Se $L = 1$, o critério é inclusivo como mostram os exemplos das séries $\sum \frac{1}{n^2}$ e $\sum \frac{1}{n}$.

Exemplo 5.11 A série $\sum \frac{n!}{n^n}$ é absolutamente convergente:

$$\lim \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{1}{e} < 1.$$

Teorema 5.6 (Critério de Cauchy) *Se existir uma constante $0 < c < 1$ e uma ordem $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que*

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq c, \quad \forall n > n_0$$

(em particular, se $\lim \sqrt[n]{|a_n|} < 1$) então $\sum a_n$ é absolutamente convergente.

DEMONSTRAÇÃO: Temos, para todo o $n > n_0$,

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq c \Rightarrow |a_n| \leq c^n.$$

Como $\sum c^n$ é uma série geométrica (absolutamente) convergente, segue-se do **Teorema 5.2** que $\sum |a_n|$ é convergente. □

Observação 5.4 Na generalidade dos casos práticos, a aplicação do critério de Cauchy consiste no cálculo de $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = L$.

- Se $L < 1$, a série $\sum a_n$ é absolutamente convergente.
- Se $L > 1$, a série é divergente pois o seu termos geral não tende para zero já que, a partir de uma certa ordem, se tem $|a_n| > 1$.
- Se $L = 1$, o critério é inclusivo como mostram os exemplos das séries $\sum \frac{1}{n^2}$ e $\sum \frac{1}{n}$.

Exemplo 5.12 A série $\sum \left(\frac{\ln n}{n}\right)^n$ é absolutamente convergente:

$$\lim \sqrt[n]{\left(\frac{\ln n}{n}\right)^n} = \lim \frac{\ln n}{n} = 0 < 1.$$

O resultado seguinte, cuja demonstração pode ser consultada em [4, pág. 143], relaciona os dois limites referidos anteriormente.

Teorema 5.7 *Seja $a_n \neq 0, \forall n$. Se $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$ então $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = L$.*

5.4 Comutatividade

Para somas finitas de números reais é válida a propriedade comutativa. No caso das séries, nem sempre a convergência e a soma da série são independentes da ordem das parcelas.

Definição 5.5 Uma série $\sum a_n$ diz-se **comutativamente convergente** se, dada qualquer bijecção $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, a série $\sum a_{\varphi(n)}$ for convergente e $\sum a_{\varphi(n)} = \sum a_n$.

Exemplo 5.13 A série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

é (condicionalmente) convergente. Seja s a sua soma; então

$$\begin{aligned} s &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \dots \\ \frac{s}{2} &= 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{10} + 0 - \frac{1}{12} + \dots, \end{aligned}$$

multiplicando por 1/2 e acrescentando parcelas nulas. Somando agora termo a termo as duas séries anteriores, obtém-se

$$\frac{3s}{2} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots$$

que é uma série com os mesmos termos da série inicial, tomados por uma ordem diferente. Esta reordenação conduziu a uma soma diferente da inicial logo a série não é comutativamente convergente.

Os dois próximos resultados mostram que as séries comutativamente convergentes são as séries absolutamente convergentes.

Teorema 5.8 *Toda a série absolutamente convergente é comutativamente convergente.*

DEMONSTRAÇÃO: Suponhamos, para começar, que $a_n \geq 0$, para todo o n e que $\sum a_n = s$. Seja $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ uma bijecção e s_n e t_n as sucessões associadas, respectivamente, a $\sum a_n$ e $\sum a_{\varphi(n)}$. Dado $m \in \mathbb{N}$, seja

$$n = \max \{ \varphi(1), \varphi(2), \dots, \varphi(m) \} .$$

Então

$$t_m = \sum_{i=1}^m a_{\varphi(i)} \leq \sum_{j=1}^n a_j = s_n .$$

Analogamente, dado $n \in \mathbb{N}$, existe $m = \max \{ \varphi^{-1}(1), \varphi^{-1}(2), \dots, \varphi^{-1}(n) \}$ tal que $s_n \leq t_m$. Daqui resulta que $\lim t_n = \lim s_n = s$. De facto, dado $\epsilon > 0$, seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow s - \epsilon < s_n \leq s$ (recorde-se que s_n é não-decrescente). Consideremos a ordem m_0 tal que $s_{n_0+1} \leq t_{m_0}$; então, como t_n é não-decrescente,

$$n > m_0 \Rightarrow s - \epsilon < s_{n_0+1} \leq t_{m_0} \leq t_n \leq s .$$

Falta justificar a última desigualdade: se, para alguma ordem m^* , $t_{m^*} > s$, existiria uma ordem n^* tal que $s_{n^*} \geq t_{m^*} > s$, o que é absurdo, pois a sucessão não-decrescente s_n não convergiria para s .

O caso geral reduz-se a este considerando a decomposição da série nas suas partes positiva e negativa $\sum a_n = \sum p_n - \sum q_n$. Uma reordenação $a_{\varphi(n)}$ dos termos da série determina uma reordenação $p_{\varphi(n)}$ dos p_n e uma reordenação $q_{\varphi(n)}$ dos q_n , que são, respectivamente, as partes positiva e negativa de $a_{\varphi(n)}$. Então, resulta do caso anterior que

$$\sum a_{\varphi(n)} = \sum p_{\varphi(n)} - \sum q_{\varphi(n)} = \sum p_n - \sum q_n = \sum a_n .$$

□

Teorema 5.9 (Riemann) *Seja $\sum a_n$ uma série condicionalmente convergente. Dado um qualquer número real σ , existe uma bijecção $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $\sum a_{\varphi(n)} = \sigma$.*

DEMONSTRAÇÃO: Fixado $\sigma \in \mathbb{R}$, definimos uma nova série $\sum a_{\varphi(n)}$, obtida por reordenação dos termos de $\sum a_n$ do modo seguinte: começamos a somar

os termos positivos de $\sum a_n$, na sua ordem natural, até que, ao somar a_{n_1} , a soma seja, pela primeira vez, superior a σ . Isto é possível pois $\sum p_n = +\infty$ (ver **Corolário 5.1**). Acrescentamos a seguir termos negativos, também na sua ordem natural, até que, ao somar a_{n_2} , a soma seja, pela primeira vez, inferior a σ . Isto é possível pois $\sum -q_n = -\infty$ (ver **Corolário 5.1**). Prosseguindo deste modo, obtemos a reordenação procurada. A sucessão t_n associada à nova série oscila em torno de σ e verifica a propriedade, a partir do termo obtido ao somar a_{n_1} ,

$$|t_n - \sigma| \leq |a_{n_k}|,$$

onde a_{n_k} é o termo que originou a última oscilação em torno de σ . Como $\lim a_{n_k} = 0$ (porque a série $\sum a_n$ é convergente), temos que $\lim t_n = \sigma$. □

Observação 5.5 Um raciocínio análogo permite demonstrar que existem reordenações dos termos da série que dão origem a séries divergentes, com sucessões associadas a tender para $+\infty$ (ou $-\infty$).

6 Sucessões de funções

Seja $X \subset \mathbb{R}$ e \mathcal{F} o conjunto das funções reais definidas em X . Uma aplicação de \mathbb{N} em \mathcal{F} é dita uma **sucessão de funções**. Ao invés das sucessões numéricas, para as quais só existe uma noção de limite, para as sucessões de funções são várias as possibilidades de definir o limite. Analisamos de seguida as mais usuais.

6.1 Convergência simples e convergência uniforme

Definição 6.1 Uma sucessão de funções $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ *converge simplesmente* (ou *pontualmente*) para uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ se, para todo o $x \in X$, se tem $f_n(x) \rightarrow f(x)$, i.e.,

$$\forall x \in X, \forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Observação 6.1 A interpretação geométrica desta noção de limite é a seguinte: para cada ponto $x \in X$, a sucessão de pontos $(x, f_n(x))$, correspondente à intersecção da recta vertical que passa por x com os gráficos das funções f_n , converge para $(x, f(x))$, o ponto de intersecção da mesma recta com o gráfico de f .

Exemplo 6.1 Analisemos quais os limites simples das seguintes sucessões de funções:

1. $f_n(x) = \frac{x}{n}$, $x \in \mathbb{R}$.

Para cada $x \in \mathbb{R}$, a sucessão numérica $\frac{x}{n}$ converge para 0, pelo que o limite é a função nula em \mathbb{R} .

2. $f_n(x) = x^n$, $x \in [0, 1]$.

Para cada $x \in [0, 1)$, a sucessão numérica x^n converge para 0; já para $x = 1$, a sucessão constante 1^n tende para 1. O limite é pois a função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0, 1) \\ 1 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

3. $f_n(x) = x^n(1 - x^n)$, $x \in [0, 1]$.

Usando o que foi dito anteriormente, é fácil verificar que o limite é a função nula em $[0, 1]$.

Na definição da convergência simples, a ordem n_0 a determinar depende não apenas de ϵ mas também do ponto x_0 . Para o mesmo ϵ , nada obriga a que, para pontos diferentes, o n_0 seja o mesmo. A definição considera cada ponto isoladamente e não a função como um todo. Como consequência, algumas propriedades, por exemplo a continuidade, perdem-se na passagem ao limite (cf. o exemplo anterior). A definição seguinte vem dar resposta a estas limitações.

Definição 6.2 Uma sucessão de funções $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ **converge uniformemente** para uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ se

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \forall x \in X.$$

Observação 6.2 A interpretação geométrica é a seguinte: para cada $\epsilon > 0$, a faixa de raio ϵ em torno do gráfico de f

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in X ; |y - f(x)| < \epsilon \right\}$$

contém, a partir da ordem n_0 , os gráficos de todas as funções f_n .

Observação 6.3 É evidente que se uma sucessão converge uniformemente para um dado limite também converge simplesmente para o mesmo limite. O limite uniforme, se existir, será, portanto, o limite simples.

Observação 6.4 A definição dada é trivialmente equivalente a afirmar-se que a sucessão numérica

$$M_n \equiv \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \tag{13}$$

é um infinitésimo. Esta observação constitui um critério prático para investigar se, identificado o limite simples de uma dada sucessão de funções, a convergência é uniforme.

Exemplo 6.2 Reanalise os exemplos anteriores quanto à convergência uniforme:

$$1. M_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{x}{n} - 0 \right| = +\infty.$$

Logo, a convergência não é uniforme. Já se o domínio das funções fosse um intervalo limitado, digamos $[-L, L]$, a convergência seria uniforme:

$$M_n = \sup_{x \in [-L, L]} \left| \frac{x}{n} - 0 \right| = \frac{L}{n} \longrightarrow 0.$$

$$2. M_n = \sup_{x \in [0, 1]} \left| x^n - f(x) \right| = \sup_{x \in [0, 1]} x^n = 1.$$

Logo, a convergência não é uniforme.

$$3. M_n = \sup_{x \in [0, 1]} \left| x^n(1 - x^n) - 0 \right| = \frac{1}{4}.$$

Logo, a convergência não é uniforme.

6.2 Propriedades da convergência uniforme

O primeiro teorema desta secção justifica a afirmação heurística de que o limite uniforme de funções contínuas é uma função contínua.

Teorema 6.1 *Seja $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma sucessão de funções uniformemente convergente para $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Se cada f_n for contínua no ponto $a \in X$ então f também é contínua no ponto a .*

DEMONSTRAÇÃO: Queremos provar que

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : x \in (a - \delta, a + \delta) \cap X \Rightarrow \left| f(x) - f(a) \right| < \epsilon.$$

Fixemos $\epsilon > 0$. Como a convergência dos f_n para f é uniforme, ao número real positivo $\frac{\epsilon}{3}$ corresponde uma ordem n_0 tal que

$$n > n_0 \Rightarrow \left| f_n(x) - f(x) \right| < \frac{\epsilon}{3}, \forall x \in X.$$

Fixemos uma ordem $n_* > n_0$; por hipótese, a função f_{n_*} é contínua em a . Logo, dado o número real positivo $\frac{\epsilon}{3}$,

$$\exists \delta > 0 : x \in (a - \delta, a + \delta) \cap X \Rightarrow \left| f_{n_*}(x) - f_{n_*}(a) \right| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Então, para $x \in (a - \delta, a + \delta) \cap X$, tem-se

$$\begin{aligned} \left| f(x) - f(a) \right| &= \left| f(x) - f_{n_*}(x) + f_{n_*}(x) - f_{n_*}(a) + f_{n_*}(a) - f(a) \right| \\ &\leq \left| f_{n_*}(x) - f(x) \right| + \left| f_{n_*}(x) - f_{n_*}(a) \right| + \left| f_{n_*}(a) - f(a) \right| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

□

Exemplo 6.3 A sucessão de funções contínuas do exemplo 2. acima converge para uma função descontínua. Imediatamente se conclui que a convergência não é uniforme.

De seguida, respondemos afirmativamente à questão da passagem ao limite sob o sinal de integral: se a convergência for uniforme, *o integral do limite é o limite dos integrais*.

Teorema 6.2 *Se a sucessão de funções integráveis $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ converge uniformemente para $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ então f é integrável e*

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx. \quad (14)$$

DEMONSTRAÇÃO: Omitimos a demonstração de que f é integrável, não sem observar que, para funções f_n contínuas, o resultado é imediato já que, pelo teorema anterior, f também será contínua, logo integrável.

Quanto à igualdade (14), seja $\epsilon > 0$. Como a convergência dos f_n para f é uniforme, ao número real positivo $\frac{\epsilon}{b-a}$ corresponde uma ordem n_0 tal que

$$n > n_0 \Rightarrow \left| f_n(x) - f(x) \right| < \frac{\epsilon}{b-a}, \quad \forall x \in [a, b].$$

Portanto, para $n > n_0$,

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| &\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \\ &< (b-a) \frac{\epsilon}{b-a} = \epsilon, \end{aligned}$$

e o resultado segue-se da definição de limite de uma sucessão numérica. \square

Exemplo 6.4 Verifiquemos que o resultado não é válido se se exigir apenas a convergência simples: a sucessão de funções $f_n(x) = nx^n(1-x^n)$ converge simplesmente, no intervalo $[0, 1]$, para a função nula. Tem-se

$$0 = \int_0^1 0 dx \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{(n+1)(2n+1)} = \frac{1}{2}.$$

A convergência não é uniforme já que, por inspecção da monotonia da função, se conclui que

$$M_n = \sup_{x \in [0,1]} |nx^n(1-x^n) - 0| = \frac{n}{4} \longrightarrow +\infty.$$

O exemplo seguinte mostra que, no caso da derivação, não é a convergência uniforme da sucessão de funções que faz com que *a derivada do limite seja o limite das derivadas*.

Exemplo 6.5 A sucessão de funções $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$ converge uniformemente em \mathbb{R} para a função nula. No entanto, a sucessão das derivadas $f_n'(x) = \cos(nx)$ nem sequer é convergente.

A condição relevante é a convergência uniforme das derivadas, como se precisa a seguir.

Teorema 6.3 *Seja (f_n) uma sucessão de funções de classe C^1 em $[a, b]$. Se, para um certo $c \in [a, b]$, a sucessão numérica $(f_n(c))$ convergir e a sucessão das derivadas (f_n') convergir uniformemente em $[a, b]$ para uma função g , então (f_n) converge uniformemente em $[a, b]$ para uma função f , de classe C^1 , tal que $f' = g$.*

DEMONSTRAÇÃO: Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, para cada $n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$f_n(x) = f_n(c) + \int_c^x f_n'(t) dt, \quad \forall x \in [a, b].$$

Passando ao limite quando $n \rightarrow +\infty$, resulta da hipótese e do teorema anterior que, para cada $x \in [a, b]$, existe

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(c) + \int_c^x g(t) dt.$$

Fazendo $x = c$, obtém-se $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(c) = f(c)$. Como g é contínua (pois é o limite uniforme de funções contínuas), f é derivável, novamente como consequência o Teorema Fundamental do Cálculo, e $f'(x) = g(x)$, $\forall x \in [a, b]$. Assim f é de classe C^1 .

Resta provar que $f_n \rightarrow f$ uniformemente. Dado $\epsilon > 0$, existem ordens $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$\begin{aligned} n > n_1 &\Rightarrow |f_n(c) - f(c)| < \frac{\epsilon}{2} \\ n > n_2 &\Rightarrow |f_n'(t) - g(t)| < \frac{\epsilon}{2(b-a)}, \quad \forall t \in [a, b]. \end{aligned}$$

Seja $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Então, para $n > n_0$,

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left| f_n(c) + \int_c^x f_n'(t) dt - f(c) - \int_c^x g(t) dt \right| \\ &\leq |f_n(c) - f(c)| + \int_c^x |f_n'(t) - g(t)| dt \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + |x - c| \sup_{t \in (c, x)} |f_n'(t) - g(t)| \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + (b - a) \frac{\epsilon}{2(b - a)} = \epsilon, \end{aligned}$$

qualquer que seja $x \in [a, b]$.

□

7 Séries de funções

Por analogia com o caso das séries numéricas, definimos série de funções convergente através da sua sucessão (de funções) associada. Assim, dadas funções $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$, dizemos que a série $\sum f_n(x)$ é convergente e tem soma $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ se a sua sucessão associada

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x) = f_1(x) + \dots + f_n(x), \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in X$$

for convergente para f .

A série converge uniformemente se a sua sucessão associada (s_n) convergir uniformemente para f , o que é equivalente a dizer que a sucessão dos restos

$$r_n(x) = \sum_{k>n} f_k(x) = f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \dots, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in X$$

converge uniformemente para zero. Esta equivalência é evidente pois

$$r_n = f - s_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Os teoremas relativos à convergência demonstrados no capítulo anterior têm análogos óbvios no contexto das séries de funções:

- Se $\sum f_n$ convergir uniformemente para f e cada f_n for contínua no ponto a então f também é contínua no ponto a .
- Se $\sum f_n$ convergir uniformemente para f e cada f_n for integrável em $[a, b]$ então f é integrável em $[a, b]$ e $\int_a^b f(x) dx = \sum \int_a^b f_n(x) dx$.
- Se cada f_n for de classe C^1 em $[a, b]$, se, para um certo $c \in [a, b]$, a série $\sum f_n(c)$ convergir e se a série das derivadas $\sum f_n'$ convergir uniformemente em $[a, b]$, então $\sum f_n$ converge uniformemente em $[a, b]$ para uma função de classe C^1 e $(\sum f_n)' = \sum f_n'$.

Exemplo 7.1 A série de funções $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$, que, para $x \neq 0$, é uma série geométrica, converge para a função descontínua

$$f(x) = \begin{cases} 1+x^2 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Logo, a convergência não é uniforme.

A forma mais conveniente de concluir que uma série converge uniformemente é dada pelo critério seguinte.

Teorema 7.1 (Critério de Weierstraß) *Sejam $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $\sum a_n$ uma série numérica convergente, de termos $a_n \geq 0$, tal que*

$$|f_n(x)| \leq a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X.$$

Então as séries $\sum |f_n|$ e $\sum f_n$ são uniformemente convergentes.

DEMONSTRAÇÃO: É evidente que as séries convergem para cada $x \in X$, em virtude do critério de comparação fornecido pelo **Teorema 5.2**. Para mostrar que a convergência é uniforme, fixemos $\epsilon > 0$. Como a série numérica $\sum a_n$ é convergente, existe uma ordem n_0 tal que

$$\sum_{k>n} a_k < \epsilon, \quad \forall n > n_0.$$

Assim

$$\left| \sum_{k>n} f_k(x) \right| \leq \sum_{k>n} |f_k(x)| \leq \sum_{k>n} a_k < \epsilon, \quad \forall n > n_0, \quad \forall x \in X,$$

pelo que os restos de ambas as séries convergem uniformemente para zero. \square

Exemplo 7.2 A série de funções $\sum \frac{\sin(nx)}{n^2}$ é uniformemente convergente. Na verdade, tem-se

$$\left| \frac{\sin(nx)}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$$

e a série numérica de termos positivos $\sum \frac{1}{n^2}$ é convergente.

7.1 Séries de potências

Um tipo particularmente importante de séries de funções são as chamadas **séries de potências**, que constituem a generalização natural dos polinómios (podemos dizer, de forma heurística, que são polinómios de *grau infinito*). Uma série de potências de x é uma expressão da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots .$$

Mais geralmente,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \dots + a_n (x - x_0)^n + \dots$$

diz-se uma série de potências de $x - x_0$. Serão apenas consideradas séries de potências de x e, doravante, a expressão série de potências querera dizer série de potências de x ; o caso geral reduz-se a este através da mudança de variável $y = x - x_0$.

A importância destas séries resulta do facto de as principais funções da Análise se poderem representar como séries de potências. Antes de abordar esta questão, detenhamo-nos na determinação dos valores de x para os quais converge uma série de potências. O conjunto de tais valores tem uma estrutura bem determinada, a saber, trata-se de um intervalo de centro na origem. Tal intervalo pode ser limitado (aberto, fechado ou semi-aberto), estender-se a toda a recta ou reduzir-se apenas à origem. Antes de demonstrar este facto, analisemos exemplos ilustrativos das diversas situações referidas.

Exemplo 7.3 Reanalise os exemplos anteriores quanto à convergência uniforme:

1. A série $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge (absolutamente) para $x \in \mathbb{R}$, como se conclui facilmente usando os mesmo critérios de Cauchy ou de d'Alembert.
2. A série $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ converge (absolutamente) para $x \in (-1, 1)$, como se conclui facilmente usando os mesmo critérios e diverge fora

de $[-1, 1]$. Converte ainda nas extremidades deste intervalo, como consequência do Critério de Leibniz. Assim, converge para $x \in [-1, 1]$.

3. Analogamente, a série $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ converge (absolutamente) para $x \in (-1, 1)$ e ainda para $x = 1$, como consequência do Critério de Leibniz mas diverge para $x = -1$. Assim, converge para $x \in (-1, 1]$.
4. A série geométrica de razão x , $\sum x^n$, converge (absolutamente) para $x \in (-1, 1)$.
5. A série $\sum n^n x^n$ só converge para $x = 0$, já que o seu termo geral não tende para zero se $x \neq 0$.

Teorema 7.2 *Uma série de potências $\sum a_n x^n$, ou converge apenas para $x = 0$ ou existe $r \in (0, +\infty]$ tal que a série converge absolutamente no intervalo aberto $(-r, r)$ e diverge fora do intervalo fechado $[-r, r]$. Se existir $L = \lim \sqrt[n]{|a_n|}$ então $r = 1/L$.*

DEMONSTRAÇÃO: Se a sucessão $(\sqrt[n]{|a_n|})$ for ilimitada então o mesmo acontece, para $x \neq 0$, com a sucessão $(|a_n x^n|)$, pelo que o termo geral da série $\sum a_n x^n$ não é um infinitésimo. Assim, a série de potências converge apenas para $x = 0$.

Se, em alternativa, a sucessão $(\sqrt[n]{|a_n|})$ for limitada então o conjunto

$$X = \left\{ \rho > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{\rho}, \forall n > n_0 \right\}$$

é não-vazio e, portanto, existe $r = \sup X \in (0, +\infty]^4$. Mostremos que X é um intervalo de extremos 0 e r , ou seja, que $X = (0, r)$ ou $X = (0, r]$ ou $X = (0, +\infty)$: seja $\rho \in X$ e $0 < x < \rho$; então

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{\rho} < \frac{1}{x}, \forall n > n_0$$

pelo que $x \in X$. Mostremos agora que

⁴Atenção ao abuso de linguagem: admitimos $\sup X = +\infty$ se X for ilimitado.

- a série converge absolutamente no intervalo aberto $(-r, r)$:

seja $x \in (-r, r)$ e $\rho \in X$ tal que $|x| < \rho < r$; tem-se

$$\sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{|x|}{\rho} < 1, \quad \forall n > n_0$$

e a afirmação segue-se do critério de Cauchy (**Teorema 5.6**);

- a série diverge fora do intervalo fechado $[-r, r]$:

seja $|x| > r$; então $|x| \notin X$ e, para uma infinidade de valores de n , tem-se

$$\sqrt[n]{|a_n|} \geq \frac{1}{|x|} \Leftrightarrow |a_n x^n| \geq 1$$

pelo que a série $\sum a_n x^n$ diverge já que o seu termo geral não é um infinitésimo.

Finalmente, se existir $L = \lim \sqrt[n]{|a_n|}$ então, para cada $\rho \in X$, tem-se (convencionando que $1/L = +\infty$ para $L = 0$)

$$L = \lim \sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{1}{\rho} \Leftrightarrow \rho \leq \frac{1}{L}$$

pelo que $r = \sup X \leq 1/L$. Suponhamos, por absurdo que $r < 1/L$ e seja ρ tal que $r < \rho < 1/L$. Então $L = \lim \sqrt[n]{|a_n|} < 1/\rho$ e, pela definição de limite, existe uma ordem n_0 tal que

$$\sqrt[n]{|a_n|} < 1/\rho, \quad \forall n > n_0.$$

Então $\rho \in X$ e portanto $\rho \leq r = \sup X$, uma contradição. □

Definição 7.1 A $r \in [0, +\infty]$ chama-se **raio de convergência** da série de potências e ao intervalo $(-r, r)$ chama-se **intervalo de convergência**.

Observação 7.1 Uma série de potências pode convergir ou divergir nas extremidades $-r$ e r do seu intervalo de convergência, nada podendo afirmar-se em geral.

Observação 7.2 É consequência do teorema anterior e do **Teorema 5.7** que, se $a_n \neq 0, \forall n$ e existir $\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L$ então o raio de convergência da série de potências $\sum a_n x^n$ é $r = 1/L$.

As propriedades das séries de potências relativas à continuidade, integração e derivação são consequência dos resultados gerais.

Teorema 7.3 *Seja r o raio de convergência da série de potências $\sum a_n x^n$ e $\rho \in (0, r)$. A série converge uniformemente no compacto $[-\rho, \rho]$.*

DEMONSTRAÇÃO: O resultado é consequência imediata do Critério de Weierstraß:

$$|a_n x^n| \leq |a_n| \rho^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [-\rho, \rho]$$

e a série $\sum a_n \rho^n$ é absolutamente convergente pois $\rho \in (-r, r)$.

□

Corolário 7.1 *Seja $r > 0$ o raio de convergência da série de potências $\sum a_n x^n$. A função $f : (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sum a_n x^n$, é contínua.*

O teorema afirma que uma série de potências converge uniformemente em todo o intervalo compacto contido no seu intervalo de convergência. A série pode não convergir uniformemente no intervalo de convergência. No entanto, vale o seguinte resultado (para a demonstração, ver [4, pág. 388]).

Teorema 7.4 (Abel) *Seja r , positivo e finito, o raio de convergência da série de potências $\sum a_n x^n$. Se $\sum a_n r^n$ convergir então a série de potências converge uniformemente em $[0, r]$. Em particular,*

$$\lim_{x \rightarrow r^-} \left(\sum a_n x^n \right) = \sum a_n r^n .$$

Teorema 7.5 (Integração termo a termo) *Seja r o raio de convergência da série de potências $\sum a_n x^n$. Se $[\alpha, \beta] \subset (-r, r)$ então*

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left(\sum a_n x^n \right) dx = \sum \frac{a_n}{n+1} (\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}) .$$

DEMONSTRAÇÃO: A convergência é uniforme no intervalo compacto $[\alpha, \beta]$ contido no intervalo de convergência. Logo, pode-se integrar termo a termo. \square

Teorema 7.6 (Derivação termo a termo) *Seja r o raio de convergência da série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. A função $f : (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, é derivável, com $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$. A série de potências de f' ainda tem raio de convergência r .*

DEMONSTRAÇÃO: Omite-se a demonstração de que o raio de convergência da série das derivadas ainda é r .

Seja $x \in (-r, r)$ e $\rho \in (|x|, r)$. Como a convergência da série das derivadas é uniforme em $[-\rho, \rho]$, f é derivável e vale a igualdade

$$f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} .$$

\square

Observação 7.3 Ao integrar termo a termo uma série de potências com raio de convergência r , pode acontecer que a nova série convirja em alguma das extremidades de $(-r, r)$, ou em ambas, sem que isso aconteça para a série original. Ao derivar termo a termo, pode acontecer o inverso e *perder-se* a convergência em alguma das extremidades do intervalo de convergência, ou mesmo em ambas.

Corolário 7.2 *Seja r o raio de convergência da série de potências $\sum a_n x^n$. A função $f : (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sum a_n x^n$, é de classe C^∞ . Para cada $k \in \mathbb{N}$, tem-se*

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n \geq k} n(n-1) \dots (n-k+1) a_n x^{n-k} , \quad \forall x \in (-r, r) .$$

Em particular, $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$.

Assim, $a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ é o polinômio de Taylor de grau n da função $f(x) = \sum a_n x^n$ em torno do ponto $x = 0$.

Corolário 7.3 (Unicidade) *Sejam $\sum a_n x^n$ e $\sum b_n x^n$ duas séries de potências convergentes em $(-r, r)$ e $X \subset (-r, r)$ um conjunto com um ponto de acumulação nesse intervalo. Se $\sum a_n x^n = \sum b_n x^n$, para todo $x \in X$, então $a_n = b_n, \forall n \in \mathbb{N}$.*

Estudadas as séries de potências, interessa-nos agora saber em que condições se pode representar uma dada função através de uma série de potências, ou seja, como se pode *desenvolver* uma função em série de potências.

Definição 7.2 *Seja I um intervalo e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função com derivadas de todas as ordens em $x_0 \in I$. Chama-se **série de Taylor** de f em torno do ponto x_0 à série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$.*

Resulta imediatamente do **Corolário 7.2** que a série de Taylor em torno de zero da função $f : (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sum a_n x^n$, é precisamente $\sum a_n x^n$.

Dada uma função de classe C^∞ e determinada a sua série de Taylor, digamos em torno de zero, colocam-se duas questões: a de se saber para que valores de x a série converge e a de determinar se a série converge para $f(x)$. Isso acontecerá se o resto da fórmula de Taylor

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x)$$

verificar $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$.

Exemplo 7.4 A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

é tal que $f^{(n)}(0) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Assim, a sua série de Taylor em torno de zero, que é a função nula, é uma série convergente mas não converge para $f(x)$ em nenhum intervalo.

Exemplo 7.5 A fórmula de Taylor em torno de zero, com resto de Lagrange, para a função exponencial é dada por

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad |c| < |x|.$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1} = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 7.6 A fórmula de Taylor em torno de zero, com resto de Lagrange, para a função seno é dada por

$$\sin x = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \frac{[\sin]^{(2n+2)}(c)}{(2n+2)!} x^{2n+2}, \quad |c| < |x|.$$

Como $\left| \frac{[\sin]^{(2n+2)}(c)}{(2n+2)!} x^{2n+2} \right| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \rightarrow 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Mas nem sempre é prático utilizar este procedimento de escrita da fórmula de Taylor e inspeção do limite do resto para obter o desenvolvimento em série de potências de uma dada função. Podem usar-se as propriedades das séries e obter desenvolvimentos a partir de outros já conhecidos.

Exemplo 7.7

$$\begin{aligned} \cosh x &= \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (1 + (-1)^n) \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Exemplo 7.8 A expressão para a soma de um número finito de termos de uma progressão geométrica de razão x é dada por

$$1 + x + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} .$$

Logo,

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + \dots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1 - x} .$$

Como, para $|x| < 1$, se tem $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{1 - x} = 0$, obtém-se

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + \dots + x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n , \quad \forall x \in (-1, 1) .$$

Esta série é a série de Taylor de $f(x) = \frac{1}{1 - x}$ em torno de zero, donde $f^{(n)}(0) = n!$.

Exemplo 7.9 Como $|x^2| < 1 \Leftrightarrow |x| < 1$, tem-se

$$\frac{1}{1 + x^2} = \frac{1}{1 - (-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} , \quad \forall x \in (-1, 1) .$$

Integrando termo a termo, vem

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1 + t^2} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n + 1} ,$$

para $x \in (-1, 1)$. Mas esta série converge, pelo **Critério de Leibniz**, nas extremidades do intervalo e o **Teorema de Abel** permite então estender a igualdade acima a $x \in [-1, 1]$. Fazendo $x = 1$, obtemos a fórmula de Leibniz

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

7.2 Séries de Fourier

As séries de potências permitem representar, em intervalos apropriados, um vasto conjunto de funções mas apresentam uma limitação evidente: as funções têm que ser regulares. A descoberta por Fourier⁵, na sua *Théorie analytique de la chaleur*, de que para uma muito mais vasta classe de funções, incluindo funções descontínuas que surgem em inúmeras aplicações em Mecânica, era válida uma representação em *série trigonométrica* da forma

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \quad (15)$$

teve, pois, uma enorme importância no desenvolvimento da Análise.

Verifica-se facilmente que as funções $\cos \frac{n\pi x}{L}$ e $\sin \frac{n\pi x}{L}$ são periódicas de período (positivo mínimo) igual a $\frac{2L}{n}$. Um período comum a todas elas é, portanto, $2L$, e a validade de (15) implica naturalmente a periodicidade de f . Esta é uma restrição relativamente inócua, já que uma função definida num intervalo limitado pode ser estendida a toda a recta de forma a tornar-se periódica.

Admitindo a validade de (15) e a convergência uniforme da série trigonométrica, basta multiplicar por $\cos \frac{m\pi x}{L}$ ou $\sin \frac{m\pi x}{L}$ e integrar termo a termo para obter, por força das seguintes **relações de ortogonalidade**

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} &= 0 \\ \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} &= \begin{cases} L & \text{se } n = m \\ 0 & \text{se } n \neq m \end{cases} \\ \int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} &= \begin{cases} L & \text{se } n = m \\ 0 & \text{se } n \neq m \end{cases}, \end{aligned}$$

válidas para quaisquer $n, m \in \mathbb{N}$, expressões para os coeficientes a_n e b_n .

⁵Joseph Fourier (1768–1830)

Definição 7.3 Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica, de período $2L$, integrável em cada intervalo limitado. Os **coeficientes de Fourier** de f são os números reais

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \geq 0; \quad (16)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \geq 1. \quad (17)$$

A presença do factor $\frac{1}{2}$ no termo independente de (15) justifica-se por tornar válida a fórmula (16) para $n = 0$.

O principal resultado relativo a séries de Fourier estabelece as condições em que uma função periódica por ser representada pela sua série de Fourier, ou seja, uma série trigonométrica da forma (15) em que os coeficientes são determinados pelas fórmulas (16) e (17).

Definição 7.4 Uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se **seccionalmente contínua** se, em cada intervalo limitado, tiver apenas um número finito de descontinuidades, todas de primeira espécie. Se x_0 for uma descontinuidade, define-se

$$f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \quad e \quad f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x).$$

A função diz-se **seccionalmente derivável** se for seccionalmente contínua e a sua derivada também.

Observação 7.4 Uma função seccionalmente derivável não precisa de estar definida nos seus pontos de descontinuidade. Nesses pontos, faz-se

$$f(x) = \frac{f(x + 0) + f(x - 0)}{2},$$

ou seja, toma-se para valor da função a média dos limites laterais. O mesmo vale para a sua derivada.

Exemplo 7.10 A função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -\pi < x < 0 \\ 1 & \text{se } 0 < x < \pi \end{cases}$$

é seccionalmente derivável. O seu valor na descontinuidade $x = 0$ pode tomar-se $f(x) = \frac{1}{2}$.

Teorema 7.7 (Dirichlet) *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função seccionalmente derivável e periódica, de período $2L$. Então a sua série de Fourier converge em cada ponto $x \in \mathbb{R}$ e*

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

A demonstração está para além do âmbito da disciplina; pode ser consultada em [3].

Exemplo 7.11 Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função periódica, de período 2π , definida em $[-\pi, \pi)$ por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -\pi \leq x < 0 \\ 1 & \text{se } 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

Os coeficientes de Fourier de f são

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \, dx = 1 ;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(nx) \, dx = 0 , \quad n \geq 1 ;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx) \, dx = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{2}{n\pi} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases} , \quad n \geq 1 .$$

logo, como a função é seccionalmente derivável,

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)\pi} \sin [(2n-1)x] .$$

Fazendo $x = \pi/2$, obtemos novamente a fórmula de Leibniz

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Se uma função periódica $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de período $2L$, for par então a sua série de Fourier é uma série de co-senos. Na verdade, os seus coeficientes de Fourier são

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \geq 0 \quad ;$$

$$b_n = 0, \quad n \geq 1 \quad ,$$

pois as funções $f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}$ e $f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}$ são, respectivamente, par e ímpar.

Analogamente, a série de Fourier de uma função ímpar é uma série de senos.

Exemplo 7.12 Seja $f(x) = x$ em $[0, \pi]$. Se quisermos desenvolver f em série de co-senos, temos que prolongar a função por paridade a $[-\pi, 0]$ (ou seja, $f(x) = -x$ em $[-\pi, 0]$) e, de seguida, estendê-la, de modo periódico (com período 2π) a toda a recta. Os coeficientes de Fourier não-nulos são

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x dx = \pi \quad ;$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \cos(nx) dx = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ é par} \\ -\frac{4}{n^2\pi} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}, \quad n \geq 1.$$

Como a função é contínua e seccionalmente derivável, vem

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos [(2n-1)x].$$

Se quisermos desenvolver f em série de senos, prolongamo-la como função ímpar (ou seja, $f(x) = x$ em $[-\pi, 0]$). Os coeficientes de Fourier não-nulos são então

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin(nx) dx = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}, \quad n \geq 1$$

e

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx) . \quad (18)$$

Terminamos com uma importante fórmula, a chamada **identidade de Parseval**.

Teorema 7.8 (Parseval) *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função seccionalmente contínua e periódica, de período $2L$. Então os seus coeficientes de Fourier verificam a identidade*

$$\frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx .$$

Exemplo 7.13 Recordando (18) no exemplo anterior e utilizando a fórmula de Parseval, obtém-se

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3}$$

donde

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} .$$

Bibliografia

- [1] T. APOSTOL, *Calculus, vol. I*, Wiley, 1967.
- [2] J. CAMPOS FERREIRA, *Introdução à Análise Matemática*, Fundação Calouste Gulbenkian, 1993.
- [3] R. COURANT – F. JOHN, *Introduction to Calculus and Analysis, vol. I*, Interscience Publishers, 1965.
- [4] E. LAGES LIMA, *Curso de Análise, vol. 1 (11ª edição)*, Projecto Euclides, IMPA, 2004.
- [5] J. STEWART, *Cálculo, vol. I*, Thomson Learning, 2001.