Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

ANÁLISE INFINITESIMAL II

(Licenciatura em Matemática)

Exame de recurso (2h30m) 14/JUL/2005

1. Estude a natureza das seguintes séries numéricas:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \tan\left(\frac{1}{n}\right)$;

   (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(\ln n)^k}$, $k \in \mathbb{R}$.

2. (a) Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Sabendo que a função definida em $[a,b]$ por $\int_a^x f(x)\,dx$ é uma primitiva de f, mostre que se F for uma qualquer primitiva de f, então

   $$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) .$$

   (b) Sejam h e g funções deriváveis em $\mathbb{R}$. Sabendo que $g(0) = 2$, $g(1) = 6$, $h(2) = 1$ e $h(6) = \pi$, calcule

   $$\int_0^1 7\,g'(x)\,h'\Big(g(x)\Big)\,dx .$$

3. Considere a sucessão de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, com

   $$f_n(x) = \sin(\pi x^n) , \quad x \in [0,1] .$$

   (a) Calcule, para cada $x \in [0,1]$, $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$.

   (b) Averigue se a convergência $f_n \to f$ é uniforme em $[0,1]$.

(V.S.F.F.)

4. As seguintes afirmações são falsas; para cada uma, apresente um contra-exemplo:

   (a) Se f é uma função integrável em $[a,b]$ então tem, nesse intervalo, uma primitiva.

   (b) Uma série de potências com raio de convergência positivo e finito é sempre convergente em, pelo menos, um dos extremos do seu intervalo de convergência.

   (c) A uma função contínua e não identicamente nula no intervalo $(-\pi,\pi]$ corresponde sempre uma série de Fourier com um número infinito de coeficientes não nulos.

5. Considere a série de potências

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\, x^n \ .$$

   (a) Determine o seu raio de convergência e mostre que a série define uma função contínua $g : (-1,1) \to \mathbb{R}$.

   (b) Desenvolva em série de potências de x a função $G : (-1,1) \to \mathbb{R}$ dada por

$$G(x) = \int_0^x g(t)\, dt \ .$$

   (c) **Usando a alínea anterior**, determine, para cada $x \in (-1,1)$, a soma da série que define g.

6. Mostre que se a série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} p_n^2$ for convergente então a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p_n}{n}$ é absolutamente convergente.

Cotação:

1.(*a*) **2.0**	2.(*a*) **1.5**	3.(*a*) **1.5**	4. **3.0**	5.(*a*) **1.5**	6. **2.0**
(*b*) **2.0**	(*b*) **2.0**	(*b*) **2.0**		(*b*) **1.5**	
				(*c*) **1.0**	