



UNIVERSIDADE D
COIMBRA

Dantas Pereira Serra

**OTIMIZAÇÃO COMBINATÓRIA E
PROGRAMAÇÃO LINEAR SOBRE D-ÁDICOS**

VOLUME 1

**Dissertação no âmbito do Mestrado em Matemática Pura orientada pelo Professor
Doutor João Luís Soares e apresentada ao Departamento de Matemática da
Faculdade de Ciências e Tecnologia.**

Junho de 2026

Otimização combinatória e Programação Linear sobre d -ádicos

Dantas Pereira Serra



UNIVERSIDADE D
COIMBRA

Mestrado em Matemática Pura

Master in Pure Mathematics

Dissertação de Mestrado | MSc Dissertation

junho 2026

Agradecimentos

Aos meus pais carinhosos, Cremilda e José, que desde cedo me fizeram crer que era possível viver da minha paixão por matemática, aceitaram que eu não iria para nenhuma engenharia, me incentivaram e tornaram meus estudos possíveis. Sem eles, eu nada seria.

Aos meus amigos que me acompanharam durante toda a jornada até o mestrado, prova de que matemática abriga pessoas de natureza curiosa.

À minha caríssima amiga Caroline que, mesmo à distância, sempre esteve por perto para me ajudar e incentivar. Apesar de todo meu conhecimento de matemática, sua amizade permanece inestimável.

Resumo

O Capítulo 1 trata de problemas de otimização envolvendo grafos e subconjuntos especiais de arestas chamadas T -junções e T -cortes, bem como a demonstração do Teorema de Edmonds e Johnson que permite tornar o problema de otimização num linear cujos poliedros associados são inteiros.

O Capítulo 2 mostra uma generalização dos problemas apresentados no Capítulo 1 sob a forma de clutters ideais, bem como de uma conjectura ainda não resolvida do Seymour sobre os problemas de otimização associados aos clutters ideais e seus respetivos duais.

O capítulo 3 generaliza o estudo dos problemas do Capítulo 2 ao estudar programação linear sobre os números racionais d -ádicos para caracteriza-los e mostrar que são computacionalmente tratáveis do ponto de vista prático.

O capítulo 4 recorda o trabalho dos restantes capítulos, os principais pontos novos apresentados e perspectivas para trabalho futuro.

Conteúdo

1	Otimização sobre T-junções e T-cortes	1
1.1	Grafos, T -cortes e T -junções	1
1.2	Teorema de Edmonds e Johnson	5
2	Clutters ideais	15
2.1	Definição de clutter e clutter bloqueador	15
2.2	O poliedro das coberturas	17
2.3	A Conjetura de Seymour	19
3	Programação linear sobre d-ádicos	23
3.1	Os d -ádicos e sistemas de equações lineares	24
3.2	Sistemas de desigualdade e poliedros	28
3.3	Majorando denominadores de d -ádicos	31
3.4	Otimização linear sobre d -ádicos	36
4	Conclusões e Trabalho Futuro	39
4.1	Síntese do trabalho desenvolvido	39

4.2	Contribuições principais	39
4.3	Perspetivas de trabalho futuro	40
	Bibliografia	41
	Anexo A Dijunções e dicortes	43
A.1	Definição e propriedades	43
	Anexo B Noções elementares de poliedros e programação linear	47
B.1	O invólucro afim do Poliedro	48
B.2	Um ponto no interior relativo de um poliedro	48

Capítulo 1

Otimização sobre T -junções e T -cortes

Neste capítulo estudaremos problemas de otimização linear associados a procura de T -cortes e T -junções de peso mínimo num grafo.

Começaremos por introduzir o que são T -cortes e T -junções de um grafo, como se relacionam estruturalmente e como podem ser usados para formar matrizes, poliedros e subsequentes problemas de otimização linear. O principal resultado que permitirá ligar o problema no grafo a um problema de otimização linear será o Teorema de Edmonds e Johnson [8], que será demonstrado na secção 1.2.

1.1 Grafos, T -cortes e T -junções

Seja $G = (V, E)$ um grafo e seja T um subconjunto de V com cardinalidade par. Começamos com um lema famoso que será útil ao longo de toda a primeira secção:

Lema 1.1.1: Lema dos Apertos de Mão

Num grafo, existe uma quantidade par de vértices com grau ímpar.

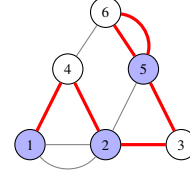
Dado $\emptyset \neq U \subsetneq V$, chamaremos corte induzido por U , denotado por $\delta(U)$, ao conjunto minimal de arestas que, quando removidas, desconectam U do restante do grafo. Formalmente, podemos escrever que são todas as arestas que têm uma extremidade em U e a outra em $V \setminus U$, logo

$$\delta(U) \equiv \{v_1 v_2 \in E : v_1 \in U, v_2 \notin U\}.$$

Decorre diretamente da definição que $\delta(U) = \delta(V \setminus U)$ e diremos que um corte é trivial se $|U| = 1$ ou $|V \setminus U| = 1$.

Exemplo 1.1.1

Para $U = \{1, 2, 5\}$, o seu respetivo corte será $\delta(U) = \{14, 23, 24, 53, 56^{(1)}, 56^{(2)}\}$, onde $56^{(i)}$ é a i -ésima aresta entre 5 e 6.

**Definição 1.1.1: T -corte**

Num grafo $G = (V, E)$, um T -corte é um subconjunto de arestas da forma $\delta(U)$ em que $|U \cap T|$ é ímpar.

O grau de $v \in V$ relativamente a $S \subseteq E$ define-se por $\text{gr}_S(v) = |\delta(v) \cap S|$, diremos que $\text{gr}_S(v)$ é o grau induzido por S . Em particular, $\text{gr}(v) = \text{gr}_E(v) = |\delta(v) \cap E| = |\delta(v)|$.

Definição 1.1.2: T -junção

Num grafo $G = (V, E)$, uma T -junção é um subconjunto de arestas J de E que induz um subgrafo acíclico para o qual $\text{gr}_J(v)$ é ímpar se e somente se $v \in T$.

Com algum abuso de linguagem, trataremos de forma indistinta uma T -junção e seu respetivo grafo induzido.

Se $T = \emptyset$ e J é uma T -junção, seu grafo induzido $G' = (V, J)$ tem todos os vértices com grau par, logo deve ser uma união de ciclos disjuntos. Como, por definição, J é livre de ciclos, segue que $J = \emptyset$.

Exemplo 1.1.2

Para $T = \{1, 2, 3, 5\}$, os conjuntos de arestas $\{12, 35\}$ e $\{14, 46, 65, 23\}$ são T -junções.



Como a figura sugere, 56 representa apenas uma das aresta entre 5 e 6.

Dados T_1 e T_2 conjuntos de vértices de cardinalidade par, $J_1 \subseteq E$ uma T_1 -junção e $J_2 \subseteq E$ uma T_2 -junção, $J_1 \triangle J_2$ induz grau ímpar apenas nos vértices de $T_1 \triangle T_2$, onde $\triangle$ é a diferença simétrica. De facto, temos

$$\begin{aligned} \text{gr}_{J_1 \triangle J_2}(v) &= |\delta(v) \cap (J_1 \triangle J_2)| \\ &= |\delta(v) \cap J_1| + |\delta(v) \cap J_2| - 2|\delta(v) \cap J_1 \cap J_2| \\ &= \text{gr}_{J_1}(v) + \text{gr}_{J_2}(v) - 2\text{gr}_{J_1 \cap J_2}(v), \end{aligned}$$

logo $\text{gr}_{J_1 \triangle J_2}(v)$ é ímpar se e somente se $\text{gr}_{J_1}(v) + \text{gr}_{J_2}(v)$ é ímpar, o que ocorre quando os termos da soma têm paridade diferente, assim $J_1 \triangle J_2$ induz grau ímpar em v se e somente se $v \in T_1 \triangle T_2$.

Proposição 1.1.1

Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo e T um subconjunto de vértices. Então existe uma T -junção se e somente se $|T|$ é par.

Demonstração. Se $|T|$ é ímpar, o Lema dos Apertos de Mão 1.1.1 garante que não existe T -junção.

Reciprocamente, os conjuntos de cardinalidade par podem ser separados em pares disjuntos de vértices $\{t_{2i-1}, t_{2i}\}$ para $1 \leq i \leq n = |T|/2$. Como o grafo é conexo, existem caminhos C_i que conectam cada par de vértices $\{t_{2i-1}, t_{2i}\}$ e, pela discussão anterior,

$$J = C_1 \triangle C_2 \triangle C_3 \triangle \cdots \triangle C_n$$

induz grau ímpar nos vértices de $\{t_1, t_2\} \triangle \{t_3, t_4\} \triangle \cdots \triangle \{t_{|T|-1}, t_{|T|}\} = T$, pois são pares de vértices disjuntos. Note que, como um ciclo induz grau par em todos os vértices, se J possui um ciclo, podemos excluí-lo de J sem alterar a paridade dos graus que J induz. Após eliminar todos os ciclos, J será uma T -junção. $\square$

Quando G não é conexo e $G_1, G_2, \dots, G_\ell$ são suas componentes conexas, existirá uma T -junção se e somente se, para cada G_i , existir uma $(T \cap V(G_i))$ -junção, diga-se J_i . De facto,

$$J = J_1 \cup J_2 \cup \cdots \cup J_\ell$$

será uma T -junção de G . Portanto, pela Proposição 1.1.1 G tem uma T -junção se e somente se $|T \cap V(G_i)|$ é par para todo $i = 1, 2, \dots, \ell$.

Proposição 1.1.2: [3, Proposição 5.25]

Num grafo, toda T -junção é a união de caminhos simples disjuntos (nas arestas atravessadas) que ligam $|T|/2$ pares (disjuntos) de vértices de T .

Demonstração. Sejam $u \in T$, J uma T -junção e H uma componente conexa de $G' = (V, J)$ que contém o vértice u . Pelo Lema dos Apertos de Mão 1.1.1, existe outro vértice $v \in T \cap V(H)$ e, como H é uma componente conexa, existe um caminho $C \subseteq J$ entre u e v que será uma $\{u, v\}$ -junção. Assim, $J \triangle C = J \setminus C$ não possui ciclos, logo será uma $(T \triangle \{u, v\})$ -junção, isto é, uma $(T \setminus \{u, v\})$ -junção.

Como podemos repetir o processo de eliminar caminhos de J que ligam pares de vértices de T até torná-lo vazio, concluímos que J é formado por caminhos disjuntos. $\square$

Exemplo 1.1.3

Pela proposição 1.1.2, quando $T = \{u, v\}$, as T -junções são os caminhos simples entre u e v .

Para uma T -junção J e para $U \subseteq V$ tal que $|U \cap T|$ é ímpar, a Proposição 1.1.2 garante que existe um caminho contido em J que liga um vértice de U a um vértice de $V \setminus U$, logo $\delta(U) \cap J$ nunca é vazio.

Proposição 1.1.3

Para qualquer T -junção J e para qualquer T -corte $B \equiv \delta(U)$ do mesmo grafo, $|J \cap B|$ é ímpar.

Demonstração. Notemos que uma aresta $e \in J$ pode conectar: **(i)** dois vértices dentro de U ; **(ii)** dois vértices de $V \setminus U$ ou; **(iii)** um vértice de U a um vértice de $V \setminus U$.

As arestas dos tipos **(i)** e **(ii)** adicionam uma quantidade par de graus aos vértices de U (2 e 0, respetivamente), e cada aresta do tipo **(iii)**, que são as arestas de $J \cap B$, adiciona exatamente um grau, donde

$$|J \cap B| \equiv \sum_{v \in U} \text{gr}_J(v) \pmod{2}.$$

Por definição de T -junção, J induz grau ímpar apenas nos elementos de T e, por definição de T -corte, $|U \cap T|$ é ímpar, logo podemos separar a soma de acordo com $U = (U \setminus T) \cup (U \cap T)$ e obter

$$\sum_{v \in U} \text{gr}_J(v) = \sum_{v \in U \setminus T} \text{gr}_J(v) + \sum_{v \in U \cap T} \text{gr}_J(v) \equiv 0 + 1 \pmod{2}.$$

Portanto, a interseção original tem cardinalidade ímpar. □

Vejamos agora que os T -cortes podem ser caracterizados por T -junções.

Proposição 1.1.4

Seja $G = (V, E)$ e S um subconjunto de E . Então S contém um T -corte se e somente se $S \cap J \neq \emptyset$ para toda T -junção J .

Demonstração. Se S contém um T -corte, pela Proposição 1.1.3, S intersesta todas as T -junções. Reciprocamente, suponha que S intersesta todas as T -junções mas não contém nenhum T -corte. Nesse caso, dada uma componente H do grafo $G' = (V, E \setminus S)$, temos que $|V(H) \cap T|$ é par, caso contrário $\delta(V(H))$ seria um T -corte contido em S . Assim, cada componente H admite uma $(V(H) \cap T)$ -junção J_H que, unidas, formam uma T -junção que não intersesta S , uma contradição. □

O análogo deste resultado para T -junções é também verdadeiro e a sua demonstração é semelhante.

Proposição 1.1.5

Seja $G = (V, E)$ e S um subconjunto de E . Então, S contém uma T -junção se e somente se $S \cap B \neq \emptyset$ para todo T -corte B .

Demonstração. Analogamente à demonstração anterior, se S contém uma T -junção, pela Proposição 1.1.3, S intersesta todos os T -cortes.

Reciprocamente, suponha que S intersesta todos os T -cortes e não contém nenhuma T -junção. Para toda T -junção J temos $S \cap J \neq J$, implicando que $(E \setminus S) \cap J \neq \emptyset$. Pela Proposição 1.1.4, $E \setminus S$ contém um T -corte que, em particular, não intersesta S , levando a uma contradição. $\square$

Proposição 1.1.6

Seja $G = (V, E)$ um grafo e T um subconjunto de V com cardinalidade par. Então, $J \subseteq E$ é uma T -junção se e somente se for um conjunto minimal, por inclusão, que intersesta todos os T -cortes.

Demonstração. Pela Proposição 1.1.5, um conjunto minimal por inclusão que intersesta todos os T -cortes é uma T -junção.

Reciprocamente, suponhamos que J é uma T -junção. Pela Proposição 1.1.5, J intersesta todos os T -cortes e só precisamos de mostrar que J é minimal. Seja J' uma T -junção tal que $J' \subseteq J$, então $J' \triangle J = J \setminus J'$ é uma $(T \triangle T)$ -junção. Como $T \triangle T = \emptyset$, segue da definição de T -junção que $J \setminus J' = \emptyset$. $\square$

1.2 Teorema de Edmonds e Johnson

Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo com pesos não negativos $\mathbf{w} \in \mathbb{Z}^E$ nas arestas; diremos que $(G, \mathbf{w})$ é um grafo pesado.

Um carteiro começa o dia num vértice de um grafo com o trabalho de entregar uma carta em cada aresta do grafo e, no fim, retornar ao vértice de início. O Problema do Carteiro Chinês consiste num passeio que permite ao carteiro cumprir a sua tarefa minimizando o peso final, sendo uma generalização natural da procura por um circuito euleriano.

O problema é completamente resolvido de forma algorítmica no artigo [8] através do seguinte resultado:

Teorema 1.2.1: [8]

Seja $(G, \mathbf{w})$ um grafo conexo pesado e T o conjunto dos vértices de G com grau ímpar. Então o problema do Carteiro Chinês em G é equivalente a encontrar a T -junção de peso mínimo.

Ideia da demonstração. Um grafo conexo possui um circuito euleriano se e somente se todos os seus vértices têm grau par, logo, quando o grafo possui vértices de grau ímpar, qualquer passeio que passa por todas as arestas e volta ao vértice de início tem de necessariamente repetir arestas.

Quando T é o conjunto dos vértices de grau ímpar (que tem cardinalidade par), uma T -junção é uma união de caminhos que ligam pares de vértices de grau ímpar, em particular $G' = (V, E \setminus J)$ possui apenas vértices com grau par e, portanto, admite um circuito euleriano.

O caminho do Carteiro Chinês será formado pelos circuitos eulerianos em $G' = (V, E \setminus J)$, onde J é uma T -junção de peso mínimo, junto dos caminhos em J percorridos duas vezes, o que minimiza o peso dos caminhos duplamente percorridos. $\square$

Diferente da abordagem de Edmonds e Johnson [8], vamos enquadrar o problema da T -junção de peso mínimo como um problema de otimização linear. Fixaremos até ao fim da secção um grafo $G = (V, E)$, T um subconjunto de V com cardinalidade par e um vetor não negativo de pesos $\mathbf{w} \in \mathbb{Z}^E$.

Dado S um subconjunto de arestas de G , o vetor característico de S , denotado por $\chi(S)$, é o vetor de $\mathbb{R}^E$ definido por

$$\chi(S)_e = \begin{cases} 1, & \text{se } e \in S, \\ 0, & \text{se } e \notin S. \end{cases}$$

Denotaremos por $\mathcal{J}$ a matriz cujas linhas são vetores característicos das T -junções de G e por $\mathcal{C}$ a matriz cujas linhas são vetores característicos dos T -cortes.

Pela Proposição 1.1.5, S contém uma T -junção se e somente se $\mathcal{C}\chi(S) \geq \mathbf{1}$, logo o problema da T -junção de peso mínimo pode ser modelado como

$$\min\{\mathbf{w}\mathbf{x} : \mathcal{C}\mathbf{x} \geq \mathbf{1}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^E\}. \quad (1.1)$$

A este problema de minimização está associado o poliedro

$$P(\mathcal{C}) := \{\mathbf{x} : \mathcal{C}\mathbf{x} \geq \mathbf{1}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}.$$

é o *Poliedro das coberturas* dos T -cortes. Pela Proposição 1.1.5, todo vetor característico de uma T -junção pertence a $P(\mathcal{C})$.

No resto desta secção, dedicar-nos-emos à demonstração de que os pontos extremos deste poliedro são vetores de inteiros, conhecido como Teorema de Edmonds e Johnson [8], seguindo a abordagem apresentada no trabalho "Combinatorial Optimization: Packing and Covering" [4], o que permitirá desconsiderar a restrição da integralidade de $\mathbf{x}$ em (1.1) e finalmente apresentar o problema da T -junção de peso mínimo como um problema de otimização linear.

Embora a demonstração do Teorema de Edmonds e Johnson possa ser encontrada em [5] e [4], aqui detalhamos a parte final da demonstração que é omitida nos outros trabalhos.

Para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^E$ e $S \subseteq E$, denotamos $\mathbf{x}(S) \equiv \sum_{e \in S} x_e = \chi(S)\mathbf{x}$.

Um poliedro com pontos extremos diz-se inteiro se todos os seus pontos extremos são inteiros.

Teorema 1.2.2: Edmonds-Johnson [8]

O poliedro $P(\mathcal{C})$ é inteiro e os seus pontos extremos são as linhas de $\mathcal{J}$.

Ideia geral da demonstração. Começamos por fixar um ponto extremo $\hat{\mathbf{x}} \in P(\mathcal{C})$. Quando $\hat{\mathbf{x}}$ é um ponto extremo associado aos T -cortes triviais, usaremos um lema auxiliar para mostrar que $\hat{\mathbf{x}}$ é o vetor característico de uma T -junção.

Caso contrário, procederemos por indução no número de vértices. Serão criados dois grafos a partir de G , chamados G_1 e G_2 , com estritamente menos vértices do que G e dois novos conjuntos de vértices, T_1 e T_2 , cujos respectivos poliedros das coberturas dos T_i -cortes têm como pontos extremos vetores característicos de T_i -junções. Usaremos as T_i -junções dos grafos G_1 e G_2 para construir T -junções no grafo maior e concluir que $\hat{\mathbf{x}}$ é ele próprio o vetor característico de uma T -junção. $\square$

Dividiremos a demonstração numa sequência de lemas e observações para tornar a leitura mais fluida e intuitiva.

Para o primeiro lema, precisaremos de uma relaxação do poliedro $P(\mathcal{C})$. Seja $\mathcal{C}'$ a submatriz de $\mathcal{C}$ cujas linhas são os vetores característicos dos T -cortes triviais e seja

$$P(\mathcal{C}') = \{\mathbf{x} : \mathcal{C}'\mathbf{x} \geq \mathbf{1}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}.$$

Com isso, é evidente que $P(\mathcal{C}) \subseteq P(\mathcal{C}')$.

Um grafo é uma *estrela* se for uma árvore em que no máximo um vértice tem grau superior a 1, chamado *centro* da estrela.

Lema 1.2.1: [4, Lema 2.2]

Seja $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^E$ um ponto extremo do poliedro $P(\mathcal{C}')$. Então as componentes conexas do subgrafo de G induzido pelas arestas de $\text{supp}(\hat{\mathbf{x}}) = \{e \in E : x_e > 0\}$ são:

- Ciclos ímpares com vértices em T e arestas e tais que $\hat{x}_e = 1/2$, ou;
- Estrelas com vértices em T , exceto possivelmente o centro, e arestas e tais que $\hat{x}_e = 1$.

Demonstração. Como $\hat{\mathbf{x}}$ é ponto extremo de $P(\mathcal{C}')$, existe um subsistema do sistema de desigualdades

$$\mathcal{C}'\mathbf{x} \geq \mathbf{1}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \quad (1.2)$$

que tem $\hat{\mathbf{x}}$ como única solução. Por isso, em particular, $|\text{supp}(\hat{\mathbf{x}})| \leq |\hat{T}|$, onde $\hat{T}$ identifica as restrições em (1.2) satisfeitas como igualdade por $\hat{\mathbf{x}}$ quando a desigualdade é tomada como igualdade. Mais, se H denotar uma componente conexa de $\hat{G} \equiv (V, \text{supp}(\hat{\mathbf{x}}))$ (e, portanto, $|E(H)| \geq |V(H)| - 1$) então

$$|E(H)| \leq |V(H) \cap \hat{T}| \leq |V(H)|,$$

pelo que H é uma árvore (caso $|E(H)| = |V(H)| - 1$) ou uma quase-árvore (caso $|E(H)| = |V(H)|$).

(i) Suponhamos que H é uma quase-árvore e, portanto, contém um único ciclo. Como $|E(H)| = |V(H)|$ então $V(H) \subseteq \hat{T}$. Seja C o único ciclo em H e, por absurdo, suponhamos que $H \neq C$. Então, existe $u \in V(H) \setminus V(C)$ de grau um (em H) — um vértice-folha de H . Como $V(H) \subseteq \hat{T}$ então, sendo $e \equiv uw$ a única aresta de H incidente em u , tem-se $\hat{x}_e = 1$, o que implicaria que $V(H) = \{u, w\}$, uma contradição. Portanto, H é um ciclo.

Agora, se H fosse um ciclo com um número par de arestas, existiria $\mathbf{d}$ definida por componentes $+1$ e -1 alternadamente ao longo das arestas do ciclo C (e zero nas restantes) tal que ambos $\hat{\mathbf{x}} + \varepsilon \mathbf{d}, \hat{\mathbf{x}} - \varepsilon \mathbf{d} \in P$, para algum $\varepsilon > 0$ (suficientemente pequeno) e, para além disso, $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{\mathbf{x}} + \varepsilon \mathbf{d})/2 + (\hat{\mathbf{x}} - \varepsilon \mathbf{d})/2$, o que é uma contradição para o facto de $\hat{\mathbf{x}}$ ser ponto extremo de P . Portanto, por redução ao absurdo, concluímos que H é um ciclo com um número ímpar de arestas.

Além disso, ao longo do ciclo C , o valor da correspondente componente de $\hat{\mathbf{x}}$ alterna entre maior ou igual a $1/2$ e menor ou igual a $1/2$. Como se trata de um ciclo ímpar, isso só é possível se todas essas componentes forem exatamente $1/2$.

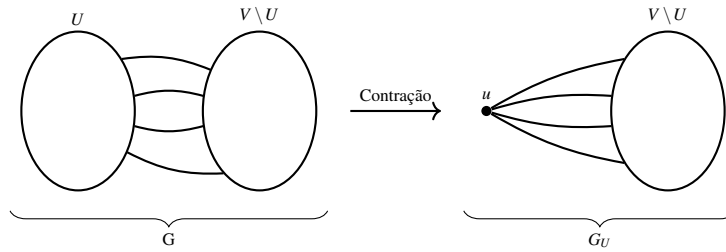
(ii) Suponhamos que H é uma árvore, pelo que $|V(H)| - 1 \leq |V(H) \cap \hat{T}| \leq |V(H)|$. Portanto, no máximo, um dos vértices de H não pertence a $\hat{T}$. Se $|V(H)| = 1$ então H não tem arestas. Se $|V(H)| = 2$ então H tem uma única aresta $e \equiv uw$. Como, sem perda de generalidade, $u \in \hat{T}$ então $\hat{x}_e = 1$. Finalmente, suponhamos que $|V(H)| > 2$, e seja u um vértice-folha de H que pertença a $\hat{T}$ (H tem, pelo menos, dois vértices-folha). Sendo $e \equiv uw$ a única aresta de H incidente em u então $w \notin \hat{T}$ (caso contrário, ter-se-ia $|V(H)| = 2$) e $\hat{x}_e = 1$. Portanto, $V(H) \cap \hat{T} = V(H) \setminus \{w\}$. Portanto, para

todo vértice u de H distinto de w , se $e \equiv uv \in E(H)$ então $v = w$ (pois, caso contrário, $|V(H)| = 2$). Concluimos que H é uma estrela com centro em $w \notin \hat{T}$. $\square$

Vamos agora à teoria necessária quando $\hat{x}$ não é ponto extremo de $P(\mathcal{C})$. Dado um T -corte $\delta(U)$, denotemos por $G_U = (V_U, E_U)$ o grafo com o conjunto de vértices U contraído num único vértice u . Assim, $V_U = (V \setminus U) \cup \{u\}$ e

$$E_U = \{v_1 v_2 \in E : v_1, v_2 \notin U\} \cup \{v_1 u : v_1 u' \in \delta(U) \text{ para algum } u' \in U\}.$$

Podem existir arestas múltiplas em E_U mesmo que não existam arestas múltiplas em E .



Consideremos o conjunto de vértices $T_U = (T \setminus U) \cup \{u\}$, que é par pois $|T \cap U|$ é ímpar pela definição de T -corte.

Nesta operação, as arestas de $E(U)$ são suprimidas e G_U mantém todas as outras arestas. Por isso, dado um vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^E$, a sua contração para $\mathbb{R}^{E_U}$, que denotaremos $\tilde{\mathbf{x}}$, está bem definida e coincide com $\mathbf{x}$ sem as componentes dos índices de $E(U)$.

Podemos ainda construir a matriz dos T_U -cortes $\tilde{\mathcal{C}}$ e o poliedro das coberturas dos T_U -cortes $P(\tilde{\mathcal{C}})$.

Lema 1.2.2

Seja $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^E$ e a sua respetiva contração $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{E_U}$. Se $\mathbf{x} \in P(\mathcal{C})$, então $\tilde{\mathbf{x}} \in P(\tilde{\mathcal{C}})$.

Demonstração. A condição de não negatividade é trivialmente satisfeita.

Podemos identificar qualquer subconjunto de vértices de G_U que não contém o vértice contraído u como um subconjunto de vértices de G . Todo T_U -corte em G_U define um T -corte em G . De facto, se $W \subseteq G_U$ define um T_U corte em G_U , então

$$W' = \begin{cases} W, & \text{se } u \notin W, \\ (W \setminus \{u\}) \cup U, & \text{se } u \in W, \end{cases}$$

está contido em V e $\delta(W')$ é um T -corte (pois $|T \cap W'|$ é ímpar) que coincide com $\delta(W)$ como conjunto, donde $\tilde{\mathbf{x}}(\delta(W)) = \mathbf{x}(\delta(W')) \geq 1$. $\square$

No próximo lema identificamos as T_U -junções ora como vetores característicos, ora como conjuntos de arestas de forma indistinta.

Lema 1.2.3

Sejam $J_1, J_2, \dots, J_\ell \subseteq E_U$ T_U -junções e $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{E_U}$ tal que $\tilde{\mathbf{x}}(\delta(u)) = 1$. Se, para alguma combinação convexa

$$\mathbf{z} = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i J_i \leq \tilde{\mathbf{x}}, \quad \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i = 1, \quad \lambda_i > 0,$$

então cada J_i contém uma única aresta de $\delta(u)$. Em particular, $\tilde{x}_e = z_e$ para todo $e \in \delta(u)$.

Demonstração. Como $u \in T_U$ e toda T_U -junção é a união de caminhos disjuntos entre pares de vértices de T_U , cada J_i tem ao menos uma aresta de $\delta(u)$ e todos os λ_i aparecem ao menos uma vez na combinação convexa das componentes de $\mathbf{z}$ correspondentes a $\delta(u)$, donde

$$1 = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \leq \sum_{e \in \delta(u)} z_e \leq 1,$$

onde a última desigualdade se deve à hipótese de que $\tilde{\mathbf{x}}(\delta(u)) = 1$. Como a soma destas componentes é 1, segue que cada λ_i apareceu uma e apenas uma vez, logo J_i possui uma única aresta de $\delta(u)$.

Como $\mathbf{z} \leq \tilde{\mathbf{x}}$ e, ao longo das componentes de $\delta(u)$, aparecem todos os λ_i em $\mathbf{z}$, temos $1 \leq \mathbf{z}(\delta(u)) = \tilde{\mathbf{x}}(\delta(u)) = 1$. Se houvesse $e \in \delta(u)$ tal que $z_e > \tilde{x}_e$, teríamos $\tilde{\mathbf{x}}(\delta(u)) > 1$, uma contradição. Concluímos que $z_e = \tilde{x}_e$ para todo $e \in \delta(u)$. $\square$

Teorema 1.2.3: Edmonds-Johnson [8]

O poliedro $P(\mathcal{C})$ é inteiro e os seus pontos extremos são as linhas de $\mathcal{J}$.

Demonstração. Seja $\hat{\mathbf{x}}$ um ponto extremo do poliedro $P(\mathcal{C})$. A demonstração é feita por indução no número de vértices do grafo G , em que o resultado segue trivialmente no caso de G ter 2 vértices; a hipótese de indução será utilizada mais adiante.

Suponha inicialmente que $\hat{\mathbf{x}}$ seja também um ponto extremo do poliedro definido no Lema 1.2.1, isto é, $\hat{\mathbf{x}}(\delta(U)) = 1$ para T -cortes triviais. Seja $H = (\tilde{V}, \tilde{E})$ uma componente conexa do grafo induzido por $\text{supp}(\hat{\mathbf{x}})$.

Como as arestas fora do suporte são nulas, temos $\hat{\mathbf{x}}(\delta(\tilde{V})) = 0$, que é menor do que 1, logo $\delta(\tilde{V})$ não é um T -corte e, portanto, $\tilde{V}$ contém um número par de vértices de T . Pelo Lema 1.2.1, H não pode ser um ciclo de comprimento ímpar; segue então que H é uma estrela e todas as componentes de $\hat{\mathbf{x}}$ são inteiras.

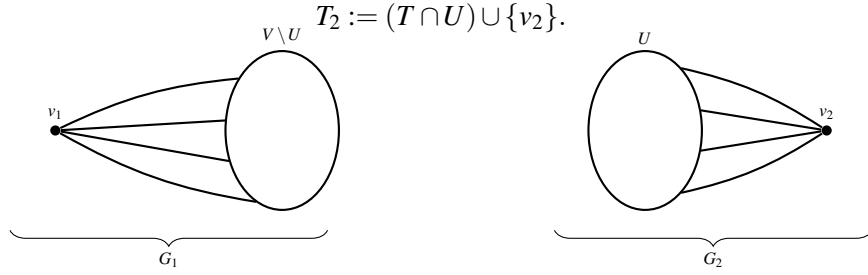
Ainda pelo mesmo lema, como H contém um número par de vértices de T , o vértice central da estrela pertence a T se, e somente se, $|\tilde{E}|$ é ímpar. Consequentemente, as componentes positivas de $\hat{\mathbf{x}}$ induzem grau ímpar exatamente nos vértices de T . Assim, H é livre de ciclos e induz grau ímpar apenas em T , o que mostra que $\hat{\mathbf{x}}$ é o vetor característico de uma T -junção.

Suponha agora que $\hat{\mathbf{x}}$ não é um ponto extremo do poliedro do Lema 1.2.1. Então, existe um T -corte não trivial $\delta(U)$ tal que $\hat{\mathbf{x}}(\delta(U)) = 1$. Usaremos agora a contração estudada anteriormente para aplicar a hipótese de indução.

Seja $G_1 = G/U$ o grafo obtido a partir de G pela contração de todos os vértices de U num único vértice v_1 e defina

$$T_1 := \{v_1\} \cup (T \setminus U).$$

De modo análogo, seja $G_2 = G/(V \setminus U)$ o grafo obtido pela contração de $V \setminus U$ num único vértice v_2 , e defina



Seja $\mathcal{C}_i$ a matriz dos T_i -cortes em G_i e $P(\mathcal{C}_i)$ os seus respectivos poliedros das coberturas para $i = 1, 2$. Note que, como $|U|, |V \setminus U| \neq 1$, G_1 e G_2 têm estritamente menos vértices do que G .

Denotemos por $\hat{\mathbf{x}}^i \in \mathbb{R}^{E_i}$ a restrição de $\hat{\mathbf{x}}$ a E_i . Pelo Lema 1.2.2, $\hat{\mathbf{x}}^i \in P(\mathcal{C}_i)$.

Por hipótese de indução, os pontos extremos de $P(\mathcal{C}_i)$ são vetores característicos de T_i -junções, pelo que existem combinações convexas de T_1 -junções $J_1^1, J_2^1, \dots, J_k^1$ e de T_2 -junções $J_1^2, J_2^2, \dots, J_\ell^2$ tais que

$$\mathbf{z}^1 = \sum_{i=1}^k \lambda_i J_i^1 \leq \hat{\mathbf{x}}^1, \quad \mathbf{z}^2 = \sum_{i=1}^{\ell} \mu_i J_i^2 \leq \hat{\mathbf{x}}^2. \quad (1.3)$$

Pelo Lema 1.2.3, $\mathbf{z}^1, \mathbf{z}^2$ e $\hat{\mathbf{x}}$ coincidem nas arestas de $\delta(U)$. Dadas uma T_1 -junção J_i^1 e uma T_2 -junção J_j^2 que coincidem nas arestas de $\delta(U)$, isto é, ambas utilizam a mesma aresta, temos que $J_i^1 \cup J_j^2$ é uma T -junção em G . De facto, J_i^1 garante a paridade correta dos vértices em $V \setminus U$, J_j^2 garante o mesmo para os vértices de U e nenhuma delas contém um ciclo.

Para cada $e \in S = \text{supp}(\hat{\mathbf{x}}) \cap \delta(U)$, consideramos as T_i -junções de (1.3) que a contêm:

$$I_e^1 = \{i : e \in J_i^1, 1 \leq i \leq k\}, \quad I_e^2 = \{j : e \in J_j^2, 1 \leq j \leq \ell\}.$$

Ainda pelo Lema 1.2.3, cada T_i -junção usa apenas uma aresta de $\delta(U)$, logo cada um dos dois conjuntos de índices induz partições $\{I_e^1\}_{e \in S}$ e $\{I_e^2\}_{e \in S}$ de $\{1, 2, \dots, k\}$ e $\{1, 2, \dots, \ell\}$ respetivamente,

assim

$$\sum_{i \in I_e^1} \lambda_i = \sum_{j \in I_e^2} \mu_j = \hat{x}_e, \text{ donde } \sum_{i \in I_e^1} \sum_{j \in I_e^2} \frac{\lambda_i \mu_j}{\hat{x}_e} = \hat{x}_e.$$

Construímos a combinação convexa de T -junções:

$$\mathbf{z} = \sum_{e \in S} \sum_{i \in I_e^1} \sum_{j \in I_e^2} \frac{\lambda_i \mu_j}{\hat{x}_e} (J_i^1 \cup J_j^2).$$

Vejamos que $\hat{\mathbf{x}}$ domina essa combinação convexa de T -junções, isto é, $\mathbf{z} \leq \hat{\mathbf{x}}$ nas arestas de $E(U)$, $E(V \setminus U)$ e $\delta(U)$ separadamente.

Se $e^* \in E(V \setminus U)$, trata-se de uma aresta que pertence às T_1 -junções, isto é, $(J_i^1 \cup J_j^2)_{e^*} = (J_i^1)_{e^*}$, então:

$$z_{e^*} = \sum_{e \in S} \sum_{i \in I_e^1} \sum_{j \in I_e^2} \frac{\lambda_i \mu_j}{\hat{x}_e} (J_i^1)_{e^*} = \sum_{e \in S} \sum_{i \in I_e^1} \lambda_i (J_i^1)_{e^*} \leq \hat{x}_{e^*} = \hat{x}_{e^*}.$$

Analogamente, podemos mostrar que $z_{e^*} \leq \hat{x}_{e^*}$ quando $e^* \in E(U)$. Por fim, se $e^* \in \delta(U)$,

$$z_{e^*} = \sum_{i \in I_{e^*}^1} \sum_{j \in I_{e^*}^2} \frac{\lambda_i \mu_j}{\hat{x}_{e^*}} (J_i^1 \cup J_j^2)_{e^*} = \sum_{i \in I_{e^*}^1} \sum_{j \in I_{e^*}^2} \frac{\lambda_i \mu_j}{\hat{x}_{e^*}} = \hat{x}_{e^*}.$$

Notemos que se $e \notin \text{supp}(\hat{\mathbf{x}})$, é imediato que $z_e = \hat{x}_e = 0$. Logo, $\hat{\mathbf{x}}$ domina uma combinação convexa de T -junções. Como todo vetor característico de uma T -junção pertence ao poliedro $P(\mathcal{C})$ e $\hat{\mathbf{x}}$ é um ponto extremo, concluímos que ele próprio deve ser o vetor característico de uma T -junção.

Reciprocamente, como qualquer vetor característico de uma T -junção é um vetor de zeros e uns minimal (nas restrições de $p(\mathcal{C})$) que pertence ao poliedro, serão pontos extremos, pelo que os pontos extremos serão exatamente todas as linhas de $\mathcal{J}$. $\square$

Uma consequência imediata do Teorema 1.2.3 é que a relaxação linear do problema (1.1) sempre possui uma solução ótima que é o vetor característico de uma T -junção de peso mínimo, logo

$$\min\{\mathbf{w}\mathbf{x} : \mathcal{C}\mathbf{x} \geq \mathbf{1}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^E\} = \min\{\mathbf{w}\mathbf{x} : \mathcal{C}\mathbf{x} \geq \mathbf{1}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}.$$

Concluímos que encontrar uma T -junção de peso mínimo e, portanto, resolver o problema do Carteiro Chinês, é equivalente a resolver um problema de otimização linear.

O nosso objetivo inicial era encontrar a T -junção de peso mínimo, mas e se o objetivo for encontrar o T -corte de peso mínimo?

Analogamente ao que ocorre com as T -junções, pela Proposição 1.1.4, o problema do T -corte de peso mínimo pode ser modelado por

$$\min\{\mathbf{w}\mathbf{x} : \mathcal{J}\mathbf{x} \geq \mathbf{1}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^E\}. \quad (1.4)$$

O poliedro $P(\mathcal{J}) = \{\mathbf{x} : \mathcal{J}\mathbf{x} \geq \mathbf{1}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ subjacente ao problema é o *Poliedro das coberturas* das T -junções. No Capítulo 2 demonstraremos o seguinte teorema como um corolário de um resultado mais geral.

Teorema 1.2.4

O poliedro $P(\mathcal{J})$ é inteiro e os seus pontos extremos são as linhas de $\mathcal{C}$.

O Teorema 1.2.4 permite reduzir (1.4) a outro problema de otimização linear ao ignorar a restrição de integralidade.

Capítulo 2

Clutters ideais

No Capítulo 1, as matrizes $\mathcal{J}$ e $\mathcal{C}$, cujas linhas são, respetivamente, os vetores característicos de T -junções e T -cortes de um grafo, tinham duas características marcantes: suas linhas eram vetores característicos e os poliedros obtidos a partir do processo

$$P(A) = \{\mathbf{x} : A\mathbf{x} \geq \mathbf{1}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\},$$

que chamamos poliedros das coberturas, tinham pontos extremos inteiros.

Neste capítulo, veremos que estas propriedades aparecem em mais matrizes além destas; em particular, elas fazem parte do estudo de estruturas chamadas *clutter*.

Este capítulo pretende apresentar os conceitos básicos necessários à formulação de clutter ideal e as suas propriedades. Apresentaremos a conjectura de Seymour [22] de 1979 e as suas soluções parciais existentes, bem como um enfraquecimento da conjectura que [12] sugere ser verdadeiro.

2.1 Definição de clutter e clutter bloqueador

Seja S um conjunto finito e $\mathcal{P}(S)$ as partes de S . Uma família $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(S)$ é uma *família de Sperner* [9] de S se

$$\forall F_1, F_2 \in \mathcal{F} \text{ com } F_1 \neq F_2, \text{ temos } F_1 \not\subseteq F_2.$$

Exemplo 2.1.1

Para S qualquer e $k \leq |S|$, a família dos subconjuntos de S com cardinalidade k

$$\mathcal{F} = \{F \subseteq S : |F| = k\}$$

é uma família de Sperner. Para $k = 0$, $\mathcal{F} = \{\emptyset\}$.

Definição 2.1.1: Clutter

Um clutter é um par $\mathcal{C} = (S, \mathcal{F})$ composto por um conjunto finito não vazio S e uma família $\mathcal{F}$ de Sperner de S .

Um clutter $\mathcal{C} = (S, \mathcal{F})$ pode ser também caracterizado pela sua matriz de incidência $|\mathcal{F}| \times |S|$, denotada por $M(\mathcal{C})$, cujas linhas são os vetores característicos dos elementos de $\mathcal{F}$.

Exemplo 2.1.2

Sejam $G = (V, E)$ um grafo e T um subconjunto de vértices de G com cardinalidade par. Pela Proposição 1.1.6, a família das T -junções, que denotaremos por $\mathcal{F}_J$, é uma família de Sperner, isto é, $\mathcal{C}_J = (E, \mathcal{F}_J)$ é um clutter. Neste caso, $M(\mathcal{C}_J) = \mathcal{J}$ é a matriz das T -junções.

Um subconjunto E de S diz-se uma *cobertura* do clutter $\mathcal{C} = (S, \mathcal{F})$ se intersesta todos os elementos de $\mathcal{F}$, isto é,

$$\forall F \in \mathcal{F}, E \cap F \neq \emptyset.$$

Em particular, o conjunto S é sempre uma cobertura do clutter. Uma cobertura $E \subseteq S$ é *minimal* se não contém nenhuma outra cobertura. Dito por outras palavras, quando E é minimal por inclusão com a propriedade de intersestar todos os elementos de $\mathcal{F}$.

Além disso, se $E_1, E_2 \subseteq S$ são duas coberturas minimais diferentes, $E_1 \not\subseteq E_2$ e $E_2 \not\subseteq E_1$, pelo que concluímos que a família das coberturas minimais forma uma família de Sperner de S . Ao denotar por $\mathcal{E}$ a família de coberturas minimais, chamamos ao clutter $\text{bl}(\mathcal{C}) := (S, \mathcal{E})$ o *bloqueador* de $\mathcal{C}$.

Exemplo 2.1.3

Dados $G = (V, E)$ um grafo, T um subconjunto dos vértices de G com cardinalidade par e $\mathcal{F}_C$ a família dos T -cortes minimais (por inclusão), pela Proposição 1.1.4, $\mathcal{C}_C = (E, \mathcal{F}_C)$ é o bloqueador do clutter das T -junções, isto é, $\mathcal{C}_C = \text{bl}(\mathcal{C}_J)$.

O próximo lema auxiliará na demonstração do Teorema 2.1.4.

Lema 2.1.1

Seja S um conjunto finito não vazio e sejam $\mathcal{H} = (S, \mathcal{F})$ e $\mathcal{K} = (S, \mathcal{E})$ dois clutters tais que:

1. Todo o elemento de $\mathcal{F}$ contém um elemento de $\mathcal{E}$;
2. Todo o elemento de $\mathcal{E}$ contém um elemento de $\mathcal{F}$.

Então $\mathcal{H} = \mathcal{K}$.

Demonstração. Dado $F \in \mathcal{F}$, existe $E \in \mathcal{E}$ tal que $E \subseteq F$. Por sua vez, existe $F' \in \mathcal{F}$ tal que $F' \subseteq E$, portanto $F' \subseteq E \subseteq F$. Como $\mathcal{F}$ é uma família de Sperner, segue que $F' = E = F$ e, portanto, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$. A outra inclusão decorre por simetria. $\square$

O próximo teorema é clássico e a sua demonstração tem uma natureza semelhante às demonstrações das Proposições 1.1.5, 1.1.4 e 1.1.6 do Capítulo 1.

Teorema 2.1.4: [7]

Seja $\mathcal{C} = (S, \mathcal{F})$ um clutter, então $\text{blbl}(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$.

Demonstração. Sejam $\text{bl}(\mathcal{C}) = (S, \mathcal{E})$ e $\text{blbl}(\mathcal{C}) = (S, \mathcal{F}')$. Se $\mathcal{F} = \{\emptyset\}$ ou $\mathcal{F}' = \{\emptyset\}$, temos $\mathcal{F} = \mathcal{E} = \mathcal{F}' = \{\emptyset\}$ e temos o pretendido.

Supondo que ambas contêm um elemento não vazio, vamos mostrar que $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$ utilizando o Lema 2.1.1. Dado $F \in \mathcal{F}$, por definição de bloqueador, $F \cap E \neq \emptyset$ para todo o $E \in \mathcal{E}$, portanto, F é uma cobertura de $\text{bl}(\mathcal{C})$ e necessariamente contém uma cobertura minimal $F' \in \mathcal{F}'$.

Dado agora $F' \in \mathcal{F}'$, suponha que F' não contém nenhum elemento de $\mathcal{F}$, então $S \setminus F'$ intersesta todos os elementos de $\mathcal{F}$ e, portanto, contém uma cobertura minimal de $\mathcal{C}$ que não intersesta F' , logo $F' \notin \mathcal{F}'$, uma contradição. Concluimos que F' necessariamente contém um elemento de $\mathcal{F}$. $\square$

2.2 O poliedro das coberturas

Seja $\mathcal{C} = (S, \mathcal{F})$ um clutter representado pela matriz $A = M(\mathcal{C})$. O poliedro

$$P(\mathcal{C}) := \{\mathbf{x} : A\mathbf{x} \geq \mathbf{1}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$$

é o *Poliedro das coberturas* de $\mathcal{C}$. No Capítulo 1, vimos o poliedro das coberturas dos clutters dos T -cortes e das T -junções. Um clutter $\mathcal{C}$ diz-se *ideal* quando o seu respetivo poliedro das coberturas $P(\mathcal{C})$ é inteiro, isto é, se seus pontos extremos são inteiros (ver Anexo B).

Lema 2.2.1

Sejam $\mathcal{C}$ um clutter, $A = M(\mathcal{C})$, $B = M(\text{bl } \mathcal{C})$ e $\mathbf{v}$ um ponto extremo de $P(\text{bl } \mathcal{C})$ que satisfaz $\mathbf{v} \geq \bar{\lambda} B$ para algum $\bar{\lambda} \geq 0$ tal que $\bar{\lambda} \mathbf{1} = 1$. Então $\mathbf{v}$ é uma linha de A .

Demonstração. Seja $B = M(\text{bl } \mathcal{C})$. Consideremos o conjunto convexo

$$S = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \geq \lambda A, \lambda \geq 0, \lambda \mathbf{1} = 1\}$$

Note que, para $\mathbf{x} \in S$, temos $\mathbf{x} \geq \lambda A \geq \mathbf{0}$ e, por definição de bloqueador, $BA^T \geq \mathbf{1}\mathbf{1}^T$, donde

$$B\mathbf{x}^T \geq BA^T \lambda^T \geq \mathbf{1}\mathbf{1}^T \lambda^T = \mathbf{1}.$$

Logo $S \subseteq P(\text{bl } \mathcal{C})$. Em particular, $\mathbf{v} \in S$ é necessariamente um dos seus pontos extremos pois, caso não fosse, seria uma combinação convexa de elementos de $P(\text{bl } \mathcal{C})$, o que contradiz a escolha de $\mathbf{v}$. Finalmente, S é o conjunto de todos os vetores maiores ou iguais a qualquer combinação convexa das linhas de A , assim os seus pontos extremos são necessariamente linhas de A , donde concluímos que $\mathbf{v}$ é uma linha de A . $\square$

Se $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^S$ é minimal (em cada componente) tal que $A\mathbf{x} \geq \mathbf{1}$ e $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ onde A é uma matriz de zeros e uns, então $\mathbf{x}$ terá componentes zeros e uns. De facto, qualquer entrada maior que 1 pode ser alterada para 1 diminuindo as componentes do vetor sem alterar a validade da desigualdade.

Sempre que $P(\mathcal{C})$ é ideal, os seus pontos extremos são vetores inteiros não negativos minimais (em cada componente) com a propriedade de $A\mathbf{x} \geq \mathbf{1}$, isto é, são coberturas de $\mathcal{C}$. Dito por outras palavras, os pontos extremos de $P(\mathcal{C})$ são as linhas de $M(\text{bl } \mathcal{C})$.

Teorema 2.2.1: [4, Teorema 1.15]

Um clutter $\mathcal{C}$ é ideal se e só se $\text{bl}(\mathcal{C})$ é ideal.

Demonstração. Suponha que $P(\mathcal{C})$ é ideal e sejam $B = M(\text{bl } \mathcal{C})$ e $\mathbf{v}$ um ponto extremo de $P(\text{bl } \mathcal{C})$. Para qualquer linha B_i de B tem-se $B_i \mathbf{v} \geq 1$; como as linhas B_i são pontos extremos de $P(\mathcal{C})$, existirá um ponto extremo $\mathbf{x} \in P(\mathcal{C})$ tal que $\mathbf{x}\mathbf{v} = 1$.

Pelo Teorema da Dualidade Forte da Programação Linear,

$$1 = \min\{\mathbf{x}\mathbf{v} : B\mathbf{x} \geq \mathbf{1}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\} = \max\{\lambda \mathbf{1} : \mathbf{v} \geq \lambda B, \lambda \geq \mathbf{0}\}$$

Então existe $\bar{\lambda} \geq 0$ com $\bar{\lambda} \mathbf{1} = 1$ tal que $\mathbf{v} \geq \bar{\lambda} B$ e o pretendido segue do Lema 2.2.1.

A equivalência é consequência do Teorema 2.1.4. $\square$

Podemos, então, revisitar o Teorema 1.2.4 que aqui recordamos sob a forma de um corolário do Teorema 2.2.1.

Corolário 2.2.1

Sejam G um grafo e T um subconjunto de vértices de G com cardinalidade par. O poliedro das coberturas das T -junções $P(\mathcal{C}_T)$ é inteiro e os seus pontos extremos são as linhas de $\mathcal{C} = M(\mathcal{C}_T)$.

2.3 A Conjetura de Seymour

Para um clutter $\mathcal{C} = (S, \mathcal{F})$ com matriz $A = M(\mathcal{C})$ e um vetor não negativo $\mathbf{w} \in \mathbb{Z}^S$, podemos construir o problema de otimização

$$\tau_{\mathbf{w}}(\mathcal{C}) = \min\{\mathbf{w}\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{1}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}, \quad (\text{P})$$

cujas região admissível é o poliedro das coberturas do clutter. O problema possui solução ótima inteira sempre que $\mathcal{C}$ é ideal. Mesmo que $\mathcal{C}$ seja ideal e (P) tenha solução ótima inteira, o seu dual

$$v_{\mathbf{w}}(\mathcal{C}) = \max\{\mathbf{y}\mathbf{1} : \mathbf{y}\mathbf{A} \leq \mathbf{w}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\} \quad (\text{D})$$

pode não ter solução ótima inteira, como mostra o Exemplo 2.3.1 a seguir.

Exemplo 2.3.1

O clutter $\mathcal{Q}_6 = (S, \mathcal{F})$ tem $S = \{1, 2, \dots, 6\}$ e

$$\mathcal{F} = \{\{1, 2, 4\}, \{1, 3, 5\}, \{2, 3, 6\}, \{4, 5, 6\}\}$$

é ideal [18]. Para $\mathbf{w} = \mathbf{1}$, temos o dual D ao lado cujo valor ótimo é 2 e sua solução ótima é $\hat{\mathbf{x}} = (1/2, 1/2, 1/2, 1/2)$, que não é um vetor de inteiros.

$$\begin{aligned} \max \quad & y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \\ \text{s.a.} \quad & y_1 + y_2 \leq 1 \\ & y_3 + y_4 \leq 1 \\ & y_1 + y_3 \leq 1 \\ & y_2 + y_4 \leq 1 \\ & y_2 + y_3 \leq 1 \\ & y_1 + y_4 \leq 1 \\ & y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0 \end{aligned}$$

No Capítulo 1, estudámos sob a forma (P) os clutters das T -junções e T -cortes de um grafo cujas matrizes são $\mathcal{C}$ e $\mathcal{J}$:

$$\tau_{\mathbf{w}}(\mathcal{C}) \equiv \min\{\mathbf{w}\mathbf{x} : \mathcal{C}\mathbf{x} \geq \mathbf{1}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\} \quad (P_{\mathcal{C}})$$

$$\tau_{\mathbf{w}}(\mathcal{J}) \equiv \min\{\mathbf{w}\mathbf{x} : \mathcal{J}\mathbf{x} \geq \mathbf{1}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}, \quad (P_{\mathcal{J}})$$

ambos com solução ótima inteira. Os duais destes problemas têm comportamentos interessantes.

Teorema 2.3.2: Lovász, 1987 [17]

O problema dual (P_C) ,

$$v_w(\mathcal{C}_C) \equiv \max\{\mathbf{y} \mathbf{1} : \mathbf{y} \mathcal{C} \leq \mathbf{w}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\} \quad (DP_C)$$

admite uma solução ótima $\hat{\mathbf{y}}$ tal que $2\hat{\mathbf{y}}$ é um vetor inteiro.

Dizemos que (DP_C) possui sempre solução $1/2$ -inteira.

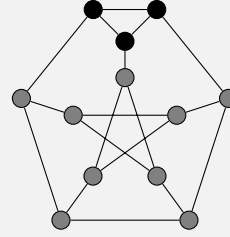
Entretanto, para o dual de (P_J) ,

$$v_w(\mathcal{C}_J) \equiv \max\{\mathbf{y} \mathbf{1} : \mathbf{y} \mathcal{J} \leq \mathbf{w}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\} \quad (DP_J)$$

Seymour mostrou, através de um contraexemplo [22, Contraexemplo 4.3], que pode não existir solução $1/2$ -inteira nem $1/3$ -inteira, identificando para este contraexemplo apenas uma solução $1/4$ -inteira.

Curiosidade

O contraexemplo apresentado por Seymour envolve um grafo de Petersen modificado, substituindo um dos vértices por um triângulo, onde cada aresta do vértice original se liga a um vértice do triângulo.



A conjectura original de Seymour vai mais adiante. Dizemos que um número racional r é 2-ádico se existem $a, k \in \mathbb{Z}$ tais que $r = a/2^k$. Um vetor é 2-ádico se todas as suas componentes são 2-ádicas.

Conjetura 2.3.1: (de Seymour) [22]

Seja $\mathcal{C} = (S, \mathcal{F})$ um clutter ideal, $A = M(\mathcal{C})$ e $\mathbf{w} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^S$. Então (D) possui solução ótima 2-ádica.

O Teorema 2.3.2 garante a validade da conjectura para o clutter dos T -cortes e em 2022, a conjectura foi confirmada também para o clutter das T -junções no artigo [2].

Teorema 2.3.3: Abdi, Cornuéjols, Palion (2022)[2]

O problema (DP_J) admite uma solução ótima $\hat{\mathbf{y}}$ que é 2-ádica.

Também em 2022, a tese de mestrado [12] apontou uma extensão da conjectura durante o estudo de digrafos. Num digrafo $G = (V, E)$, onde V é o conjunto de vértices e E é o conjunto de arcos, uma dijunção é um conjunto de arcos que, quando contraídos, resultam num digrafo fortemente conexo (para mais detalhes, ver o anexo A).

A família das dijunções minimais forma uma família de Sperner de E e o clutter das dijunções de um digrafo $\mathcal{C}_{Di} = (A, \mathcal{F}_D)$ é ideal [19]. Consideremos $A_D \equiv M(\mathcal{C}_{Di})$ a matriz das dijunções de um dado

digrafo e o seu respetivo problema de otimização:

$$\tau_{\mathbf{w}}(\mathcal{C}_{Di}) = \min\{\mathbf{w}\mathbf{x} : A_D\mathbf{x} \geq \mathbf{1}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}. \quad (2.1)$$

Dizemos que um número racional é $[p]$ -ádico se existem inteiros a, b tais que $r = a/b$ e a fatorização de b em primos possui apenas primos em $\{1, 2, \dots, p\}$. Note que um número é $[2]$ -ádico se e só se é 2-ádico. Daremos mais atenção à caracterização deste tipo de racional no Capítulo 3.

Teorema 2.3.4: [12, Teorema 2.13]

O dual de (2.1),

$$v_{\mathbf{w}}(\mathcal{C}_{Di}) = \max\{\mathbf{y}\mathbf{1} : \mathbf{y}\mathcal{D} \leq \mathbf{w}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\},$$

possui uma solução $[\tau_{\mathbf{w}}(\mathcal{C}_{Di})]$ -ádica.

Portanto, a Conjetura de Seymour 2.3.1 se verifica para o clutter das dijunções de um digrafo sempre que $\tau_{\mathbf{w}}(\mathcal{C}_D) = 2$ e dá espaço a uma reformulação da conjectura para os casos restantes.

Conjetura 2.3.2: (de Seymour, modificada) [1]

Seja $\mathcal{C} = (S, \mathcal{F})$ um clutter ideal, $A = M(\mathcal{C})$ e $\mathbf{w} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^S$. Então (D) possui solução ótima $[\tau_{\mathbf{w}}(\mathcal{C})]$ -ádica.

O Exemplo 2.3.1 em particular se encaixa nas duas conjecturas pois possui 2 como valor ótimo.

Capítulo 3

Programação linear sobre d -ádicos

No final do Capítulo 1 e no Capítulo 2 estudámos problemas de otimização linear que admitiam soluções ótimas racionais cujos denominadores tinham fatores primos bem definidos, nomeadamente, racionais $[p]$ -ádicos e 2-ádicos. Este capítulo tratará de estudar uma generalização destes problemas

$$\sup\{\mathbf{w}\mathbf{x} : A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \text{ é } d\text{-ádico}\}$$

Embora não tratemos diretamente dos algoritmos, veremos que estes problemas são computacionalmente tratáveis, isto é, podem ser resolvidos em tempo polinomial.

Este capítulo é completamente baseado no artigo [1] com a diferença de que não exigiremos que d seja primo, mostrando as respectivas extensões dos resultados do artigo para essa generalização.

O capítulo começará por apresentar os d -ádicos para caracterizar a existência de soluções d -ádicas para sistemas de equações lineares. Com os sistemas de igualdades estudado, passaremos para sistemas de desigualdades e finalmente para otimização sobre d -ádicos. Aqui, caracterizar o problema significa mostrar que são tão computacionalmente tratáveis quanto o seu problema sem a restrição d -ádica.

Ao longo do capítulo assumiremos que as matrizes são inteiras por conveniência, mas é simples verificar que os resultados podem ser facilmente generalizados para matrizes racionais visto que, se $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$, existe $a \in \mathbb{Z}$ tal que $aA \in \mathbb{Z}^{m \times n}$. Diremos que um problema é *fácil* se pode ser resolvido computacionalmente em tempo polinomial.

3.1 Os d -ádicos e sistemas de equações lineares

Dado um inteiro $d \geq 2$, dizemos que um racional r é $1/d$ -inteiro se existir $a \in \mathbb{Z}$ tal que $r \equiv a/d$; e dizemos que r é d -ádico se existem $a, k \in \mathbb{Z}$ tais que $r \equiv a/d^k$, ou seja, se for $1/d^k$ -inteiro para algum $k \in \mathbb{Z}$.

Assumimos que os fatores primos de d são conhecidos, bem como sua fatorização em potências de primos.

Exemplo 3.1.1

Os racionais 5 , $1/2$ e $5/12$ são 6 -ádicos pois: $5 = 5/6^0$; $1/2 = 3/6^1$; $5/12 = 15/6^2$.

Denotaremos o conjunto dos d -ádicos por $\mathcal{A}_d$. Alertamos que na literatura de Teoria dos Números existe outro significado para números p -ádicos [10] que não coincide com o estudado no presente trabalho.

Teorema 3.1.2

Um racional $r \equiv a/b$, com $a, b \in \mathbb{Z}$, é d -ádico se e somente se $b/\text{mdc}(a, b)$ possui, na sua decomposição em fatores primos, apenas primos que dividem d .

Demonstração. Suponhamos sem perda de generalidade que $\text{mdc}(a, b) = 1$ e seja $d = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ a decomposição de d em potências de primos distintos.

Se r é d -ádico, $r \equiv a'/d^k$ para $a', k \in \mathbb{Z}$ e

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{d^k} \Rightarrow ad^k = a'b$$

Como $\text{mdc}(a, b) = 1$, b só pode ter primos que dividem d^k (e, portanto, que dividem d) na sua fatorização.

Reciprocamente, suponha que $b/\text{mdc}(a, b) = b$ contém apenas fatores primos de d , isto é,

$$b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_\ell^{\beta_\ell},$$

onde $\beta_i \geq 0$. Como $\alpha_i \geq 1$, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $k\alpha_i \geq \beta_i$ para todo $1 \leq i \leq \ell$, assim

$$r = \frac{a}{p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_\ell^{\beta_\ell}} = \frac{ap_1^{k\alpha_1 - \beta_1} \dots p_\ell^{k\alpha_\ell - \beta_\ell}}{p_1^{k\alpha_1} \dots p_\ell^{k\alpha_\ell}} = \frac{a'}{d^k},$$

o que conclui a demonstração. □

Pelo Teorema 3.1.2, dado um racional qualquer, decidir se ele é d -ádico envolve calcular um mdc e decidir se um número pode ser fatorizado como potências de primos conhecidos, que pode ser feito pelo algoritmo de Euclides (que é computacionalmente eficiente).

Exemplo 3.1.3

$1/5$ não é 6-ádico nem 14-ádico, mas é 5-ádico e 10-ádico.

Pode-se verificar que $\mathcal{A}_d$ contém zero, é fechado para as operações de soma, subtração e para o produto (mas não para divisão).

Recordamos que no Teorema 2.3.4 do Capítulo 2 definimos números $[p]$ -ádicos como racionais $r \equiv a/b$ em que $b/\text{mdc}(a,b)$ é produto de primos menores do que ou iguais a p . O Teorema 3.1.2 mostra que um número é $[p]$ -ádico se e somente se for d -ádico para $d = p_1 p_2 \dots p_k$, onde $p_1, p_2, \dots, p_k$ são os primos menores do que ou iguais a p .

Teorema 3.1.4

O conjunto dos d -ádicos é denso nos reais.

Demonstração. Vejamos que todo real é ponto de acumulação de $\mathcal{A}_d$. Seja $x \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$ qualquer. Como $d \geq 2$, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $1/d^k < \varepsilon$. Para k com essa propriedade, o d -ádico $\frac{\lfloor xd^k \rfloor}{d^k}$ satisfaz

$$\left| x - \frac{\lfloor xd^k \rfloor}{d^k} \right| = \left| \frac{xd^k - \lfloor xd^k \rfloor}{d^k} \right| \leq \left| \frac{1}{d^k} \right| < \varepsilon$$

O que conclui o pretendido. □

Um vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ diz-se d -ádico (resp., $1/d$ -inteiro) se todas as suas componentes forem d -ádicas (resp., $1/d$ -inteiras). Denotamos o conjunto dos vetores d -ádicos em $\mathbb{R}^n$ por $\mathcal{A}_d^n$. Uma consequência direta do Teorema 3.1.4 é que $\mathcal{A}_p^n$ é denso em $\mathbb{R}^n$.

Uma matriz $U \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ diz-se *unimodular* se $\det(U) = \pm 1$.

Lema 3.1.1

Sejam $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^m$ e uma matriz unimodular $U \in \mathbb{Z}^{n \times n}$. O sistema de equações $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ possui solução d -ádica (resp., $1/d$ -inteira) se e somente se o sistema $(AU)\mathbf{x} = \mathbf{b}$ possui solução d -ádica (resp., $1/d$ -inteira).

Demonstração. Suponha que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ possui uma solução $1/d$ -inteira $\hat{\mathbf{x}}$. Como U é unimodular, $U^{-1} \in \mathbb{Z}^{n \times n}$, então $\hat{\mathbf{y}} = U^{-1}\hat{\mathbf{x}}$ é ainda $1/d$ -inteira e é solução de $AU\mathbf{y} = \mathbf{b}$. Como U^{-1} é também unimodular, a equivalência segue por simetria.

Se $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ possui uma solução d -ádica, possui solução $1/d^k$ -inteira para algum k e o resultado segue do caso anterior. $\square$

A *forma normal de Hermite* [21] de uma matriz $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ com característica m é a matriz $H = [B \ \mathbf{0}]$ com as seguintes propriedades:

- B é não singular, triangular inferior, não negativa e o maior elemento de cada linha se encontra na sua diagonal;
- Existe $U \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ unimodular tal que $AU = H$.

Exemplo 3.1.5

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_U = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_H$$

A forma normal de Hermite existe e é única para qualquer matriz $m \times n$ com característica m [21, Corolário 4.2a]. Além disso, pode ser encontrada computacionalmente em tempo polinomial [13].

Teorema 3.1.6

Sejam $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ com característica m , $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^n$ e $H = [B \ \mathbf{0}]$ a forma normal de Hermite de A . O sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ possui solução d -ádica (resp., $1/d$ -inteira) se e somente se $B^{-1}\mathbf{b}$ é d -ádico (resp., $1/d$ -inteiro).

Demonstração. Seja U unimodular tal que $AU = H$. Se $B^{-1}\mathbf{b}$ é $1/d$ -inteiro, então $\begin{bmatrix} B^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$ é uma solução $1/d$ -inteira de $H\mathbf{x} = \mathbf{b}$ e o resultado segue do Lema 3.1.1.

Por outro lado, se $\hat{\mathbf{x}}$ é uma solução $1/d$ -inteira de $H\mathbf{x} = \mathbf{b}$, consideremos a partição $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 \\ \hat{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix}$, segue

$$H\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{b} \Leftrightarrow [B \ \mathbf{0}] \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 \\ \hat{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{b} \Leftrightarrow B\hat{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{b} \Leftrightarrow \hat{\mathbf{x}}_1 = B^{-1}\mathbf{b},$$

logo $B^{-1}\mathbf{b}$ é $1/d$ -inteiro.

Para o caso da solução d -ádica, existe uma solução $1/d^k$ -inteira para algum k e o resultado segue do caso anterior. $\square$

Exemplo 3.1.7

Temos o seguinte sistema " $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ " do Exemplo 3.1.5

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e o vetor } B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1/2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Os denominadores das componentes de $B^{-1}b$ são apenas 1 e 2, logo, pelo Teorema 3.1.6, o sistema admite solução d -ádica apenas para d par, em particular, soluções 2-ádicas.

Observação 3.1.8

Dado $d = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ a decomposição de d em primos distintos e $d' = p_1 p_2 \dots p_k$ o produto dos primos que dividem d , o Teorema 3.1.2 mostra que um número é d -ádico se e somente se for d' -ádico.

Sempre que for conveniente podemos assumir, sem perda de generalidade, que d é livre de quadrados, ou seja, é produto de primos distintos.

Dado d livre de quadrados, com divisores primos $p_1, p_2, \dots, p_k$ e um vetor $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^k$, denotamos

$$d^\alpha \equiv p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$$

Para uma matriz $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ com $m \leq n$, seu *Máximo Divisor Comum*, denotado $\text{mdc}(A)$, é o máximo divisor comum de todos os menores $m \times m$ de A .

Lema 3.1.2

Seja $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ com característica m e $H = [B \ \mathbf{0}]$ a forma normal de Hermite de A . Então $\text{mdc}(A) = |\det(B)|$.

Demonstração. Seja U unimodular tal que $AU = H$. Para cada submatriz H' $m \times m$, existe uma submatriz U' $n \times m$ de U tal que $AU' = H'$.

Pela fórmula de Cauchy–Binet [16],

$$\det(H') = \det(AU') = \sum_{I \subset \{1, \dots, n\}, |I|=m} \det(A_I) \det(U'_I),$$

onde U'_I denota a submatriz $m \times m$ de U' com linhas indexadas por I .

Logo, cada $\det(H')$ é combinação linear inteira dos menores $m \times m$ de A . Portanto, $\text{mdc}(A) \mid \det(H')$. Em particular, tomando $H' = B$, obtemos $\text{mdc}(A) \mid \det(B)$.

Por outro lado, como U é unimodular, também existe $U^{-1} \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ tal que $A = HU^{-1}$. Aplicando o mesmo argumento, cada menor $m \times m$ de A é combinação linear inteira dos menores $m \times m$ de H .

Mas o único menor não nulo de $H = [B \ 0]$ é B , logo $\det(B) \mid \text{mdc}(A)$. Concluimos que $\text{mdc}(A) = |\det(B)|$. $\square$

Proposição 3.1.1

Sejam $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ de característica m , $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^n$ e d livre de quadrados tais que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ possui solução d -ádica e seja $\hat{\alpha} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^k$ um vetor minimizante de

$$\min\{\alpha_1 + \dots + \alpha_k : A\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ tem solução } 1/d^\alpha\text{-ádica}, \alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^k\}$$

Então $d^{\hat{\alpha}}$ divide $\text{mdc}(A)$.

Demonstração. Por hipótese, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ possui pelo menos uma solução, logo o minimizante $\hat{\alpha}$ existe. Se $\hat{\alpha} = \mathbf{0}$, é imediato. Caso contrário, seja $AU = [B \ \mathbf{0}]$ a Forma Normal de Hermite de A .

Quando $\hat{\alpha} = 0$, $d_i^{\hat{\alpha}_i} = 1$ divide $\det(B)$. Seja $i \in \{1, \dots, k\}$ tal que $\hat{\alpha}_i > 0$ e consideremos $\hat{\alpha}(i) = (\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_i - 1, \dots, \hat{\alpha}_k)$. Pelo Teorema 3.1.6 e pela minimalidade de $\hat{\alpha}$, $\hat{\mathbf{y}} = B^{-1}\mathbf{b}$ é $1/d^{\hat{\alpha}}$ -inteiro mas não é $1/d^{\hat{\alpha}(i)}$ inteiro. Utilizando a regra de Cramer, existe um índice $j \in \{1, \dots, m\}$ tal que

$$d^{\hat{\alpha}} \hat{y}_j = \frac{d^{\hat{\alpha}} q_j}{\det(B)} \equiv N \in \mathbb{Z}, \quad \frac{d^{\hat{\alpha}}}{p_i} \hat{y}_j = \frac{d^{\hat{\alpha}(i)} q_j}{\det(B)} = \frac{N}{p_i} \notin \mathbb{Z}$$

Portanto, $N \det(B) = d^{\hat{\alpha}} q_j$ e p_i não é divisor de N . Como p_i é primo, é divisor de $\det(B)$. Mais, como $p_i^{\hat{\alpha}_i}$ é divisor de $N \det(B)$, concluímos que $p_i^{\hat{\alpha}_i}$ é divisor de $\det(B)$. Ao repetir a mesma análise para todos os índices, concluímos que $d^{\hat{\alpha}}$ divide $|\det(B)| = \text{mdc}(A)$ pelo Lema 3.1.2. $\square$

Exemplo 3.1.9

Do Exemplo 3.1.5,

$$\text{mdc} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \right) = \left| \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 2$$

Se $d^\alpha = p_1^{\alpha_1} \dots p_\ell^{\alpha_\ell}$ divide 2, segue que $d^\alpha = 2^{\alpha_1}$ onde $\alpha_1 \in \{0, 1\}$, logo, pela Proposição 3.1.1 as soluções racionais de um sistema com essa matriz são inteiras ou $1/2$ -inteiras.

3.2 Sistemas de desigualdade e poliedros

Nosso objetivo final é estudar o comportamento de problemas de otimização linear cuja região admissível serão os pontos d -ádicos de um poliedro.

Um conjunto não vazio $P \subseteq \mathbb{R}^m$ diz-se um poliedro se existem $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ tais que

$$P = \{\mathbf{x} : A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\} \quad (3.1)$$

Um poliedro pode ser geometricamente interpretado como a interseção de semi-espacos. Diremos que o poliedro P é definido por matrizes inteiras quando existem $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ e $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^n$ que satisfazem (3.1).

O invólucro afim de $S \subseteq \mathbb{R}^n$, denotado $\text{aff}(S)$, é o menor espaço afim, por inclusão, que contém S . Como um espaço afim é um subespaço linear trasladado, podemos escrever

$$\text{aff}(S) = \{\mathbf{z} + D\mathbf{y} : \mathbf{y} \in \mathbb{R}^\ell\}, \quad (3.2)$$

para alguma matriz $D \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$ e $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ (consultar [20, Capítulo 1] para mais detalhes), onde a escolha de $\mathbf{z}$ é independente de D , isto é, se $\mathbf{z}, \mathbf{w} \in \text{aff}(S)$,

$$\{\mathbf{z} + D\mathbf{y} : \mathbf{y} \in \mathbb{R}^\ell\} = \{\mathbf{w} + D\mathbf{y} : \mathbf{y} \in \mathbb{R}^\ell\}.$$

Diremos que $\text{aff}(S)$ é *racional* se existe D com entradas racionais (ou inteiras sem perda de generalidade) que satisfaz (3.2).

Para a demonstração do próximo resultado precisamos da noção de interior relativo [20]. Para $S \subseteq \mathbb{R}^n$, seu *interior relativo* é o conjunto

$$\text{ir}(S) = \{\mathbf{x} \in S : B_\infty(\mathbf{x}, \varepsilon) \cap \text{aff}(S) \subseteq S, \text{ para algum } \varepsilon > 0\},$$

onde B_∞ denota a bola na norma $\|\cdot\|_\infty$. Equivalentemente, $\text{ir}(S)$ é o interior de S sobre o subespaço topológico $\text{aff}(S)$.

O interior relativo de um conjunto convexo é sempre não vazio [20, Teorema 6.2]. Como um poliedro P é interseção de semi-espacos (que são convexos), $\text{ir}(P)$ é sempre não vazio.

Denotamos a *norma do máximo* para matrizes por $\|\cdot\|_M$ dada por

$$\|A\|_M \equiv \max_{i,j} |a_{ij}|$$

e por $\|\cdot\|_\infty$ à norma matricial induzida pela norma vetorial infinita. Notemos que $\|A\|_\infty \leq n\|A\|_M$, onde n é o número de colunas de A .

Teorema 3.2.1

Seja $S \subseteq \mathbb{R}^n$ convexo tal que $\text{aff}(S)$ é racional. Então

$$S \cap \mathcal{A}_d^n \neq \emptyset \text{ se e somente se } \text{aff}(S) \cap \mathcal{A}_d^n \neq \emptyset$$

Demonstração. Como $S \subseteq \text{aff}(S)$, a primeira implicação é imediata.

Suponhamos que existe $\mathbf{z} \in \text{aff}(S) \cap \mathcal{A}_d^n$. Como $\text{aff}(S)$ é racional, existe uma matriz de inteiros $D \in \mathbb{Z}^{n \times \ell}$ tal que $\text{aff}(S) = \{\mathbf{z} + D\mathbf{y} : \mathbf{y} \in \mathbb{R}^\ell\}$.

Sejam $\mathbf{a} \in \text{ir}(S)$ e $\varepsilon > 0$ tais que $B_\infty(\mathbf{x}, \varepsilon) \cap \text{aff}(S) \subseteq S$ e seja $\hat{\mathbf{y}}$ tal que $\mathbf{a} = \mathbf{z} + D\hat{\mathbf{y}}$.

Escolhemos $k \in \mathbb{Z}$ de modo que

$$\frac{1}{d^k} < \frac{\varepsilon}{n\|D\|_M}$$

para construir o vetor d -ádico $\mathbf{w}$ com componentes $w_i = \frac{\lfloor \hat{y}_i d^r \rfloor}{d^r}$. Para cada $i \in [m]$ temos

$$|\hat{y}_i - w_i| = \left| \hat{y}_i - \frac{\lfloor \hat{y}_i d^r \rfloor}{d^r} \right| = \left| \frac{d^r \hat{y}_i - \lfloor \hat{y}_i d^r \rfloor}{d^r} \right| \leq \frac{1}{d^r} < \frac{\varepsilon}{n\|D\|_M}$$

Como D é inteira, o vetor $\mathbf{u} \equiv \mathbf{z} + D\mathbf{w} \in \text{aff}(S)$ é d -ádico e satisfaz

$$\|\mathbf{a} - \mathbf{u}\|_\infty = \|D\mathbf{w} - D\hat{\mathbf{y}}\|_\infty \leq \|D\|_\infty \|\mathbf{w} - \hat{\mathbf{y}}\|_\infty < \varepsilon,$$

logo $\mathbf{u} \in B_\infty(\mathbf{a}, \varepsilon) \cap \text{aff}(S) \subseteq S$. □

Embora a demonstração do Teorema 3.2.1 possa ser feita sem recorrer a normas diferentes, a norma do máximo será útil no restante deste capítulo, bem como sua relação com a norma induzida $\|\cdot\|_\infty$.

A demonstração do Teorema 3.2.1 se resume a escolher um ponto do interior relativo de S e mostrar que sempre existe um d -ádico ε -próximo desse ponto que ainda pertence a S . Em outras palavras, mostramos que, sob as condições do teorema, os d -ádicos são densos no interior relativo de S .

Corolário 3.2.1

Seja $S \subseteq \mathbb{R}^n$ convexo tal que $\text{aff}(S)$ é racional. Se $S \cap \mathcal{A}_d^n \neq \emptyset$, então o fecho topológico $\overline{S \cap \mathcal{A}_d^n}$ coincide com fecho topológico $\bar{S}$.

Demonstração. Como S é convexo, por [20, Teorema 6.3], $\overline{\text{ir}(S)} = \bar{S}$. Pela demonstração do Teorema 3.2.1 $\text{ir}(S) \subseteq \overline{\text{ir}(S) \cap \mathcal{A}_d^n} \subseteq \bar{S}$, o que conclui o pretendido. □

Nosso interesse no espaço afim de um poliedro é justificado pelo próximo teorema.

Teorema 3.2.2: [21, Secção 8.2]

Seja $P = \{\mathbf{x} : A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$ um poliedro. Então existem submatrizes por linhas A^- e $\mathbf{b}^-$ de A e $\mathbf{b}$ tais que

$$\text{aff}(P) = \{\mathbf{x} : A^-\mathbf{x} = \mathbf{b}^-\} = \mathbf{z} + N(A^-)$$

onde $\mathbf{z}$ é tal que $A^-\mathbf{z} = \mathbf{b}^-$ e $N(A^-) = \{\mathbf{x} : A^-\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$.

Quando o poliedro P é definido por matrizes inteiras, $\text{aff}(P) = \mathbf{z} + N(A^-)$ e, por Eliminação de Gauss, pode-se verificar que $N(A^-)$ possui uma base de vetores de racionais que pode ser escalonada a uma base de vetores de inteiros. Logo, os elementos de $\text{aff}(P)$ são da forma $\mathbf{z} + D\mathbf{y}$ com D inteira e cujas colunas são base de $N(A^-)$, donde $\text{aff}(P)$ é racional.

Além disso, encontrar as submatrizes A^- e $\mathbf{b}^-$ pode ser feito em tempo polinomial (ver anexo B) e, portanto, encontrar $\text{aff}(P)$ é fácil.

Combinando os Teoremas 3.2.2 e 3.2.1, vemos que procurar um vetor d -ádico no poliedro é equivalente a encontrar uma solução d -ádica para um sistema de equações lineares. Podemos determinar se $P \cap \mathcal{A}_d^n \neq \emptyset$ com os passos:

1. Descobrir submatrizes A^- e $\mathbf{b}^-$ tais que $\text{aff}(P) = \{\mathbf{x} : A^-\mathbf{x} = \mathbf{b}^-\}$;
2. Encontrar $H = [B \ \mathbf{0}]$, a Forma Normal de Hermite de A^- ;
3. Determinar se $B^{-1}\mathbf{b}^-$ é um vetor d -ádico.

Observação 3.2.3

A submatriz A^- não tem necessariamente característica completa por linhas, mas como o objetivo é resolver $A^-\mathbf{x} = \mathbf{b}^-$, podemos remover linhas linearmente dependentes da matriz aumentada $[A^- \ \mathbf{b}^-]$ até só sobraarem apenas linhas linearmente independentes.

3.3 Majorando denominadores de d -ádicos

Sempre que um sistema de desigualdades $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ possui solução d -ádica $\hat{\mathbf{x}}$, é imediato da definição que $\hat{\mathbf{x}}$ é $1/d^k$ -inteiro para algum k . Uma pergunta natural que surge em [1], para d primo, e que expandimos aqui para d qualquer, é

Qual o menor k tal que $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ possui solução $1/d^k$ -inteira?

Nesse sentido vamos fornecer um majorante para k que depende apenas da matriz A como extensão de [1, Teorema 4.3]. A demonstração do Teorema 3.2.1 segue a sequência de passos:

1. Escolhemos um d -ádico $\mathbf{z}$ no invólucro afim e uma matriz de inteiros D tal que $\text{aff}(P) = \{\mathbf{z} + D\mathbf{y} : \mathbf{y} \in \mathbb{R}^\ell\}$;
2. Escolhemos um ponto $\mathbf{a}$ no interior relativo e uma bola no interior relativo de S centrada em $\mathbf{a}$;
3. Construímos um vetor d -ádico $\mathbf{u}$ dentro da bola com base em $\mathbf{a}$;

Nosso objetivo será majorar os denominadores de cada um destes passos de modo a obter um vetor d -ádico final com um majorante para o denominador. Para uma matriz quadrada Q $m \times m$, a Desigualdade de Hadamard [11] diz que

$$|\det(Q)| \leq \prod_{i=1}^m \|\mathbf{q}_i\|_2 \leq (\sqrt{m} \|Q\|_M)^m,$$

onde $\mathbf{q}_i$ são as colunas de Q e $\|\cdot\|_2$ é a norma euclidiana.

Lema 3.3.1

Seja $S = \{\mathbf{x} : A\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$ em que A tem característica r . Então existe $D \in \mathbb{Z}^{n \times (n-r)}$ tal que

$$N(A) = \{D\mathbf{y} : \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n-r}\}, \quad \|D\|_M \leq (\sqrt{r} \|A\|_M)^r$$

Demonstração. Seja A' uma submatriz $r \times n$ de A com característica completa por linhas, de modo que $N(A) = \{\mathbf{x} : A'\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$. Denote-se a j -ésima coluna de A' por $\mathbf{a}_j$. Pela desigualdade de Hadamard, para todo subconjunto de índices $B \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ com r elementos, a submatriz por colunas A'_B satisfaz

$$|\det(A'_B)| \leq \prod_{j \in B} \|\mathbf{a}_j\|_2 \leq (\sqrt{r} \|A'_B\|_M)^r \quad (3.3)$$

Sem perda de generalidade, suponha que para $B = \{1, 2, \dots, r\}$, A'_B é invertível. As outras $\mathbf{a}_j$ colunas de A' podem ser escritas de modo único como combinação linear das colunas de A'_B , isto é, existem únicos $\mathbf{x}_j$ tais que $A'_B \mathbf{x}_j = \mathbf{a}_j$ para $j = r+1, r+2, \dots, n$. Ao denotar por X a matriz cujas colunas são os vetores $\mathbf{x}_j$, note que as colunas de

$$D = \det(A'_B) \begin{bmatrix} X \\ -I \end{bmatrix}$$

formam uma base de $N(A')$ e, como consequência da regra de Cramer, é de inteira e seus elementos são majorados, em módulo, por determinantes de menores $r \times r$ de A' . Em particular, como A' é uma submatriz de A , segue por (3.3) que $\|D\|_M \leq (\sqrt{r} \|A\|_M)^r$ $\square$

Lema 3.3.2

Seja $S = \{\mathbf{x} : A\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$ tal que $S \cap \mathcal{A}_d^n \neq \emptyset$. Se K é o menor inteiro não negativo tal que S tem um vetor $1/d^K$ -inteiro, então

$$p_1^K \leq (\sqrt{n}\|A\|_M)^n, \quad (3.4)$$

onde p_1 denota o menor divisor primo de d .

Demonstração. Sejam A' $r \times n$ uma submatriz de A com linhas linearmente independentes, $\mathbf{b}'$ seu respectivo vetor de modo que $S = \{\mathbf{x} : A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'\}$ e A'' uma submatriz não singular quadrada de A' . Pela Desigualdade de Hadamard

$$\text{mdc}(A') \leq |\det(A'')| \leq (\sqrt{n}\|A''\|_M)^n \leq (\sqrt{n}\|A\|_M)^n \quad (3.5)$$

pois A'' é também uma submatriz de A .

Seja $d = p_1^{\beta_1} \dots p_\ell^{\beta_\ell}$ a fatorização de d em potências de primos distintos e $d' = p_1 \dots p_\ell$. Pela Proposição 3.1.1, existe $\hat{\alpha} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^\ell$ tal que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ possui uma solução $1/d'^{\hat{\alpha}}$ -inteira com $s = \hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 + \dots + \hat{\alpha}_\ell$ mínimo que será também $1/p^s$ -inteira, pois, para qualquer $c \in \mathbb{Z}$,

$$\frac{c}{d'^{\hat{\alpha}}} \equiv \frac{c}{p_1^{\hat{\alpha}_1} \dots p_\ell^{\hat{\alpha}_\ell}} = \frac{c \cdot p_1^{\beta_1 s - \hat{\alpha}_1} \dots p_\ell^{\beta_\ell s - \hat{\alpha}_\ell}}{p_1^{\beta_1 s} \dots p_\ell^{\beta_\ell s}} \equiv \frac{c'}{d^s},$$

pois $\alpha_i \leq \beta_i s$. Por definição de K , $K \leq s$ e $p_1^K \leq p_1^s \leq d^s \leq \text{mdc}(A')$ e o pretendido segue de (3.5). □

Lema 3.3.3

Seja $P = \{\mathbf{x} : A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$ tal que $P \cap \mathcal{A}_d^n \neq \emptyset$. Dados $\mathbf{a} \in \text{ir}(P)$ e $\varepsilon > 0$ tal que $B_\infty(\mathbf{a}, \varepsilon) \cap \text{aff}(P) \subseteq P$, existe um vetor $1/d^k$ -ádico em P para todo k satisfazendo

$$p_1^k > \frac{n(\sqrt{n}\|A\|_M)^n}{\varepsilon}, \quad (3.6)$$

onde p_1 denota o menor divisor primo de d .

Demonstração. Temos que $\text{aff}(P) \cap \mathcal{A}_d^n \neq \emptyset$ e, pelo Teorema 3.2.2, podemos tomar as submatrizes de A e $\mathbf{b}$, A^- e $\mathbf{b}^-$, tais que $\text{aff}(P) = \{\mathbf{x} : A^-\mathbf{x} = \mathbf{b}^-\}$. Notemos que $\|A^-\|_M \leq \|A\|_M$.

Pelo Lema 3.3.2, existe um $\mathbf{z}$ $1/d^K$ -ádico para algum K mínimo satisfazendo $p_1^K \leq (\sqrt{n}\|A\|_M)^n$.

Pelo Lema 3.3.1 e pelo Teorema 3.2.2, $\text{aff}(P) = \{\mathbf{z} + D\mathbf{y} : \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n-r}\}$ onde D tem entradas inteiras e $\|D\|_M \leq (\sqrt{n}\|A\|_M)^n$.

Sejam $\hat{\mathbf{y}}$ tal que $\mathbf{a} = \mathbf{z} + D\hat{\mathbf{y}}$ e k satisfazendo (3.6). Consideremos o vetor $1/d^k$ -inteiro $\mathbf{s} = \mathbf{z} + D\hat{\mathbf{w}}$ onde $w_i = \frac{\lfloor d^k \hat{y}_i \rfloor}{d^k}$. Por minimalidade de K , temos que $K \leq k$, caso contrário poderíamos escolher $\mathbf{s}$ ao invés de $\mathbf{z}$. Como D é inteira, $\mathbf{s}$ é $1/p^k$ inteiro e ainda

$$|y_i - w_i| = \left| \hat{y}_i - \frac{\lfloor d^k \hat{y}_i \rfloor}{p^k} \right| \leq \frac{1}{d^k} \leq \frac{1}{p_1^k} < \frac{\varepsilon}{n(\sqrt{n}\|A\|_M)^n}$$

Temos que

$$\|\mathbf{a} - \mathbf{s}\|_\infty \leq \|D\|_\infty \|\hat{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{w}}\|_\infty \leq n\|D\|_M \|\hat{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{w}}\|_\infty < \varepsilon$$

Logo $\mathbf{s}$ é um ponto d -ádico do poliedro que satisfaz o pretendido. $\square$

Por fim, vamos garantir que o termo $1/\varepsilon$ que aparece no Lema 3.3.3 é pequeno. Da demonstração do Teorema 3.2.1, procuramos pelo raio máximo da bola no interior relativo de P .

Lema 3.3.4

Dado $P = \{\mathbf{x} : A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$ não vazio, existe $\mathbf{a} \in \text{ir}(P)$ e $\varepsilon > 0$ satisfazendo

$$\frac{1}{\varepsilon} < (n\|A\|_M)(\sqrt{n+1}\|A\|_M)^{n+1} \quad (3.7)$$

tal que $B_\infty(\mathbf{a}, \varepsilon) \cap \text{aff}(P) \subseteq P$.

Demonstração. Denote-se por $A^-\mathbf{x} \leq \mathbf{b}^-$ o subsistema do sistema de desigualdades $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ que contém as desigualdades que são satisfeitas como igualdade em todo $\mathbf{x} \in P$ (O subsistema que define $\text{aff}(P)$), e denote-se por $A_R\mathbf{x} \leq \mathbf{b}_R$ o subsistema constituído pelas restantes desigualdades. Se $R = \emptyset$ então $P = \text{aff}(P)$, pelo que o resultado desejado é imediatamente verdadeiro. Suponhamos que $R \neq \emptyset$ e consideremos o problema linear

$$\max\{t : A^-\mathbf{x} = \mathbf{b}^-, A_R\mathbf{x} + t\mathbf{1}_R \leq \mathbf{b}_R\} \quad (3.8)$$

que é admissível porque P é não vazio. Além disso, por definição de R , existe $\hat{\mathbf{x}} \in P$ tal que $A_R\hat{\mathbf{x}} < \mathbf{b}_R$. Por isso, existe em (3.8) uma solução admissível $(\mathbf{a}, t)$ com $t > 0$.

Se (3.8) é ilimitado então, em particular, existe $(\mathbf{a}, \hat{t})$, admissível tal que

$$1/\hat{t} \leq \left(\sqrt{n+1} \|A\|_M \right)^{n+1}.$$

Se (3.8) tem valor ótimo (finito) $\hat{t} > 0$ então tem solução básica admissível $(\mathbf{a}, \hat{t})$ que é solução ótima. Portanto, existe $I' \subseteq I^-$ dos índices das igualdades e existe $R' \subseteq R$ tal que $(\mathbf{a}, \hat{t})$ é a única solução do

sistema de $n + 1$ equações lineares

$$\begin{bmatrix} A_{I'} & \mathbf{0}_{I'} \\ A_{R'} & \mathbf{1}_{R'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{I'} \\ \mathbf{b}_{R'} \end{bmatrix}$$

Pela Regra de Cramer e usando o facto de que $A, \mathbf{b}$ são matrizes de inteiros,

$$1/\hat{t} = \frac{\det \begin{bmatrix} A_{I'} & \mathbf{0}_{I'} \\ A_{R'} & \mathbf{1}_{R'} \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} A_{I'} & \mathbf{b}_{I'} \\ A_{R'} & \mathbf{b}_{R'} \end{bmatrix}} \leq \left(\sqrt{n+1} \|A\|_M \right)^{n+1}$$

pois, pela Desigualdade de Hadamard,

$$\left| \det \begin{bmatrix} A_{I'} & \mathbf{0}_{I'} \\ A_{R'} & \mathbf{1}_{R'} \end{bmatrix} \right| \leq \left(\sqrt{n+1} \|A\|_M \right)^n \sqrt{n+1} \leq \left(\sqrt{n+1} \|A\|_M \right)^{n+1}.$$

Em ambos os casos, $\mathbf{a} \in \text{ir}(S)$ porque para todo $\mathbf{y}$ suficientemente próximo de $\mathbf{a}$ tal que $A^-\mathbf{y} = \mathbf{b}^-$ ainda se tem $A_R\mathbf{y} < \mathbf{b}_R$, pelo que $\mathbf{y} \in S$.

Seguidamente, provamos que, $B(\mathbf{a}, \varepsilon) \cap \text{aff}(S) \subseteq S$ para $\varepsilon \equiv \hat{t}/n\|A_R\|_M$. De facto, se $A^-\mathbf{y} = \mathbf{b}^-$ e $\|\mathbf{y} - \mathbf{a}\|_\infty \leq \varepsilon$ então, em particular, $|\mathbf{y} - \mathbf{a}| \leq \varepsilon \mathbf{1}$, onde o módulo $|\cdot|$ é aplicado em cada componente. Assim

$$A_R(\mathbf{y} - \mathbf{a}) \leq \|A_R\| |\mathbf{y} - \mathbf{a}| \leq \|A_R\|_M \mathbf{1}^\top \varepsilon \mathbf{1} \leq \hat{t} \mathbf{1}$$

de onde decorre que $A_R\mathbf{y} \leq \mathbf{b}_R$ e, portanto, $\mathbf{y} \in S$. Finalmente

$$1/\varepsilon \equiv n\|A_R\|_M/\hat{t} \leq (n\|A\|_M) \left(\sqrt{n+1} \|A\|_M \right)^{n+1},$$

donde segue o resultado. □

Teorema 3.3.1

Seja $P = \{\mathbf{x} : A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$ tal que $P \cap \mathcal{A}_d^n \neq \emptyset$. Se K é o menor inteiro tal que P tem um vetor $1/p^K$ -inteiro, então

$$p_1^K \leq (n^2\|A\|_M)(\|A\|_M\sqrt{n+1})^{2n+1} \quad (3.9)$$

onde p_1 denota o menor divisor primo de d .

Demonstração. Pelo Lema 3.3.4, existe $\mathbf{a} \in \text{ir}(S)$ e existe ε , menor ou igual a 1, sem perda de generalidade, satisfazendo

$$0 < 1/\varepsilon \leq \left(\sqrt{n+1} \|A\|_M \right)^{n+1} (n\|A\|_M). \quad (3.10)$$

tal que $B(\mathbf{a}, \varepsilon) \cap \text{aff}(S) \subseteq S$. Pelo Lema 3.3.3, existe em S um vetor $1/p^k$ -inteiro, para todo o inteiro não negativo k satisfazendo

$$p_1^k > n(\sqrt{n} \|A\|_\infty)^n / \varepsilon. \quad (3.11)$$

Em particular, para todo k tal que $p_1^k > (n^2 \|A\|_M)(\sqrt{n+1} \|A\|_\infty)^{2n+1} \|A\|_\infty$ tem-se

$$\begin{aligned} p_1^k &> (n^2 \|A\|_M)(\sqrt{n+1} \|A\|_\infty)^{2n+1} \\ &\geq n(\sqrt{n} \|A\|_M)^n \left(\sqrt{n+1} \|A\|_\infty \right)^{n+1} (n \|A\|_M) \\ &\geq n(\sqrt{n} \|A\|_M)^n / \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, (3.9) decorre da definição de K . □

3.4 Otimização linear sobre d -ádicos

Por fim, vamos justificar que um problema de otimização linear sobre os d -ádicos pode ser resolvido em tempo polinomial.

Fixado $\mathbf{w} \in \mathbb{Z}^n$, estudaremos o problema de otimização

$$v_d \equiv \sup\{\mathbf{w}\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \in \mathcal{A}_d\} \quad (3.12)$$

que é admissível sempre que sua região admissível $P \cap \mathcal{A}_d^n$ é não vazia, onde P é o poliedro subjacente. A partir daqui, assumiremos que (3.12) é admissível.

Notemos que um poliedro é uma interseção finita de conjuntos fechados e convexos e portanto é fechado e convexo. Pelo Corolário 3.2.1, $\overline{P \cap \mathcal{A}_d^n} = P$, donde, para quaisquer $\varepsilon > 0$ e $\mathbf{x} \in P$, existe $\hat{\mathbf{x}} \in P \cap \mathcal{A}_d^n$ tal que $|\mathbf{w}\mathbf{x} - \mathbf{w}\hat{\mathbf{x}}| < \varepsilon$. Disso, encontrar o valor ótimo de (3.12) é equivalente a encontrar o valor ótimo de sua relaxação aos reais

$$v \equiv \sup\{\mathbf{w}\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}, \quad (3.13)$$

isto é, $v_d = v$. Determinar se v é finito e descobrir seu valor ótimo é computacionalmente fácil e clássico na programação linear [13],[14].

Uma vez conhecido v_d , existe solução ótima $\mathbf{x} \in \mathcal{A}_d^n \cap P$ se e somente se existem vetores d -ádicos na face ótima $F = \{\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{w}\mathbf{x} = v\}$. A face ótima é também um poliedro pois

$$F = \{\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{w}\mathbf{x} = v\} = \{\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{w}\mathbf{x} \leq v, -\mathbf{w}\mathbf{x} \leq -v\} \quad (3.14)$$

Existe um subsistema de desigualdades $A_F \mathbf{x} \leq \mathbf{b}_F$ de (3.14) (que, recordamos, pode ser encontrado em tempo polinomial [B](#)) tal que

$$\text{aff}(F) = \{\mathbf{x} : A_F \mathbf{x} = \mathbf{b}_F\}$$

Uma vez que $\text{aff}(F) \cap \mathcal{A}_d^n \neq \emptyset$, podemos :

1. Encontrar $\text{aff}(F)$ e um vetor de d -ádicos $\mathbf{z} \in \text{aff}(P_N) \cap \mathcal{A}_d^n$ através da Forma Normal de Hermite de A_F ;
2. Encontrar $\mathbf{a} \in \text{ir}(F)$ e $\tilde{\varepsilon} > 0$ tais que $B_\infty(\mathbf{a}, \tilde{\varepsilon}) \cap \text{aff}(F) \subseteq F$;
3. Utilizar a demonstração do Teorema [3.2.1](#) para construir um d -ádico de F .

Caso não exista solução ótima, ainda como consequência do Corolário [3.2.1](#), existe uma solução ε -ótima para todo $\varepsilon > 0$, isto é, uma solução d -ádica $\hat{\mathbf{x}} \in P$ tal que $|\mathbf{w}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{v}| < \varepsilon$. Vejamos que uma solução ε -ótima ainda pode ser obtida em tempo polinomial.

Seja $\varepsilon > 0$ fixo, e $N \in \mathbb{N}$ tal que $1/N < \varepsilon$. Como (3.12) é um problema de maximização, para todo $\mathbf{x} \in P$, temos $\mathbf{w}\mathbf{x} \leq \mathbf{v}$, donde podemos considerar o poliedro definido por matrizes inteiras

$$P_N = \{\mathbf{x} : A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, -N\mathbf{w}\mathbf{x} \leq 1 - N\mathbf{v}\}.$$

Notemos que se $\mathbf{x} \in P_N$, temos que $\mathbf{x} \in P$ e ainda $\mathbf{v} - \mathbf{w}\mathbf{x} \leq 1/N < \varepsilon$. Novamente, podemos encontrar um $\hat{\mathbf{x}} \in P_N \cap \mathcal{A}_d^n$ através dos mesmos passos utilizados anteriormente, mas com o poliedro P_N .

Exemplo 3.4.1

O problema

$$\max \quad 2x_1 + 3x_2 + 2x_3$$

$$\begin{aligned} s.a : \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 && \leq 1, \\ & x_1 + 5x_2 + x_3 && \leq 1, \\ & 3x_1 + 9x_2 + 3x_3 && \leq 1, \\ & x_1, x_2, x_3 && \geq 0. \end{aligned}$$

tem valor ótimo $2/3$ e o espaço afim da face

ótima é $3x_1 + 9x_2 + 3x_3 = 1$, donde

$A_F = [3 \ 9 \ 3]$, a forma normal de Hermite é

$H = [3 \ 0 \ 0]$ e existirá uma solução ótima 3-

ádica. Uma delas será $\hat{\mathbf{x}} = (0, 0, 1/3)$.

Concluimos que (3.12) pode ser resolvido em tempo polinomial, o que nos leva ao nosso último teorema e ao fim da discussão sobre os d -ádicos.

Corolário 3.4.1

Sejam $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^m$ e $\mathbf{w} \in \mathbb{Z}^n$. Se existe solução ótima d -ádica para

$$\sup\{\mathbf{w}\mathbf{x} : A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \in \mathcal{A}_d\}, \quad (3.15)$$

então existe uma solução ótima $1/d^k$ -inteira para k que satisfaz

$$p_1^k \leq (n^2 \theta)(\theta \sqrt{n+1})^{2n+1}$$

onde $\theta = \max\{\|A\|_M, \|\mathbf{w}\|_\infty\}$ e p_1 denota o menor primo que divide d .

Demonstração. Pelo que foi discutido anteriormente, (3.15) têm solução ótima d -ádica se e somente se a face ótima, definida por (3.14), possui um d -ádico. O resultado segue do Teorema 3.3.1. $\square$

Capítulo 4

Conclusões e Trabalho Futuro

Nesta dissertação estabeleceu-se uma ligação rigorosa entre a otimização combinatória clássica, a teoria poliédrica de *clutters* ideais e a programação linear sob os d -ádicos, partindo de problemas fundamentais em grafos até alcançar questões em aberto, como a Conjetura de Seymour.

4.1 Síntese do trabalho desenvolvido

No Capítulo 1, analisámos a estrutura de T -junções e T -cortes em grafos. Através do Teorema de Edmonds e Johnson, mostrámos que os poliedros de cobertura associados possuem pontos extremos de inteiros, permitindo modelar o problema do Carteiro Chinês e a busca por junções de peso mínimo como programas lineares tratáveis.

No Capítulo 2, estendemos a abstração para a teoria de *clutters*. Demonstrámos que as matrizes binárias originadas por T -junções e dijunções são ideais, o que garante a integralidade dos pontos extremos dos seus poliedros de cobertura. Este fundamento permitiu abordar a Conjetura de Seymour e a sua variante modificada, evidenciando os comportamentos fracionários peculiares, nomeadamente os 2-ádicos e $[p]$ -ádicos.

4.2 Contribuições principais

A principal contribuição desta dissertação (Capítulo 3) consiste na generalização da programação linear diádica e p -ádica [1] para uma base d genérica, não necessariamente prima.

Ao prescindir da exigência de primalidade, provámos que os resultados de tratabilidade se mantêm para vetores d -ádicos. Caracterizámos a existência de soluções d -ádicas em sistemas de equações e desigualdades e demonstrámos que a otimização linear sobre o conjunto de vetores d -ádicos permanece computacionalmente tratável, sendo resolúvel em tempo polinomial.

4.3 Perspetivas de trabalho futuro

Tanto a conjectura principal de Seymour como sua versão enfraquecida permanecem abertas. Como continuidade desta investigação, propomos o estudo analítico do suporte de soluções ótimas para o caso d -ádico geral.

A literatura atual estudou a majoração da cardinalidade do suporte ao cenário diádico [1]. O objetivo futuro é formular e provar um limite superior polinomial para o tamanho do suporte quando d é um número composto, investigando o impacto da sua decomposição em múltiplos fatores primos.

Bibliografia

- [1] Abdi, A., Cornuéjols, G., Guenin, B., and Tunçel, L. (2025). Dyadic linear programming and extensions: A. abdi et al. *Mathematical Programming*, 213(1):473–516.
- [2] Abdi, A., Cornuéjols, G., and Palion, Z. (2022). On dyadic fractional packings of t-joins. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 36(3):2445–2451.
- [3] Cook, W. J., Cunningham, W. H., Pulleyblank, W. R., and Schrijver, A. (1998). *Combinatorial optimization*. Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization. John Wiley & Sons, Inc., New York. A Wiley-Interscience Publication.
- [4] Cornuéjols, G. (2001). *Combinatorial optimization*, volume 74 of *CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA. Packing and covering.
- [5] Cornuéjols, G. and Guenin, B. (2002). Ideal clutters. volume 123, pages 303–338. Workshop on Discrete Optimization, DO’99 (Piscataway, NJ).
- [6] Diestel, R. ([2025] ©2025). *Graph theory*, volume 173 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, Berlin, sixth edition.
- [7] Edmonds, J. and Fulkerson, D. R. (1970). Bottleneck extrema. *Journal of Combinatorial Theory*, 8(3):299–306.
- [8] Edmonds, J. and Johnson, E. L. (1973). Matching, Euler tours and the Chinese postman. *Math. Programming*, 5:88–124.
- [9] Engel, K. (1997). *Sperner theory*, volume 65 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [10] Gouvêa, F. Q. (2020). The p-adic numbers. In *p-adic Numbers: An Introduction*, pages 53–71. Springer.
- [11] Hadamard, J. (1893). Résolution d’une question relative aux déterminants. *Bull. des sciences math.*, 2:240–246.
- [12] Hwang, S. M. (2022). The edmonds-giles conjecture and its relaxations. Master of mathematics thesis, University of Waterloo, Waterloo, Ontario, Canada.
- [13] Kannan, R. and Bachem, A. (1979). Polynomial algorithms for computing the smith and hermite normal forms of an integer matrix. *siam Journal on Computing*, 8(4):499–507.
- [14] Karmarkar, N. (1984). A new polynomial-time algorithm for linear programming. In *Proceedings of the sixteenth annual ACM symposium on Theory of computing*, pages 302–311.

- [15] Khachiyan, L. (1980). Polynomial algorithms in linear programming. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 20(1):53–72.
- [16] Konstantopoulos, T. (2013). A multilinear algebra proof of the cauchy–binet formula and a multilinear version of parseval’s identity. *Linear Algebra and its Applications*, 439(9):2651–2658.
- [17] Lovász, L. (1987). Matching structure and the matching lattice. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 43(2):187–222.
- [18] Lovász, L. (2006). Minimax theorems for hypergraphs. In *Hypergraph Seminar: Ohio State University 1972*, pages 111–126. Springer.
- [19] Lucchesi, C. L. and Younger, D. H. (1978). A minimax theorem for directed graphs. *Journal of the London Mathematical Society*, 2(3):369–374.
- [20] Rockafellar, R. T. (1997). *Convex analysis*. Princeton Landmarks in Mathematics. Princeton University Press, Princeton, NJ. Reprint of the 1970 original, Princeton Paperbacks.
- [21] Schrijver, A. (2011). *Theory of linear and integer programming*. Wiley-Interscience series in discrete mathematics and optimization. Wiley, Chichester. Copyright 1986; 1. publ. as pbk. 1998; Repr. january 1999, april 2000.
- [22] Seymour, P. D. (1979). On multi-colourings of cubic graphs, and conjectures of fulkerson and tutte. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 3(3):423–460.

Anexo A

Dijunções e dicortes

Aqui apresentaremos as definições de digrafo, dicorte e dijunções bem como suas principais propriedades. As demonstrações adicionadas correspondem não só às mais elegantes, mas também as que mais se distanciam das demonstrações já presentes no Capítulo 1. Para uma leitura mais aprofundada sobre grafos e digrafos, recomendamos [6].

A.1 Definição e propriedades

Um digrafo $G = (V, A)$ é essencialmente um grafo em que os elementos de A , chamadas arcos, são arestas orientadas com um vértice de início e fim. Todo digrafo tem um grafo subjacente $G' = (V, E)$ onde as arestas são os arcos de G desconsiderando-se sua orientação.

Dado $\emptyset \neq U \subsetneq V$, o seu *corte de saída* $\delta^+(U)$ é conjunto de arcos que saem de U , isto é

$$\delta^+(U) := \{(u, v) \in A : u \in U \text{ e } v \in V \setminus U\}$$

Analogamente define-se o *corte de entrada* $\delta^-(U)$ como sendo o conjunto de arcos que entram em U

$$\delta^-(U) := \{(u, v) \in A : u \in V \setminus U \text{ e } v \in U\}$$

Exemplo A.1.1

Para $U = \{1, 2\}$, $\delta^+(U) = \{14, 13\}$, $\delta^-(U) = \{32\}$.



É imediato da definição que $\delta^+(U) = \delta^-(V \setminus U)$

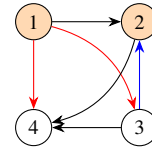
O corte, induzido por U , denotado por $\delta(U)$, é a união dos cortes de entrada e saída

$$\delta(U) := \delta^+(U) \cup \delta^-(U)$$

E pode ser identificado como o corte realizado no grafo subjacente ao dígrafo.

Exemplo A.1.2

O corte induzido por $U = \{1, 2\}$ será
 $\delta(U) = \delta^+(U) \cup \delta^-(U) = \{14, 13, 32\}$



Um corte $\delta(U)$ é um *dicorte* se $\delta(U) = \delta^+(U)$ ou $\delta(U) = \delta^-(U)$. No exemplo A.1.2, $U = \{1\}$ produz um dicorte pois $\delta(\{1\}) = \delta^+(\{1\}) = \{14, 13, 12\}$, bem como $U = \{4\}$ pois $\delta(\{4\}) = \delta^-(\{4\}) = \{14, 24, 34\}$.

Alternativamente dizemos que $\delta^+(U)$ é um dicorte se $\delta^-(U)$ for vazio.

Proposição A.1.1

Um dígrafo conexo $G = (V, A)$ é fortemente conexo se e somente se não possui dicortes.

Solução. Suponha que $\delta(U) = \delta^+(U)$ é um dicorte, então não existe caminho entre vértices de $V \setminus U$ e U e G não é fortemente conexo.

Por outro lado, se G não possui dicortes, então para todo $U \subset V$ temos $\delta^+(U) \neq \emptyset$. Fixado $v \in V$, denotemos por C_v o conjunto dos vértices $u \in V$ tal que existe um dicaminho de v para u .

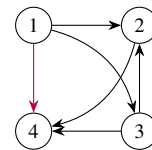
Como G é conexo, se $C_v \neq \emptyset$ temos $\delta(C_v) \neq \emptyset$, logo existe um arco $(a, b) \in \delta^+(C_v)$. Como existe um dicaminho de u para a , através desse arco existe um dicaminho de u para b , o que é uma contradição pois $b \notin C_v$. Concluímos que $C_v = V$ $\square$

Definição A.1.1: Dijunção

Uma dijunção é um subconjunto de arcos que intersesta todo o dicorte.

Exemplo A.1.3

O arco 14 intersesta todos os dicortes.



Dado um conjunto de arcos L , podemos construir o dígrafo $G/L = (V_L, A_L)$ com todas os arcos de L contraídos. Nesse caso, os vértices de G/L são da forma $(v_1 v_2 \dots v_k)$, correspondendo os vértices de G que foram unidos. Dois vértices de D fazem parte do mesmo vértice contraído em G/J se e somente se existe um arco em L que liga ambos (em qualquer sentido).

Proposição A.1.2

Seja $G = (V, A)$ um dígrafo. Então $J \subseteq A$ é uma dijunção se e somente se G/J é fortemente conexo.

Demonstração. Seja J uma dijunção. Fixado um vértice v em G/J , denotemos por C_v o conjunto de vértices $u \in V_J$ tais que existe um dicaminho de v para u em G/J e seja $\tilde{C}_v \subseteq V$ o correspondente subconjunto de vértices em G , isto é, os vértices em C_v sem a contração. Nesse caso $a \in \tilde{C}_v$ se e somente se a faz parte de um vértice contraído u em C_v .

Precisamos mostrar que existe um caminho direcionado entre quaisquer dois vértices no dígrafo $G/J = (V_J, A_J)$ obtido após a contração dos arcos de J .

Suponhamos que $C_v \neq V_J$, então $\tilde{C}_v \neq V$ e podemos considerar o corte $\delta(\tilde{C}_v)$ em D . Sendo G conexo, $\delta(\tilde{C}_v) \neq \emptyset$ e por definição de dijunção temos $J \cap \delta(C_v) \neq \emptyset$, donde existe um arco $(a, b) \in J \cap \delta(C_v)$. Assumindo sem perda de generalidade que $a \in \tilde{C}_v$ e $b \in V \setminus \tilde{C}_v$.

Como $a \in \tilde{C}_v$, trata-se de um vértice que faz parte de um vértice contraído $u \in C_v$. Como $(a, b) \in J$, é um arco contraído em G/J , logo a e b fazem parte do mesmo vértice $u \in C_v$ e portanto $b \in \tilde{C}_v$, uma contradição. Concluimos que $C_v = V_J$.

Por outro lado suponhamos que G/J é fortemente conexo e seja $\delta(U) = \delta^+(U)$ um dicorte. Se $J \cap \delta(U) = \emptyset$, após a contração dos arcos $\delta(U_J)$ continua a ser um dicorte, contradizendo que G/J é fortemente conexo. $\square$

Exemplo A.1.4

O conjunto singular $S = \{14\}$ é uma dijunção.



Anexo B

Noções elementares de poliedros e programação linear

Uma boa referência para mais detalhes além do anexo é o livro [21].

Seja $P \subseteq \mathbb{R}^n$ um poliedro. Um subconjunto não vazio $F \subseteq P$ diz-se uma *face* de P se existe um vetor $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ tal que $F = \{\mathbf{x} \in P : \mathbf{w}\mathbf{x} = \delta\}$, onde $\delta \equiv \max_{\mathbf{y} \in P} \mathbf{w}\mathbf{y}$.

Um ponto $\mathbf{x} \in P$ diz-se um *ponto extremo* (ou vértice) de P se não pode ser escrito como combinação convexa não trivial de dois pontos distintos de P , isto é, se de

$$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{y} + (1 - \lambda) \mathbf{z}, \quad \mathbf{y}, \mathbf{z} \in P, \lambda \in (0, 1)$$

segue que $\mathbf{x} = \mathbf{y} = \mathbf{z}$. Os pontos extremos correspondem às faces de dimensão zero e desempenham um papel central na otimização linear, uma vez que qualquer solução ótima de um problema de programação linear pode ser tomada num ponto extremo de P .

Um problema de otimização linear pode ser resolvido em tempo polinomial por [15], [13] ou [14], sendo o primeiro conhecido como método do elipsoide e historicamente o primeiro algoritmo funcional.

B.1 O invólucro afim do Poliedro

Seja $P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$, com $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Pretendemos obter uma submatriz A' de A e o correspondente subvetor $\mathbf{b}'$ tais que

$$\text{aff}(P) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'\}.$$

Para cada linha $A_i\mathbf{x} \leq b_i$ de $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$, considere o programa linear

$$\max\{A_i\mathbf{x} : \mathbf{x} \in P\}. \quad (\text{B.1})$$

Como $P \subseteq \{\mathbf{x} : A_i\mathbf{x} \leq b_i\}$, o valor ótimo é no máximo b_i . Além disso, $A_i\mathbf{x} = b_i$ para todo $\mathbf{x} \in P$ se e somente se o valor ótimo do problema

$$\min\{A_i\mathbf{x} : \mathbf{x} \in P\} \quad (\text{B.2})$$

e de B.1 são ambos iguais a b_i . Neste caso, a restrição é satisfeita com igualdade por todos os pontos de P e, portanto, define uma equação válida para $\text{aff}(P)$.

Repetindo este procedimento para todas as m restrições, obtém-se o conjunto de índices

$$I = \{i : A_i\mathbf{x} = b_i \text{ para todo } \mathbf{x} \in P\}.$$

Se A' é a submatriz de A formada pelas linhas indexadas por I e $\mathbf{b}'$ o correspondente subvetor de $\mathbf{b}$, então

$$\text{aff}(P) = \{\mathbf{x} : A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'\}.$$

De facto, toda a restrição em $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ é satisfeita por todos os pontos de P , logo $\text{aff}(P) \subseteq \{\mathbf{x} : A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'\}$. Reciprocamente, qualquer restrição válida para todos os pontos de P é combinação linear das equações obtidas, pelo que o conjunto de soluções de $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ coincide com o menor subespaço afim que contém P .

Como são resolvidos apenas $2m$ programas lineares e cada um deles pode ser encontrados em tempo polinomial, a matriz A' e o vetor $\mathbf{b}'$ podem ser computados em tempo polinomial.

B.2 Um ponto no interior relativo de um poliedro

Pela secção anterior, é possível determinar em tempo polinomial uma representação do invólucro afim de P ,

$$\text{aff}(P) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'\}.$$

Considere então o problema de otimização linear

$$\max \{r : A_i \mathbf{x} + r \leq b_i \ (i \notin I), \ A' \mathbf{x} = \mathbf{b}', \ r \geq 0\}.$$

onde I é o conjunto dos índices das restrições que definem $\text{aff}(P)$.

Se o valor ótimo satisfaz $r^* > 0$, então para toda a restrição $i \notin I$ tem-se

$$A_i \mathbf{x}^* < b_i,$$

pelo que $\mathbf{x}^* \in \text{ir}(P)$. Além disso, r^* define o raio pretendido.

Como o problema acima é um problema de otimização linear com dimensão polinomial na descrição de P , segue da existência de algoritmos polinomiais para programação linear que um ponto $\mathbf{x}^* \in \text{ir}(P)$ e um raio $r^* > 0$ podem ser computados em tempo polinomial.