O Problema do Escalonamento de Enfermeiros

Isabel Cardoso dos Santos *

15 de Março de 2006

*Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade de Coimbra

Conteúdo

1 Introdução

Nas unidades hospitalares que trabalham 24 horas por dia, torna-se necessário produzir, repetidamente, escalas de serviço para as suas equipas de enfermagem. Este problema é designado na literatura "*Nurse Rostering Problem*"ou "*Nurse Schedulling Problem*". Periodicamente, um plano de trabalho - um **roster** - é elaborado pelo Enfermeiro-Chefe de cada unidade. Esta é uma tarefa muito difícil e que consome muito tempo a quem a executa.

Actualmente, nas unidades do Hospital Pediátrico do Centro Hospitalar de Coimbra são elaboradas escalas de serviço de 28 dias, pelos Enfermeiros-Chefes. O objectivo principal deste escalonamento é a rentabilização de recursos humanos, dia a dia, de forma a manter o serviço em perfeito funcionamento. As escalas são apresentadas, mensalmente, cerca de duas semanas antes de começar um novo mês. A dificuldade de elaboração destas escalas assenta no facto de esta ter obedecer a várias restrições, tais como: quantidade de cuidados a prestar, exigências legais e diferenciação dos enfermeiros face às necessidades previstas.

No âmbito deste problema, surgiu a oportunidade de realização de um estágio pelo Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra, na Unidade de Cirurgia/Queimados do Hospital Pediátrico de Coimbra. Este estágio denomina-se "Elaboração de Horários de Enfermeiros", realiza-se de 22 de Setembro de 2005 a 15 de Março de 2006 e tem como objectivo o desenvolvimento de um trabalho que ajude a fazer o escalonamento da equipa de enfermagem de 27 elementos da Unidade de Cirurgia do referido hospital.

O presente relatório apresenta um resumo do trabalho desenvolvido ao longo deste estágio. É apresentada uma secção onde é descrito o problema, seguida de uma outra, que explica como o problema é resolvido actualmente. Foram ainda incorporadas neste relatório duas outras secções, uma que descreve uma primeira análise do problema efectuada, e uma outra que resume a bibliografia pesquisada. Este relatório é finalizado com uma última secção respeitante à modelação matemática do problema. Esta subdivide-se em duas subsecções. A primeira descreve um primeiro modelo matemático que resolve uma istância mais simples do problema e a segunda contém o modelo matemático construído para modelar todo o problema.

2 Descrição do Problema

A Unidade de Cirurgia/Queimados do Hospital Pediátrico do Centro Hospitalar de Coimbra funciona 24 horas por dia. O trabalho da equipa de enfermagem é organizado, diariamente, em três turnos de 8 horas cada - dia, tarde e noite. O serviço dessa unidade é assegurado por um grupo de 26 enfermeiros.

Mensalmente, o Enfermeiro-Chefe desta unidade tem de apresentar escalas onde, para cada dia desse período de 28 dias é atribuído, a cada enfermeiro, um certo tipo de turno de trabalho ou um certo tipo de folga. O principal objectivo que leva este agente de decisão a fazer este escalonamento é a divisão dos recursos humanos de forma a respeitar uma certa qualidade de serviço consistente ao longo do tempo.

Na elaboração mensal dos horários, Enfermeiro-Chefe é confrontado com uma vasta gama de decisões alternativas. Aqui reside a dificuldade desta sua tarefa, isto é, decidir a melhor atribuição de turno para cada período do dia, a cada elemento da sua equipa, de forma a satisfazer todas as restrições. Todos os meses, cada enfermeiro é, então informado do seu horário para um plano de 28 dias. Este horário é composto segundo sequências de turnos (um turno por dia), e dias de folga. Cada um desses turnos é assegurado por um e um só enfermeiro e há um número mínimo de enfermeiros necessários em cada turno, que assegura o perfeito funcionamento desta unidade. O conjunto dos planos de trabalho de todos os enfermeiros, isto é, um roster tem de obedecer a variadas regras, conforme foi explicitado na introdução.

Esta equipa de enfermagem está dividida em três níveis de integração no serviço. Esta divisão tem, em parte, a ver com o número de anos em que cada pessoa está ao serviço, isto é, quanto maior for esse número, maior será o nível de integração.

Nas escalas de serviço, mensalmente elaboradas, os 27 elementos desta equipa de enfermagem são divididos naquilo a que poderemos chamar de duas sub-equipas. Uma delas só faz turnos de manhã, não trabalha aos fins-de-semana e é constituída apenas por enfermeiros do primeiro nível de integração. A outra repete, sequencialmente e ao longo de toda a semana, os seus turnos de cinco em cinco, ou de seis em seis dias. A esta repetição de turnos dá-se o nome de roullment. Os elementos desta segunda sub-equipa agrupam-se em grupos de três (um enfermeiro de cada nível). A escolha dos elementos de cada um destes grupos só se considera o facto de ter de estar um dos enfermeiros mais graduados em cada grupo. Além disso, o Enfermeiro-Chefe, pretende a elaboração de uma escala que não tenha em conta quem faz o quê (isto é, onde não são mencionados nomes), onde as pessoas são apenas distinguidas pelo seu grau de integração no serviço. O agente de decisão pode recorrer a um enfermeiro extra, não especificado, quando não for possível manter a qualidade de serviço num dado dia.

Tal como foi anteriormente referido, cada escala é elaborada para um período de 4 semanas (28 dias). Este período começa sempre a uma segunda-feira e termina sempre a um domingo. Cada dia está, como sabemos, particionado em três turnos de serviço que começam e terminem sempre a horas fixas, a saber:

- Turno da manhã: das 8h às 16h
- Turno da tarde: das 16h às 0h
- Turno da noite: das 0h às 8h.

Em período normal de funcionamento, os horários são elaborados de forma a que os turnos se repitam de 6 em 6 dias, isto é, a equipa está sob um regime de roullment de 6 dias. Em período de férias ou em situação de baixa prolongada, como há menos pessoas ao serviço, há que haver um reajustamento dos recursos humanos disponíveis, logo os enfermeiros repetem os seus turnos de 5 em 5 dias, isto é, a equipa está sob um regime de roullment de 5 dias. Geralmente, aplica-se o serviço o roullment de 5 dias na chamada época alta, isto é, de 15 de Junho a 15 de Setembro (há um maior número de enfermeiros de férias). No entanto, este pode ser aplicado noutras alturas do ano, quando for necessário reforçar a equipa. Tal situação acontece, por exemplo, quando um elemento põe um atestado e o Enfermeiro-Chefe já sabe, previamente que essa pessoa irá faltar naquele período. Para aplicar o roullment de 6 dias, tem de haver pessoas suficientes para formar seis grupos de três elementos cada. Para aplicar o roullment de 5 dias, têm de haver, pelo menos, 15 pessoas que possam ser divididas em cinco grupos, cada um com três elementos.

Todos os enfermeiros, devem gozar de dois tipos de descanso semanalmente, o Descanso Semanal (**DS**) e o descanso complementar (**DC**). Há que distingui-los pois, se um enfermeiro, por alguma razão específica, tem de trabalhar num dia em que seria suposto estar a gozar um descanso semanal, tem o direito de receber o equivalente a trabalho extraordinário e ainda gozar esse dia no mês seguinte (esse dia será designado como Compensação Atrasada (**CT**), e será um dia em que o enfermeiro estará a descansar, mas que conta como se este estivesse ao serviço). Se tem de trabalhar num dia de Descanso Complementar, então só recebe o pagamento pelas horas que trabalhou de acordo com o estipulado para o trabalho extraordinário. No entanto, pode decidir não receber por este trabalho extra, e optar por gozá-lo noutra altura (isto é, conta como Compensação Atrasada).

Neste serviço é fundamental fazer um escalonamento adequado de toda a equipa, pois as necessidades do serviço não são iguais ao longo de um mesmo dia. Exige-se, assim, um diferente número de colaboradores consoante o turno que estamos a considerar. Temos, então,

Manhã:

- segunda-feira e terça-feira estão o Enfermeiro-Chefe e mais seis enfermeiros
- quarta-feira até sexta-feira estão o Enfermeiro-Chefe e mais sete enfermeiros
- fins de semana e feriados, estão cinco enfermeiros

(Note-se que o Enfermeiro-Chefe também tem direito aos seus descansos semanais, logo, num dia em que este não está presente, deve ser outro dos enfermeiros que só fazem manhãs a substituí-lo.)

Tarde:

- durante a semana estão quatro enfermeiros
- Fins de semana e feriados, estão três enfermeiros

Noite:

- estão sempre três enfermeiros, independentemente do dia da semana.

Tanto no turno da tarde como no turno da noite, deve estar pelo menos um enfermeiro de cada nível de integração.

É importante referir que este é o número mínimo de pessoas que asseguram o perfeito funcionamento do serviço. Na elaboração de cada escala este número é sempre respeitado, uma vez que se pretende a optimização de recursos humanos. Além disso, no final de cada turno não fica trabalho por fazer, isto é, cada enfermeiro faz tudo o que é necessário no seu turno de trabalho, não deixando trabalho para o turno seguinte.

Uma restrição muito importante é o facto de, no final de cada mês, isto é, ao fim de 28 dias, todas as pessoas terem de ter feito um total de 17 turnos de oito horas de trabalho cada (quer sejam de manhã, tarde ou noite). Portanto, os enfermeiros podem gozar ainda de um outro tipo de descanso para além dos anteriormente referidos, ao qual se dá o nome de Compensação (C). O Enfermeiro-Chefe ao distribuir compensações pelo horário está a assegurar que cada pessoa só efectua 17 turnos nesse horário.

Notemos ainda que um feriado conta como dia efectivo de trabalho, isto é, todos os elementos têm direito a gozar o feriado. No entanto, como o serviço não pode deixar de funcionar, os enfermeiros que tem de estar presentes no hospital no dia feriado, gozarão esse dia no mês seguinte.

É de notar, ainda, que todos os enfermeiros têm direito a gozar pelo menos um fim-de-semana por mês (sábado e domingo seguidos). Por isso, na elaboração de um horário, o Enfermeiro-Chefe tenta, ao máximo, respeitar este direito, mas não é uma obrigatoriedade. De facto, quando está em vigor o roullment de 5 dias, torna-se muito difícil todos os enfermeiros serem abrangidos por esta situação.

Definidas as restrições relativas a tipos de turnos e número mínimo de enfermeiros necessário em cada um desses tipos, vejamos agora como são divididas as pessoas por "equipas".

Quando está em vigor o regime de roullment de 6 dias, da sub-equipa composta apenas por enfermeiros de primeiro nível de integração, fazem parte o Enfermeiro-Chefe e outras 6 pessoas. Ao fim de 28 dias, cada uma dessas pessoas terá de ter feito, 17 turnos de manhã. Há apenas uma dessas pessoas que faz, todas as quartas-feiras um tipo de turno diferente, ao qual chamamos Serviço de Saúde (**SS**). Essa pessoa encontra-se, assim, fora do serviço, nesse dia. Obviamente que, para essa pessoa, esse dia conta como um turno de trabalho. Os restantes enfermeiros são divididos em seis grupos de três. Resta referir que, como esta equipa é composta por 27 pessoas, dada a divisão anterior dos enfermeiros, sobram dois deles. Estes são colocados no final do horário e vão colmatar as faltas que existirão no horário.

Quando está em vigor o regime de roullment de 5 dias, temos a sub-equipa de elementos de primeiro nível formada por 5 elementos, isto é, o Enfermeiro-Chefe e outras cinco pessoas. Os restantes elementos são divididos, tal como anteriormente, em grupos de três pessoas, mas agora apenas num total de 5 grupos. É importante reter que agora o número de enfermeiros que sobram e que vão colmatar as faltas que poderão existir no horário, sobe para cinco.

Notemos apenas que, em qualquer um dos regimes, há esta divisão em grupos de três para assegurar que pelo menos uma pessoa de cada nível integre cada grupo.

A cada passo de elaboração do horário, o Enfermeiro-Chefe é constantemente confrontado com a alternativa de escolher, ou não aquela determinada pessoa para executar determinado turno de trabalho, ou determinado tipo de descanso. Sendo assim, podemos afirmar que as variáveis controláveis presentes neste problema de elaboração de horários mensais de enfermeiros para o Serviço de Cirurgia deste hospital são as seguintes:

- Número de pessoas por turno
- Grau de formação/integração de cada pessoa em cada turno
- Formação dos grupos de três
- Períodos de férias
- Períodos de licença de parto
- Períodos de licença de casamento
- Dias de formação
- Dias de serviço fora do hospital (**SS**)
- Compensações (dias de descanso que o agente de decisão atribui, tendo em conta a uniformidade do horário)
- Se no mês seguinte vigorará o regime de roullment de 6 ou de 5 dias
- Número total de turnos mensais é de 17 dias

- Ordem de atribuição dos turnos em cada período de 6 ou 5 dias

Como analista deste problema, acho importante fazer uma observação acerca das férias. Em primeiro lugar, esta é uma variável controlável, uma vez que as férias de cada enfermeiro são discutidas em Março e até ao final de Abril têm de estar completamente decididas (essa decisão é tomada em reunião), sendo os períodos de férias atribuídos com o consenso de todos. Sendo assim, quando o Enfermeiro-Chefe se depara com a tarefa de elaborar um horário, à partida já sabe em que dias determinado colaborador não estará presente no serviço.

Também associadas a esta variável, estão algumas restrições que passo a citar:

- Em época alta, isto é, de 15 de Junho a 15 de Setembro só podem estar, no máximo, 5 pessoas de férias. Como neste período se encontram mais pessoas de férias que o habitual, há recurso a muitas horas extraordinárias
- Entre os dias 20 de Dezembro e 2 de Janeiro, habitualmente não são atribuídas férias (pois se houver, sobrecarregará os restantes elementos da equipa)
- No resto do ano (ou seja, sem ser o período de época alta) só podem estar, no máximo, 4 pessoas de férias
- Todos os elementos têm direito a gozar férias no período de época alta
- Todos os elementos têm direito a ter pelo menos um período de férias que seja igual ou superior a 50
- A partir do momento em que a pessoa tem algum dia de férias num determinado mês, deixam de contar o número de turnos, e passam a contar horas de trabalho
- Cada dia de férias conta apenas como 7 horas
- Os fins-de-semana não contam para férias.

Na elaboração destas escalas o Enfermeiro-Chefe é, obviamente, confrontado com situações que acontecem sem este estar à espera e, que podemos definir como sendo variáveis incontroláveis. As variáveis deste tipo associadas a este problema são:

- Falta de um enfermeiro (algum contratempo repentino)
- Pessoa em formação (DF) (conta como dia efectivo de trabalho)
- Fecho de um bloco (por exemplo, o bloco operatório)

De facto, estas variáveis não são controláveis, pois a formação de um enfermeiro é planeada apenas com um mês de antecedência, logo é só nessa altura que o agente de decisão tem acesso a essa informação e a falta repentina de um enfermeiro ou o fecho de um bloco é algo impossível de controlar.

Quando acontece alguma das três situações acima mencionadas, o Enfermeiro-Chefe terá de fazer um reajuste no horário, isto é, terá de construir um novo roster (ou parte dele) aplicável ao período em que ocorre a falta. Este roster reajustado deverá satisfazer todas as restrições e, obviamente, não deve atribuir tarefas a enfermeiros ausentes. Estamos perante aquilo a que se chama um problema de rerostering.

Ao fazer este reajuste, o Enfermeiro-Chefe tem de ter em conta que um enfermeiro só pode ser substituído por outro de um nível igual ou superior. Esta restrição deverá ser respeitada ao máximo. No entanto, pode dar-se o caso de não haver, nesse dia, nenhum enfermeiro de grau igual ou superior para fazer a substituição. Então terá de ser um de grau inferior a colmatar essa falta.

Ainda referente à construção de escalas, o Enfermeiro-Chefe, quer esteja a desenvolver um novo roster para o mês seguinte, quer esteja a fazer um reajuste num roster já em vigor, é deparado com um tipo de restrições que também podem pôr em causa o bom funcionamento do serviço, e que dizem respeito às exigências ou preferências dos enfermeiros que compõem a sua equipa. De facto, as pessoas têm uma rotina de vida organizada que desejam manter, o mais homogeneamente possível, ao longo do mês e, também, ao longo dos vários meses de trabalho. Essas preferências têm, de uma forma geral, a ver com os seus períodos de descanso. Por exemplo, um enfermeiro preferirá ter dias de descanso seguidos, gozar dias de folga antes ou depois de um fim-de-semana, dias livres entre turnos de trabalho, trabalhar o menor número de noites possível num mês, entre outras.

No entanto, essas exigências só podem ser satisfeitas, se tiverem sido respeitadas, previamente, todas as questões legais. Este último tipo de restrições não pode ser, de forma alguma, violado. Temos então, que:

- Terão de haver pelo menos 8 horas de intervalo em cada turno
- Um enfermeiro nunca pode fazer duas noites seguidas
- Após um turno de noite tem de haver, pelo menos, 24 horas de descanso

Antes de cada turno nocturno deveriam haver 16 horas de descanso, mas esta restrição nem sempre é respeitada. Neste escalonamento há ainda a considerar a restrição de que um enfermeiro nunca poderá fazer mais do que um turno no mesmo dia.

Feita a descrição do problema de escalonamento de enfermeiros na Unidade de Cirurgia do Hospital Pediátrico do CHC, vamos agora descrever como é que o problema é resolvido actualmente.

3 Como é que o problema é resolvido agora

Tal como foi referido na secção anterior, o escalonamento de enfermeiros nesta unidade hospitalar consiste na elaboração de um horário, pelo Enfermeiro-Chefe, onde cada enfermeiro é afectado a um determinado tipo de turno de trabalho, ou a um determinado tipo de descanso.

Atendendo à descrição anterior, o horário é dividido em duas partes. A primeira parte contém os turnos atribuídos aos enfermeiros que, naquele mês, efectuam apenas turnos de manhã. A segunda parte contém os turnos atribuídos aos enfermeiros que, naquele mês, estão sob um regime de roullment. Esse roullment poderá ser, como sabemos, de 5 ou de 6 dias.

Um exemplo de uma escala feita pelo Enfermeiro-Chefe para cada um mês em que está em vigor o roullment de 6 dias encontra-se no Anexo 1, Figura 1.

Quando estamos num período do ano em que está a vigorar o regime de roullment de 6 dias, os turnos dos enfermeiros que estão a fazer este tipo de serviço, funcionam, normalmente, respeitando a seguinte sequência:

1° dia) noite (**M**)

2° dia) descanso semanal (**M**)

3° dia) manhã (**T**)

4° dia) manhã (**DC**)

5° dia) tarde (**N**)

6° dia) descanso complementar (**DS**)

Notemos que, na elaboração de horários, o agente de decisão começa sempre com o turno noite, porque ele assim o escolheu (não e obrigatório que assim seja; no entanto, começando com a noite, ao fazer a contagem do número de pessoas necessário para assegurar as noites, esse número está sempre certo).

Aquela sequência de turnos também foi escolhida pelo Enfermeiro-Chefe e satisfaz as restrições legais referidas na secção anterior. Embora não sendo a única sequência possível a mim, analista, parece-me bastante aceitável, pelas seguintes razões:

- satisfaz as exigências legais
- tendo uma só noite, faz com que na elaboração dos horários, o número de noites esteja

sempre certo
- tendo duas manhãs, torna mais fácil a elaboração do horário, pois é no turno da manhã que são necessárias mais pessoas ao serviço (e sendo duas, será mais fácil ajustar o número de manhãs necessário diariamente)
- é preferível um enfermeiro fazer mais turnos durante o dia, que durante a noite (preferências dos enfermeiros) e o mesmo enfermeiro não deve fazer duas noites seguidas
- as pessoas do serviço estão habituadas a fazer este tipo de turnos, pelo que não convém alterar as suas rotinas diárias.

Nos períodos do ano em que é necessário ter a equipa a trabalhar sob um regime de roullment de 5 dias, os enfermeiros repetem os seus turnos, normalmente, obedecendo à seguinte sequência:
1° dia) noite (**M**)
2° dia) descanso semanal (**T**)
3° dia) manhã (**DC**)
4° dia) tarde (**N**)
5° dia) descanso complementar (**DS**)

Notemos que esta sequência, à semelhança da anterior é, também, perfeitamente viável, pois respeita todas a questões legais e nos 5 dias deste roullment, cada pessoa efectua um turno de cada tipo, isto é, ao longo dos 5 dias, não há repetição do mesmo turno. É a sequência usada pelo Enfermeiro-Chefe, mas obviamente que não é a única possível. De facto, uma outra sequência possível seria **M** - **T** - **DC** - **N** - **DS** (pois respeita as questões legais). No entanto, será melhor para uma pessoa fazer manhã num dia e tarde no outro (tem 24h de intervalo entre os turnos) do que fazer tarde num dia e manhã no outro (neste caso, só tem 8h de intervalo entre estes turnos).

Uma vez definidas as sequências de turnos que o Enfermeiro-Chefe usa para fazer a elaboração das escalas, passo a explicitar, de forma resumida, como é feita essa elaboração.

Quando o agente de decisão começa a fazer o horário para um determinado mês, já tem, previamente, estabelecidos os dias de férias da sua equipa, logo já sabe quantos dias (ou quantas horas, no caso de haver férias) de trabalho terá que fazer cada pessoa. Como cada pessoa tem de ter, no final do mês, 17 turnos de trabalho feitos, cada um com 8 horas, no final do mês terá de ter feito $17x8 = 136$ horas de trabalho. Uma vez que cada dia de férias conta como se a pessoa tivesse a trabalhar apenas 7 horas, o agente de decisão quando começa a fazer o horário já sabe quantas dias de folga (isto é, quantas compensações) é que cada pessoa terá direito. Notemos apenas que, se essa contagem de horas de descanso, quando convertida para dias não der um número inteiro, o agente de decisão faz um arredondamento desse valor.

O Enfermeiro-Chefe começa, então, por preencher toda a primeira parte do horário com turnos de manhã, excepto os fins-de-semana. No final de estar preenchida, cada enfermeiro desta sub-equipa terá, se não tiver férias nesse mês, mais de turnos de trabalho do que deveria. Portanto, o agente de decisão atribui dias de descanso designados, como sabemos, por compensações, de forma a que cada pessoa totalize 136 horas de trabalho. Geralmente essas compensações são atribuídas antes ou depois de um fim-de-semana, pois os enfermeiros envolvidos assim o preferem.

De seguida, o agente de decisão vai actuar sobre a segunda parte do horário, isto é, vai fazer o escalonamento dos enfermeiros que, naquele mês, estão a trabalhar em roullment. Esta parte do horário começa a ser preenchida pondo o primeiro grupo de três a fazer o turno da noite, e assim sucessivamente, respeitando a ordem dos turnos acima definida (conforme estejamos em roullment de 5 ou de 6). O segundo grupo começa também com noite, mas um dia a seguir ao primeiro grupo. Repete-se este procedimento até ficar toda esta parte do horário completamente preenchida. De seguida são atribuídas as compensações a que cada pessoa terá direito, mas tendo agora em conta o número mínimo de enfermeiros necessários em cada turno. Também aqui os enfermeiros preferem que lhes sejam atribuídas compensações após os seus descansos semanais.

A atribuição de compensações é feita de forma criteriosa, da seguinte forma: em primeiro lugar atribui-se às pessoas que têm mais horas extraordinárias nesse roster. Em segundo lugar, àquelas que têm um maior número de horas em débito e, finalmente, àqueles que têm um maior número de turnos seguidos no seu horário.

A forma de atribuição de compensações é análoga quer nos horários de roullment de 5, quer nos horários de roullment de 6 dias.

Como os enfermeiros acima escalonados não são suficientes para garantir uma escala admissível (isto é, que satisfaça todas as restrições), o agente de decisão também preenche o horário dos enfermeiros suplentes de forma análoga à dos outros enfermeiros e atribui compensações de forma a colmatar eventuais faltas de turnos que existam no horário, satisfazendo sempre todas as restrições. Resta notar que, na atribuição destas compensações, o Enfermeiro-Chefe tenta, ao máximo, não separar as pessoas que fazem parte do mesmo grupo de três, para assegurar que haja pelo menos uma pessoa de cada nível de especialização em cada turno. De uma forma muito resumida, posso dizer que o Enfermeiro-Chefe elabora as suas escalas mensais, em duas fases. Na primeira fase, atribui o número de compensações, previamente contabilizado, a que cada enfermeiro tem direito nesse mês. Na segunda fase, troca os turnos, deslocando as pessoas, de forma a ter o número de enfermeiros necessários em cada turno do dia. Obviamente que, dada a necessidade de satisfação de todas as restrições, estas fases não são efectuadas separadamente, mas sim completando-se mutuamente.

Uma vez elaborada a escala de um determinado mês, poderão ocorrer situações inesperadas que façam com que o agente de decisão tenha de voltar a reajustá-la. São aquelas variáveis incontroláveis que foram referidas na secção anterior. Se acontecer alguma alteração apenas num dia, o Enfermeiro-Chefe reajusta o horário apenas para aquele dia não sendo afectado, portanto, o resto do horário. Para fazer essas alterações, o agente de decisão começa por ver qual o grau de integração da pessoa em falta (pode ser primeiro, segundo ou terceiro) e tenta substituir a pessoa em falta por uma do mesmo grau (ou grau superior) que não esteja a trabalhar nesse dia (por exemplo, uma pessoa que nesse dia tivesse uma compensação no horário). Tem é de ter em atenção que, provavelmente, este último passará a fazer mais de 17 turnos por mês, logo terá de contabilizar esse dia e atribuí-lo como trabalho extraordinário, ou em acumulação de tempo, de acordo com a preferência do trabalhador. Se acontecer o caso de não haver, nesse dia, um enfermeiro de grau igual ou superior para fazer a substituição, então terá de ser um de grau inferior a suprimir essa falta. Esta situação deve ser evitada o mais possível. O Enfermeiro-Chefe pode, em situações pontuais, ter de recorrer ainda a horas extra. No entanto, o número de horas extra utilizado deve ser minimizado.

Quando acontece uma situação inversa da anterior, por exemplo o fecho de um bloco, ficamos com excesso de enfermeiros. Para contornar esta situação, o Enfermeiro-Chefe dispensa alguns elementos da sua equipa respeitando a seguinte ordem: em primeiro lugar atribui-se às pessoas que têm mais horas extraordinárias nesse roster. Em segundo lugar, àquelas que têm um maior número de horas em débito e, finalmente, àqueles que têm um maior número de turnos seguidos no seu horário.

4 Uma primeira análise do problema

A oportunidade fazer um estágio em que pudesse desenvolver um trabalho de Matemática Aplicada, mais particularmente, na área da Optimização Combinatória, despertou-me, desde logo, bastante interesse.

Antes de poder fazer uma abordagem matemática do mesmo, comecei por tentar perceber perante quais as características deste problema e em que contexto se inseria.

Após algumas reuniões com o Enfermeiro-Chefe da Unidade de Cirurgia do hospital que é, como sabemos, quem elabora as escalas dos enfermeiros desta unidade, consegui entender como é feito esse escalonamento e, desde logo, pude perceber as dificuldades que este traz, uma vez que este problema está sujeito a uma grande variedade de restrições, tal como foi descrito na Secção 2.
Efectuei, ainda umas primeiras pesquisas na bibliografia que aborda este assunto, que me permitiram perceber melhor, e de uma forma geral, os problemas de escalonamento de enfermeiros ("Nurse Rostering Problem").

À medida que ia recolhendo informações, tanto em pesquisas bibliográficas, como com o próprio Enfermeiro-Chefe, fui percebendo quem é o agente de decisão (isto é, quem elabora mensalmente as escalas), qual o seu objectivo principal, com que decisões alternativas é confrontado e quais os parâmetros que, não sendo por si controláveis, podem afectar os resultados da suas decisões. Esta informação foi registada num Relatório Diagnóstico. A partir do momento em que comecei a perceber a elaboração destes horários, tentei pôr-me na pele do Enfermeiro-Chefe e comecei a elaborar horários, manualmente, tal como é actualmente feito.

Nessa elaboração, respeitei os tipos de sequências de turnos a que os enfermeiros já estão habituados pelo que, peguei numa escala de base preenchida com os turnos e, contabilizei e retirei os dias que cada pessoa fazia a mais nessa escala de base. Devido à quantidade de restrições a considerar constatei que não é fácil estabelecer um algoritmo, ainda que muito simples e manual, que faça este escalonamento. Essa dificuldade reside essencialmente na existência de restrições que não podem ser de forma alguma violadas, isto é, hard constraints, que são

(i) cada enfermeiro não deve realizar mais de um turno por dia;

(ii) deve ser respeitado o número de enfermeiros necessários em cada turno (esse número foi indicado na Secção 2);

(iii) há sequências de turnos em dias consecutivos que são inadmissíveis para o mesmo enfermeiro (por exemplo, um turno de noite seguido por um turno de manhã);

(iv) a um enfermeiro não pode ser atribuído um turno que ele não possa fazer, nesse dia;

(v) os enfermeiros devem gozar de dias de folga ao longo do mês, dependendo das sequências de turnos de trabalho que efectuam

(vi) deve haver pelo menos um enfermeiro de cada nível de especialização em cada turno.

Quando ocorre a falta de um enfermeiro há ainda que acrescentar à lista anterior a seguinte restrição

(vii) um enfermeiro não pode assegurar nenhum turno, durante o período em que está a faltar.

Uma vez que a elaboração de horários exige muitas contagens decidi, juntamente com o Orientador do Departamento de Matemática, usar o Programa Microsoft Office Excel, para fazer essas mesmas contagens. Foi criada uma folha de cálculo que parte de uma escala de base preenchida com as sequências de turnos usadas actualmente pelo agente de decisão. A escala de base utilizada corresponde apenas a meses em que está em vigor o roullment de 6 dias. Um exemplo dessa escala pode ser encontrada no Anexo 2, Figura 2. Partindo, então, dessa escala, e pondo os dias de férias de cada elemento da equipa nos locais respectivos (esta é uma informação que o agente de decisão já dispõe a priori), a folha de Excel calcula o número de compensações a que cada pessoa terá direito nesse mês. Esse número vai sendo actualizado automaticamente, à medida que as compensações vão sendo atribuídas. Simultaneamente, existem linhas que calculam o número de pessoas que estão em falta ou em excesso, em cada dia, e em cada tipo de turno. Estes números também vão sendo actualizados à medida que vão sendo feitas alterações no horário. Para ajudar a uma melhor compreensão, o número de enfermeiros em falta é indicado a vermelho e o número de enfermeiros em excesso é indicado a verde. Quando se atinge o número de enfermeiros necessários num determinado turno, esse número passa a preto. Um exemplo de uma escala deste tipo encontra-se no Anexo 3, Figura 3.

5 Pesquisa bibliográfica

Após ter percebido como funciona o escalonamento de enfermeiros nesta unidade hospitalar, e após ter feito uma primeira análise do problema, descrita na secção anterior, fiz várias pesquisas bibliográficas sobre este tema, que, posteriormente, analisei. Embora todas elas sejam referentes a problemas de escalonamento de enfermeiros, apresentam diferenças entre si e entre o problema descrito na Secção 2. Para que se percebam melhor as abordagens identificadas, bem como as diferenças entre elas, vou apresentar um pequeno resumo de cada um dos artigos analisados.

Em [1] e [2], Aickelin e Dowsland descrevem um Algoritmo Genético para um problema de escalonamento num hospital do Reino Unido. Os autores pretendem uma solução rápida e flexível para o *Nurse Rostering Problem* e adicionam aos algoritmos genéticos o conhecimento da resolução de problemas com restrições. O problema descrito nestes artigos consiste em criar escalas semanais para uma equipa de 30 enfermeiros. Estas escalas têm de satisfazer contratos de trabalho e o número de enfermeiros necessários em cada turno a cada dia, dos diferentes graus. Têm, ainda, de ser justas para toda a equipa. O último objectivo é ir ao encontro das exigências do maior número de enfermeiros possível, considerando informação prévia que assegure que requisitos não satisfeitos e turnos menos populares são igualmente distribuídos. O dia é particionado em 3 turnos: dois turnos diários conhecidos como manhãs e tardes e um turno nocturno mais longo. O problema complica-se pelo facto de enfermeiros mais especializados poderem substituir enfermeiros menos especializados, mas o contrário não poder ocorrer. Além disso, a maioria dos enfermeiros são contratados para fazer dias ou noites, mas não ambos.

Os autores decompõem este problema em três estádios independentes: o primeiro assegura que estão enfermeiros suficientes em cada turno, o segundo faz a alocação dos dias e das noites a cada enfermeiro e o terceiro faz a alocação dos enfermeiros em dias, separando as tardes das noites. Estes artigos debruçam-se sobre o segundo estádio.

Para modelar a atribuição de turnos de tipo dia e noite, é usado um vector que representa um *shift pattern* (isto é, cada padrão de turnos que um enfermeiro pode realizar numa semana). Cada um desses vectores contém 14 componentes, em que os primeiros sete elementos representam os dias da semana, e os últimos 7 representam as noites. É ainda definido um custo que penaliza o facto de um dado enfermeiro realizar um dado turno. O objectivo é minimizar o custo dos conjuntos de *shift pattern* necessários para cobrir cada grau em cada turno. É, ainda, assegurado que cada enfermeiro trabalha exactamente um padrão de turnos, de entre todos os que são admissíveis para si e que em cada turno estão o número necessário de enfermeiros de cada grau.

Em [3], Aickelin e White resolvem o mesmo problema dos artigos anteriores, mas é apresentado um método de comparação estatística de algoritmos, método este que permite melhorar os algoritmos anteriores.

Em [4], os autores apresentam um trabalho de decomposição de um *Nurse Rostering Problem* específico, que consiste em atribuir um certo número de diferentes turnos a 16 enfermeiros, num período de 4 semanas. Não é necessário considerar níveis de especialização dos enfermeiros. Há ainda enfermeiros que trabalham em part-time, e outros que trabalham em full-time. Devem ser satisfeitas *hard* e *soft constraints*. Um exemplo do primeiro tipo de restrições é o facto de um enfermeiro poder exceder o número de horas do seu turno em 4, cada pessoa trabalha, em média, 36 horas por semana, durante um período de 13 semanas consecutivas (se este período não incluir turnos nocturnos).

A resolução deste problema é composta por três estádios. No primeiro estádio são desenhadas sequências de turnos, designados por *blocks*, que satisfazem os dois tipos de restrições. Estes blocos são usados para criar escalas cíclicas que são atribuídas a determinados grupos de enfermeiros. Cada um desses padrões cíclicos define uma escala para 5 enfermeiros durante 5 semanas. Neste estádio é empregue um algoritmo genético. Depois desta atribuição, o segundo estádio consiste em atribuir o resto dos turnos a enfermeiros que não estão envolvidos em padrões cíclicos. O último estádio envolve uma "variable neighborhood search", que implementa as escalas construídas nos dois primeiros estádios.

Em [7], Ikegami e Niwa introduzem uma formulação de programação matemática para o *Nurse Scheduling Problem* para um hospital japonês, e é desenvolvida uma Meta-heurística para a sua resolução. O número de enfermeiros a serem escalonados varia entre 20 e

40. Uma das grandes dificuldades deste problema reside no facto de os turnos terem de rodar, e as alterações de turnos podem afectar os padrões de sono dos enfermeiros. Os enfermeiros são agrupados por níveis de especialização. No entanto, a falta de enfermeiros mais especializados cria restrições que envolvem mais de um grupo. È por isso que o escalonamento não pode ser desenvolvido para cada grupo autonomamente. Considerando ainda as preferências dos enfermeiros, os autores constroem uma escala de 4 semanas para cada enfermeiro de uma unidade hospitalar. Neste artigo é descrito um processo de resolução deste problema para sistemas com 2 tipos de turnos. Depois é feita uma adaptação desse processo para um sistema com 3 tipos de turnos. Resumidamente, este problema consiste em atribuir um certo tipo de turno a um dado enfermeiro, num dado dia. Na unidade hospitalar considerada, 28 enfermeiros são divididos por três equipas, A, B ou C, de acordo com os pacientes que têm ao seu cuidado e são agrupados em 3 grupos, de acordo com os seus níveis de especialização. Temos dois tipos de restrições: as restrições que dizem respeito aos turnos de dia e noite dos enfermeiros (por exemplo, número de enfermeiros que devem estar em cada turno) e as restrições que dizem respeito aos enfermeiros (por exemplo, após uma noite deve vir um dia de folga). As restrições relativas aos enfermeiros são, ainda, divididas em três tipos.

O objectivo é criar uma escala que satisfaça todas a restrições. Para tal, os autores, à semelhança do que acontece nos artigos anteriores, definem também um padrão de turnos admissível para cada enfermeiro. O problema é formulado de forma a encontrar a melhor combinação de padrões de turnos admissíveis que não satisfaça apenas as restrições, mas também maximize a função objectivo. As variáveis de decisão definem se um dado enfermeiro efectua um dado padrão de turnos. O objectivo será, então, minimizar, no conjunto de todas as exigências, uma função que mede a imperfeição de uma solução, quando uma exigência não é satisfeita.

Posteriormente, é desenvolvida uma meta-heurística para resolver o problema. Com dados reais, os autores puderam confirmar o sucesso das soluções obtidas. O modelo proposto pode ser adaptado a outras instituições hospitalares.

Em [8], os autores apresentam um modelo de geração de colunas para o problema de escalonamento de enfermeiros. O problema principal encontra uma configuração de escalas individuais que satisfazem as restrições. Uma solução admissível do problema auxiliar é uma escala aceitável para um dado enfermeiro que respeita todas as exigências, turnos, rotações e dias de folga.

Este problema consiste em gerar uma configuração de escalas individuais (que são padrões de dias de folga e de trabalho) para cada enfermeiro, ao longo de um dado *horizonte* de planificação. As configurações dessas escalas são geradas, combinando várias restrições.

Uma atribuição é a especificação do turno que um dado enfermeiro deve fazer num dado dia. Um turno é caracterizado por horas de começo e de fim fixas e pode ser de 'dia', 'tarde' ou 'noite'. Um dia é subdividido em vários períodos de demandas, também caracterizados por horas de começo e de fim fixos.

As restrições de demandas especificam o número de enfermeiros em cada nível, para cada demanda de cada dia no horizonte de planificação. As preferências dos enfermeiros podem ser formulados em termos de exigências pessoais tais como dias de folga, turnos diurnos versus turnos nocturnos, entre outras.

A equipa de enfermeiros é composta por 47 elementos subdivididos em três categorias: um enfermeiro-chefe e o seu assistente, duas equipas alternativas A e B com enfermeiros em part time e full time e enfermeiros em avaliação.

São preparadas escalas para 2 semanas, excepto para o Enfermeiro-Chefe e o seu assistente, que são escalas de 6 meses.

A formulação básica do problema principal consiste em minimizar uma soma de pesos positivos e negativos. Os pesos positivos estão associados aos custos dos salários. Os pesos negativos estão associados a *experieced/less experienced staff balance*. Esta formulação está sujeita à restrição de todos os turnos terem de ser assegurados por um determinado número de enfermeiros. Cada potencial escala individual pode ser expressa por um vector com tantas componentes, quanto o produto do número de dias do horizonte de planificação pelo número de tipos de turnos. Um objectivo muito importante deste escalonamento é o grau de equilíbrio entre enfermeiros mais e menos experientes, que estão a trabalhar no mesmo período de um dado dia.

O problema auxiliar é formulado, para um dado enfermeiro, como sendo um recurso de um *constrained shortest path problem*, onde cada *path* corresponde a uma coluna da matriz de formulação do problema principal. Este problema determina um caminho que aperfeiçoa a solução do problema principal.

Para gerar as soluções é usada geração de colunas e Branch-and-Bound.

Em [9], os autores apresentam modelo matemático para escalonamento cíclico e não cíclico de turnos de enfermeiros, de 12 horas de enfermeiros. O modelo explora o facto de uma escala de enfermeiros ser feita por sequências alternativas de padrões de trabalho e folgas. É introduzido o conceito de *stint*, que corresponde a um padrão caracterizado por uma data de início, uma duração, um custo e os turnos trabalhados. Usando os *stints* como nós, constrói-se um grafo acíclico, no qual as escalas dos enfermeiros são definidas. O modelo resultante é um problema *shortest-path*, com *side constraints*, flexível, e que pode acomodar uma variedade de restrições. Com uma pequena modificação, o modelo é usado para definir problemas cíclicos e não cíclicos.

No caso de turnos de 12 horas há apenas 2 tipos de turnos, dia e noite. Pode, no máximo, combinar-se 4 desses turnos, com 12 horas de intervalo entre eles. Sendo assim, há 13 padrões de turnos permitidos, mas destes, só 7 são distintos. Além disso, um enfermeiro não pode trabalhar mais de 3 noites consecutivas. As restrições de escalonamento são acomodadas na construção dos nós. São, ainda, usados custos para preferências dos trabalhadores e para certos tipos de padrões de trabalho.

No caso não cíclico, os autores formularam um modelo de programação matemática, considerando uma classe de enfermeiros e, completando a equipa com enfermeiros de part-time e de full-time. O objectivo primário é encontrar uma escala admissível que minimize todos os custos. O tamanho do problema resultante depende do tamanho do horizonte de planeamento, do número de padrões e do número de enfermeiros. São produzidas escalas para um horizonte de T dias ou semanas. O objectivo é minimizar o custo das escalas, juntamente com a penalização de violar o *shift balance*.

No caso cíclico, o horizonte da escala é igual ao número de enfermeiros escalonados multiplicado por T. Além disso, a fim de se completar a rotação cíclica, os arcos no fim do horizonte de escalonamento devem terminar em nós do início desse horizonte. Os problemas cíclicos reduzem em muito o número de restrições. O objectivo é apenas minimizar o custo das escalas.

Com dados reais, foram produzidas escalas não cíclicas para 2 semanas, e escalas cíclicas para k semanas (k é o número de enfermeiros).

Em [6], Dowsland aborda o problema de produção de *rosters*, isto é, escalas para uma equipa de enfermagem de um grande hospital, usando pesquisa tabu com oscilação estratégica. O objectivo é assegurar que há enfermeiros suficientes ao serviço constantemente, enquanto se atende às suas preferências, dias de folga e tenta criar-se um sistema justo.

As exigências específicas podem variar de hospital para hospital mas, o objectivo primário, é encontrar uma escala que assegure que, a cada turno, estão enfermeiros suficientes para manter o serviço em perfeitas condições.

Neste artigo são produzidas escalas semanais que satisfazem restrições respeitantes ao número de enfermeiros de diferentes graus ao serviço, em alturas diferentes (*covering constraints*), atendendo também às preferências dos enfermeiros e ao facto de as escalas produzidas serem justas para todos.

Cada enfermeiro desta equipa trabalha toda a semana, dias ou noites, e pertence a um dos três graus existentes. Existe um número mínimo de enfermeiros de cada grau para cada um dos dois tipos de turnos. Alguns enfermeiros têm contratos de part-time, o que significa que fazem poucos turnos inteiros. Como um turno de noite é maior que um turno de dia e um enfermeiros de noites faz menos turnos que um enfermeiro de dia. Numa dada semana, o número de dias ou de noites que um enfermeiro vai trabalhar é conhecido. Portanto, podem ser enumerados todos os padrões de trabalho admissíveis para um dado enfermeiro, numa dada semana. Além disso, é atribuído a cada um desses padrões um custo de penalização que depende da qualidade desse padrão. A função objectivo corresponde, então a minimizar, para cada enfermeiro, o custo associado à soma de todos os padrões admissíveis para esse enfermeiro. Esta está sujeita às restrições de que cada enfermeiro só pode fazer um único padrão, e às restrições do número mínimo de enfermeiros de cada grau para assegurar cada turno.

O problema foi resolvido em 3 fases, sendo a fase 1 para a obtenção de uma solução admissível, e as fases 2 e 3 para a redução dos custos de penalização.

Através da análise destes artigos, posso concluir que muitos deles abordam a elaboração de escalas semanais. Todos eles consideram conjuntos de padrões admissíveis de turnos para cada enfermeiro. Esses padrões podem ser repetidos ciclicamente, ou não, ao longo do período de escalonamento. Alguns deles consideram ainda um custo que penaliza o facto de um dado enfermeiro efectuar um dado padrão de turnos, do seu conjunto admissível. Nesse caso, esse custo é incorporado na função objectivo e o objectivo final é minimizar a soma desses custos para cada enfermeiro e para todos os padrões de turnos admissíveis do seu conjunto.

Se compararmos os tipos de problemas acima descritos com o problema descrito na Secção 2, vemos que algumas das restrições são idênticas mas, no entanto há características bem diferentes em alguns deles (por exemplo, considerar o dia particionado em apenas dois tipos de turnos, considerar turnos de 12 horas, distinguir enfermeiros de dia e de noite e ainda de part-time e full-time).

Quanto à resolução dos problemas anteriormente descritos, esta passa umas vezes, pela resolução de Programas Lineares Inteiros, outras vezes pelo uso de Heurísticas e Meta-heurísticas. Os algoritmos usados são sempre testados para situações reais e as soluções são, geralmente, bastante aceitáveis.

Além dos artigos acima analisados que descrevem o *Nurse Rostering Problem*, foram ainda analisados dois outro artigos onde é abordado o *Nurse Rerostering Problem*, isto é, onde se reajusta uma escala previamente construída, quando acontece alguma alteração repentina na equipa de enfermagem. Um resumo dessa análise é apresentado seguidamente.

Em [10], as autoras abordam o problema de *rerostering*, que acontece quando um ou mais enfermeiros não podem assegurar os turnos que lhes estavam previamente destinados. O conjunto das escalas de todos os enfermeiros é chamado um *roster*. Se não existem enfermeiros de reserva que os substituam, então o *roster* actual tem de ser reconstruído. O novo *roster* tem de ter em conta todas as restrições laborais e institucionais e, ainda, ser tão próximo do *roster* original quanto possível.

Este artigo descreve heurísticas construtivas e várias versões de algoritmos genéticos, onde cada indivíduo da população é associado a um par de cromossomas, que representa as permutações de enfermeiros e de turnos.

O hospital em questão trabalha 24 horas por dia e as suas unidades organizam o trabalho dos enfermeiros em três turnos de 8 horas cada - dia, tarde e noite. Cada mês, cada enfermeiro-chefe de cada unidade elabora uma escala para um período de 28 dias. No problema abordado neste artigo, uma tarefa deve ser assegurada por um só enfermeiro, e o número de tarefas de um turno específico corresponde ao número mínimo de enfermeiros requeridos para trabalhar nesse turno. Um roster deve incorporar a regras dos contratos laborais, os regulamentos internos do hospital e satisfazer as preferências dos enfermeiros para certas sequências de turnos e dias de folga.

O problema do rerostering consiste em construir um novo roster aplicável desde o primeiro dia em que ocorre a falha, até ao último dia do período de escalonamento.

A pesquisa de soluções admissíveis para este problema, gastando pouco tempo computacional, começa com o desenho de heurísticas construtivas. A heurística reatribui todas as tarefas aos enfermeiros, desde o primeiro dia em que se aplica. Na construção do algoritmo genético, o primeiro objectivo é lidar com a *solution encoding*. É usado um tipo de *solution encoding* para este problema, o *indirect encoding*. A ideia é, então, usar um algoritmo genético para pesquisar num espaço de permutação, onde as permutações são usadas como input das heurísticas que resolvem o problema original.

Foram efectuadas experiências criando, aleatoriamente, as ausências em *rosters* de duas unidades hospitalares, envolvendo 19 e 32 enfermeiros, respectivamente, e as ausências foram criadas em vários dias da escala. Foram testadas várias instâncias do problema, e cada heurística foi corrida vinte vezes. Em termos de tempo computacional e da qualidade das soluções, as duas versões de uma heurística construtiva revelaram-se muito boas. Apesar do elevado tempo computacional, todas as versões do algoritmo genético produziram um grande número de soluções admissíveis óptimas, quando comparados com as heurísticas construtivas.

As autoras concluíram que a pesquisa com o algoritmo genético no espaço das permutações das tarefas melhora, substancialmente, a qualidade das soluções.

Em [11], as autoras apresentam o *Nurse Rerostering Problem*, isto é, quando um enfermeiro informa que não poderá assegurar os turnos que lhe estavam previamente destinados. Sendo assim, o roster actual tem de ser reconstruído, de acordo com regras de contrato e exigências institucionais. Além disso, tem de ser tão próximo quanto possível do original.

Todas as restrições são vistas como *hard constraints*.

Este artigo apresenta dois novos *multicommodity flow models* para este problema.

O problema, em termos de descrição, é semelhante ao apresentado no artigo anteriormente analisado. As *hard constraints* dizem respeito ao facto de cada enfermeiro só poder assegurar um único turno por dia, não pode haver mais de um enfermeiro num só turno, há sequências de turnos que não são possíveis e cada enfermeiro deve gozar de um número mínimo de dias de folga, na sua sequência de turnos. O novo *roster* construído tem, obviamente, de conter mais uma restrição do tipo anterior, que é o facto de enfermeiros em falta não poderem assegurar nenhum turno durante o período de ausência. Este *roster* é aplicado a partir do primeiro dia de ausência. O novo *roster* deve satisfazer, tanto quanto possível as *soft constraints*, isto é, os enfermeiros devem assegurar um número mínimo de turnos no período de escalonamento e não devem assegurar turnos nocturnos consecutivos.

O primeiro *multicommodity flow model* visa optimizar um *integer multicommodity flow*, num grafo com vários níveis, com restrições adicionais. Esse grafo representa um *roster*, com sete níveis de nós. Cada nível representa um dia do período de escalonamento, e cada nó representa um turno particular atribuído a um enfermeiro. Como tal, um caminho nesse grafo representa a sequência de turnos e de folgas de um enfermeiro, ao longo de uma semana. A cada nó e a cada commodity está associado um número inteiro. Para expressar a diferença que há entre o *roster* original e novo *roster* é usada uma penalização associada a cada arco do grafo e a cada enfermeiro.

O segundo modelo é uma agregação do primeiro. Os nós correspondentes turnos que fazem parte de uma mesma tarefa são agregados num único nó. São definidos também custos, de forma análoga à anterior.

Foram obtidos bons resultados com o *aggregated integer multicommodity flow model*.

O artigo que se segue apresenta uma visão geral de todos os tipos de *Nurse Rostering Problem*.

Em [5], os autores fazem um resumo do *Nurse Rostering Problem* em geral, onde são apresentados vários modelos e metodologias válidas para a resolução deste problema. São, então, definidos vários tipos de variáveis de decisão, de restrições e de problemas (optimização, decisão e de optimização com restrições). São definidos, também, vários tipos de soluções e cada uma delas é avaliada.

6 Modelação

6.1 Uma Primeira Modelação

Esta é uma fase cujo objectivo assenta na reprodução, com a fidelidade adequada, das relações que existem entre objectivos, variáveis de decisão, variáveis incontroláveis e restrições, definidos em secções anteriores.

Quando o Enfermeiro-Chefe começa a elaboração de uma escala mensal para a sua equipa de enfermagem esta está, inicialmente, preenchida de forma a que os enfermeiros da primeira sub-equipa efectuem, durante toda a semana, turnos de Manhã e que os enfermeiros da segunda sub-equipa efectuem a sequência de turnos do *roullment* que vigora no mês que está a ser considerado (ver Figura 2, Anexo2). Nesta primeira modelação vamos supôr que estamos num mês em que vigora um regime de roullment de seis dias logo, a sequência de turnos que os enfermeiros efectuam, é **M-M-T-DC-N-DS**. O próximo passo da elaboração do horário é a colocação dos períodos de férias (**F**), dos feriados (**E**) e dos dias de formação (**DF**) que existirão nesse mês (ver *roster* da Figura 3, Anexo 3). Após estas alterações, o Enfermeiro-Chefe dispõe de uma folha de cálculo em *Excel* que contém o número de enfermeiros em falta ou em excesso para cada dia do mês e, ainda, uma coluna que tem calculado o número de compensações a que cada elemento da sua equipa terá direito nesse mês.

É agora que reside a maior dificuldade para o agente de decisão. Neste momento, ele depara-se com uma questão principal: "*O que poderei fazer?*". De facto, para cada enfermeiro, haverá um certo número de dias (igual ao número de compensações a que terá direito nesse mês), que podem ficar diferentes, pois têm de ser retirados do horário. Além desses dias, haverá turnos que podem ser trocados por um tipo de turno diferente. Notemos ainda que a maior dificulade para o Enfermeiro-Chefe corresponde ao escalonamento dos enfermeiros que trabalham em regime de *roullment*. De facto, como os restantes apenas fazem manhãs, o agente de decisão só tem de substituir algumas delas por compensações (**C**), de forma a que, no final do mês, cada um desses elementos faça 136 horas de trabalho.

Nesta primeira modelação uma vez que, no horário que temos neste momento, os turnos Noite, ou estão em número certo, ou estão em falta, não vamos considerar qualque tipo de troca que envolva este turno. Vamos, assim, admitir que, em qualquer dia da semana, as trocas possíveis, são:

M $\rightarrow$ C

T$\rightarrow$ C

T $\rightarrow$ M

M $\rightarrow$ T.

Considerámos, assim, que só há atribuição de compensações em dias cujo turno inicial era uma manhã ou uma tarde e, as trocas possíveis entre turnos (para colmatar as falhas ou retirar os turnos em excesso do horário de base) ocorrem apenas com os turnos Manhã e Tarde. Os descansos DC DS não vão ser distinguidos, pelo que passarão a ser denotados apenas por D. As folgas que vão ser agora atribuídas (isto é, as compensações) serão denotadas por **C**).

Para modelar este problema matematicamente, comecemos por definir as variáveis de decisão que definem a atribuição de compensações:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & se\ o\ enfermeiro\ i\ fica\ livre\ no\ dia\ j\ do\ turno\ a\ que\ estava\ escalonado, \\ 0, & caso\ contr\acute{a}rio \end{cases}$$

onde

$i = 1, ..., \sharp\ enfermeiros$

$j = 1, ..., 28.$

isto é, cada variável x_{ij} define se determinado enfermeiro i da equipa de enfermegem fica, ou não, livre no dia j do mês cujo horário queremos construir.

Estas variáveis estão sujeitas às seguintes restrições:

$$\sum_{j=1}^{28} x_{ij} = c_i, \qquad i = 1, ..., \sharp\ enfermeiros.$$

(isto é, cada enfermeiro i ao fim dos 28 dias terá de ter c_i compensações, onde c_i é o número de compensações que o enfermeiro i tem direito naquele mês, ou seja o valor calculado pela folha de cálculo do *Excel*)

e ainda

$$x_{ij} = 0, \text{ para cada par } i = 1, ..., \sharp\ enfermeiros \text{ e } j \in \{F, D, N\}$$

(isto é, o enfermeiro i não pode ficar livre num dia em que à partida já estava de férias (**F**), já tinha um descanso (**D**), ou tinha uma noite (**N**) no seu horário).

Sendo assim, as trocas

$$\text{M} \rightarrow \text{C}$$
$$\text{T} \rightarrow \text{C}$$

já estão consideradas.
Resta considerar as trocas

$$\text{T} \rightarrow \text{M}$$
$$\text{M} \rightarrow \text{T}.$$

Para tal, definamos as seguintes variáveis de decisão

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & se\ o\ enfermeiro\ i\ troca\ de\ turno\ no\ dia\ j, \\ 0, & caso\ contrário \end{cases}$$

onde
$i = 1, ..., \sharp\ enfermeiros$
$j = 1, ..., 28.$

Estas variáveis definem se determinado enfermeiro troca o turno de trabalho para o qual estava inicialmente escalonado, para um turno de trabalho diferente (consoante a troca que estejamos a considerar) e estão sujeitas à seguinte restrição:

$$y_{ij} = 0, \text{ para cada par } i = 1, ..., \sharp\ enfermeiros \text{ e } j \in \{F, D, N\}$$

(isto é, o enfermeiro i não pode trocar o seu turno, se já estava escalonado para um dia de férias, de descanso, ou de turno nocturno, ou seja, neste modelo não há atribuição de turnos de trabalho a turnos que inicialmente eram de descanso ou de noite).

Resta considerar as restrições do número de enfermeiros por turno. Comecemos por considerar os seguintes conjutos:

I_1=\{todos os enfermeiros do primeiro nível de integração\}

I_2=\{todos os enfermeiros do primeiro e segundo níveis de integração\}

I_3={todos os enfermeiros do primeiro, segundo e terceiro níveis de integração}

O número de enfermeiros necessários em cada dia da semana, em cada turno e que corresponde a cada um dos conjuntos anteriores, encontra-se nas tabelas que se seguem.

	Seg e Ter	**Quar Qui e Sex**	**Fins de Semana e Feriados**
Manhã	pelo menos 3	pelo menos 3	pelo menos 1
Tarde	pelo menos 1	pelo menos 1	pelo menos 1
Noite	pelo menos 1	pelo menos 1	pelo menos 1

Tabela 1: Número de enfermeiros do conjunto I_1 necessários em dada turno, a cada dia da semana.

Seja $A^1 = [a_j^{1M}]_{1\times 28}$ o vector que contém, para cada dia j do mês, o número mínimo de enfermeiros de primeiro nível que deverão estar no serviço em cada manhã. De forma análoga definimos os vectores $A^1 = [a_j^{1T}]_{1\times 28}$ e $A^1 = [a_j^{1N}]_{1\times 28}$.

	Seg e Ter	**Quar Qui e Sex**	**Fins de Semana e Feriados**
Manhã	pelo menos 5	pelo menos 5	pelo menos 2
Tarde	pelo menos 2	pelo menos 2	pelo menos 2
Noite	pelo menos 2	pelo menos 2	pelo menos 2

Tabela 2: Número de enfermeiros do conjunto I_2 necessários em dada turno, a cada dia da semana.

Seja $A^2 = [a_j^{2M}]_{1\times 28}$ o vector que contém, para cada dia j do mês, o número mínimo de enfermeiros de primeiro e segundo níveis que deverão estar no serviço em cada manhã. De forma análoga definimos os vectores $A^2 = [a_j^{2T}]_{1\times 28}$ e $A^2 = [a_j^{2N}]_{1\times 28}$.

	Seg e Ter	**Quar Qui e Sex**	**Fins de Semana e Feriados**
Manhã	7	8	5
Tarde	4	4	3
Noite	3	3	3

Tabela 2: Número de enfermeiros do conjunto I_3 necessários em dada turno, a cada dia da semana.

Seja $A^3 = [a_j^{3M}]_{1\times 28}$ o vector que contém, para cada dia j do mês, o número de enfermeiros de primeiro, segundo e terceiro níveis necessários no serviço em cada manhã. De forma análoga definimos os vectores $A^3 = [a_j^{3T}]_{1\times 28}$ e $A^3 = [a_j^{3N}]_{1\times 28}$.

Então somos conduzidos às seguintes restrições:

Manhã do dia j, $j = 1, ..., 28$

I_1 :

$$\underbrace{\sum_{i \in I_1} M - \sum_{i \in I_1:M} x_{ij} - \sum_{i \in I_1:M} y_{ij} + \sum_{i \in I_1:T} y_{ij}}_{número\ de\ enfermeiros\ que\ deverão\ estar\ de\ primeiro\ nível,\ na\ manhã\ do\ dia\ j} \geq a_j^{1M}$$

Notemos que o número de enfermeiros do primeiro nível de integração que devem estar na manhã de um qualquer dia do mês é igual à soma de todos os enfermeiros de primeiro nível que já tinham o turno "M"no seu horário, à ecxcepção daqueles do primeiro nível que estavem escalonados para uma manhã e que receneram compensações e daqueles do mesmo nível que estavam escalonados para uma manhã, mas cujo turno foi trocado para uma tarde. Por fim, teremos ainda de somar aqueles que estavam escalonados, no horário inicial, para uma tarde, e cujo turno foi trocado para uma manhã. Esta justificação é análoga para o caso dos enfermeiros dos grupos I_2 e I_3, e também para o caso dasa restrições relativas à tarde do dia j ($j = 1, ..., 28$). O cálculo da restrição relativa ao turno noite é mais simples que a dos dois anteriores, conforme veremos mais à frente.

I_2 :

$$\underbrace{\sum_{i \in I_2} M - \sum_{i \in I_2:M} x_{ij} - \sum_{i \in I_2:M} y_{ij} + \sum_{i \in I_2:T} y_{ij}}_{número\ de\ enfermeiros\ que\ deverão\ estar\ de\ primeiro\ e\ segundo\ níveis,\ na\ manhã\ do\ dia\ j} \geq a_j^{2M}$$

I_3 :

$$\underbrace{\sum_{i \in I_3} M - \sum_{i \in I_3:M} x_{ij} - \sum_{i \in I_3:M} y_{ij} + \sum_{i \in I_3:T} y_{ij}}_{número\ de\ enfermeiros\ que\ deverão\ estar\ de\ primeiro,\ segundo\ e\ terceiro\ níveis,\ na\ manhã\ do\ dia\ j} = a_j^{3M}$$

Tarde do dia j, $j = 1, ..., 28$

I_1 :

$$\underbrace{\sum_{i \in I_1} T - \sum_{i \in I_1 : T} x_{ij} - \sum_{i \in I_1 : T} y_{ij} + \sum_{i \in I_1 : M} y_{ij}}_{\text{número de enfermeiros que deverão estar de primeiro nível, na tarde do dia } j} \geq a_j^{1T}$$

I_2 :

$$\underbrace{\sum_{i \in I_2} T - \sum_{i \in I_2 : T} x_{ij} - \sum_{i \in I_2 : T} y_{ij} + \sum_{i \in I_2 : M} y_{ij}}_{\text{número de enfermeiros que deverão estar de primeiro e segundo níveis, na tarde do dia } j} \geq a_j^{2T}$$

I_3 :

$$\underbrace{\sum_{i \in I_3} T - \sum_{i \in I_3 : T} x_{ij} - \sum_{i \in I_3 : T} y_{ij} + \sum_{i \in I_3 : M} y_{ij}}_{\text{número de enfermeiros que deverão estar de primeiro, segundo e terceiro níveis, na tarde do dia } j} = a_j^{3T}$$

Noite do dia j, $j = 1, ..., 28$

Uma vez que não existem quaisquer trocas envolvendo o turno noite, em cada dia do mês, o número de enfermeiros pertencentes a cada um dos grupos I_i, $i = 1, 2, 3$ é apenas a soma de todos os enfermeiros de cada um desses grupos que têm "N" no seu horário original. Portanto, temos

I_1 :

$$\underbrace{\sum_{i \in I_1} N}_{\text{número de enfermeiros que deverão estar de primeiro nível, na noite do dia } j} \geq a_j^{1N}$$

I_2 :

$$\underbrace{\sum_{i \in I_2} N}_{\text{número de enfermeiros que deverão estar de primeiro e segundo níveis, na noite do dia } j} \geq a_j^{2N}$$

I_3 :

$$\underbrace{\sum_{i \in I_3} N}_{\text{número de enfermeiros que deverão estar de primeiro, segundo e terceiro níveis, na noite do dia } j} = a_j^{3N}$$

Uma vez definidas todas as restrições, temos a seguinte

Função objectivo:

$$min \sum_{j=1}^{28} y_{ij} p_{ij}, \ i = 1, ..., \sharp \ enfermeiros$$

onde

p_{ij} representa o peso atribuído ao enfermeiro i no dia j, se este efectuar a troca y_{ij}.

Esta função irá minimizar, para cada enfermeiro, a soma dos peso associado a cada troca que o seu horário irá sofrer. Aquele *peso*, que foi introduzido nesta função varia consoante a troca que eu associo a cada turno de cada enfermeiro durante o mês e, é tanto maior, quanto menos vantajosa for essa troca para o horário. Ao minimizarmos os pesos associados a cada troca estamos, assim, a garantir que sejam efectuadas as trocas "menos pesadas" no horário, isto é, estamos a minimizar a possibilidade de serem feitas trocas que são menos vantajosas para cada enfermeiro.

6.2 Modelação do Problema

Após termos modelado o problema da forma anterior em reunião com o Enfermeiro-Chefe e o Enfermeiro-Director do Centro Hospitalar de Coimbra verificou-se que essa modelação, embora resolva uma instância mais simples deste problema, é insuficiente para modelá-lo na sua totalidade. De facto, foram apenas consideradas trocas envolvendo os turnos **M** e **T** e foram atribuídas compensações apenas a turnos que eram, orginalmente, uma manhã ou uma tarde. Constatou-se que, de facto, quando o agente de decisão após ter colocado, no *roster* de base, as férias, feriados e dias de formação correspondentes a esse mês, sente necessidade de fazer outros tipos de trocas, para além dos anteriormente considerados. Além disso, existem turnos que, sendo inicialmente de descanso, terão de passar a turnos de trabalho, para colmatar eventuais faltas existentes no horário. Este tipo de trocas leva a que os diversos turnos de descanso tenham de ser distinguidos pois, como foi explicitado na Secção 2, um turno do tipo **DS** tem um significado um pouco diferente de um turno **DC**, nomeadamente quando estes têm de ser substituídos por turnos de trabalho.

Como tal, para procedermos a uma modelação mais elaborada deste problema comecemos por enumerar todos os tipos de decanso que nele intervêm. São, então, os seguintes:

- **DS** (Descanso Semanal)
- **DC** (Descanso Complementar)
- **C** (Compensação)
- **E** (Feriado)
- **F** (Férias).

Os turnos de trabalho que podemos considerar neste problema são os seguintes:

- **M** (Manhã)
- **T** (Tarde)
- **N** (Noite)

- **DF** (Formação).

Notemos que, embora exista ainda um outro turno de trabalho, **SS** (Serviço de Saúde), este não vai ser considerado na modelação do problema pois é um turno feito, todas as semanas, no mesmo dia, pelo mesmo enfermeiro. Como tal,teríamos que dificultar mais o problema com um turno que não tem grande relevância na elaboração destas escalas.

Uma vez definidos todos os turnos existentes neste problema, vejamos agora todas as possíveis trocas que poderão ser efectuadas entre eles. Algumas dessas trocas só serão possíveis mediante certas restrições que também serão explicitadas seguidamente.

Comecemos por considerar os seguintes conjuntos:

$\mathbf{I} = \{1, ...27\}$ (isto é, I representa o conjunto de todos os enfermeiros desta equipa de enfermagem)

e

$\mathbf{J} = \{1, ..., 28\}$ (isto é, J repressenta o conjunto de todos os dias do período de escalonamento).

Designemos por $R = [r_{ij}]_{i\in I,\ j\in J}$ a matriz que contém o roster de base, isto é, que contém os turnos dispostos na sua sequência inicial (com os enfermeiros da primeira sub-equipa a fazer apenas manhãs e os restantes a trabalharem sob um dos regimes de *roullment*) e tem também as férias, feriados e dias de formação que irão existir nesse mês. Estes três últimos tipos de turnos são colocados pelo Enfermeiro-Chefe, após ter todo o horário preenchido pela sequência inicial. Nesta matriz não foram efectudas ainda quaisquer trocas. Notemos que esta matriz os turnos poderão estar dispostos segundo um roullment de seis dias, isto é, **M-M-T-DC-N-DS** ou de cinco dias, isto é, **M-T-DC-N-DS**, pois a modelação que vamos considerar resolve os dois tipos de problema.

Denotemos ainda por

$$\mathbf{DS}_i = \{j \in \{1, 2, ..., 28\} : r_{ij} = "\mathbf{DS}"\}, \text{ para cada } i \in I.$$

e assim por diante, até esgotarmos todos os tipos de turnos exitentes.

O primeiro tipo de trocas que vamos definir correspondem à atribuição de compensações, isto é,

M $\rightarrow$ **C**

T$\rightarrow$ **C**

N$\rightarrow$ **C**.

Temos, assim, que uma compensação pode ser atribuída quando, no horário original, o enfermeiro tinha um turno de manhã, tarde ou noite. De facto, só atribuo compensações nestes dois casos pois não terá significado atribuir um descanso num dia que já era, ele próprio, de descanso. Notemos, também, que não tem interesse atribuir um dia de folga a um enfermeiro que, num certo dia, irá estar em formação, ou de férias. Estas trocas correspondem, no modelo, à seguinte variável de decisão

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & se\ o\ enfermeiro\ i\ fica\ livre\ no\ dia\ j\ do\ turno\ M\ a\ que\ estava\ escalonado, \\ 0, & caso\ contr\acute{a}rio \end{cases}$$

para cada par $i \in I, j \in J$.

Isto é, define se determinado enfermeiro i da equipa de enfermegem fica, ou não, livre no dia j do mês que estamos a considerar, sabendo que o seu turno original era **M**, **T** ou **N**.

Estas variáveis estão sujeitas às seguintes restrições:

$$\sum_{j=1}^{28} x_{ij} = c_i, \qquad i \in I$$

(isto é, cada enfermeiro i ao fim dos 28 dias terá de ter c_i compensações, onde c_i é o número de compensações que o enfermeiro i tem direito naquele mês, ou seja o valor calculado pela folha de cálculo do *Excel*)

e ainda

$$x_{ij} = 0, \text{ para todo } i \in I,\ j \notin \mathbf{M}_i \cup \mathbf{T}_i \cup \mathbf{N}_i$$

(isto é, tal como foi dito anteriormente, o enfermeiro i não pode ficar livre num dia em que à partida já estava de folga, em formação, de férias, ou se era feriado nesse dia.

Sendo assim, temos a atribuição de compensações completamente definida.

Vamos agora definir os restantes tipos de trocas que podem ocorrer na elaboração destas escalas:

(1) M $\rightarrow$ T, desde que no dia seguinte seja C, DC, DS, E, F ou T;

(2) M $\rightarrow$ N, desde que no dia anterior seja C, DC, DS, E ou F e no dia seguinte seja C, DC, DS, E, F ou T;

(3) T $\rightarrow$ M;

(4) T $\rightarrow$ N, desde que no dia anterior seja C, DC, DS, E ou F e no dia seguinte seja C, DC, DS, E, F ou T;

(5) DC $\rightarrow$ M, desde que no dia seguinte seja C, DC, DS, E, F, M, T ou DF;

(6) DC $\rightarrow$ T, desde que no dia seguinte seja C, DC, DS, E, F ou T;

(7) DC $\rightarrow$ N, desde que no dia anterior seja C, DC, DS, E ou F e no dia seguinte seja C, DC, DS, E, F ou T;

(8) E $\rightarrow$ M, desde que no dia anterior seja C, DC, DS, M, N ou DF e no dia seguinte seja C, DC, DS, F, M, T ou DF;

(9) E $\rightarrow$ T, desde que no dia anterior seja C, DC, DS, M, T, N ou DF e no dia seguinte seja C, DC, DS, F ou T;

(10) E $\rightarrow$ N, desde que no dia anterior seja C, DC, ou DS e no dia seguinte seja C, DC, DS, F ou T.

Notemos que estas trocas, mediante as restrições a que estão sujeitas, satisfazem as exigências legais que foram referidas no final da Secção 2.

Associadas a cada uma das trocas acima enumeradas podemos definir as variáveis de decisão

$$y_{ij}^k = \begin{cases} 1, & se\ o\ enfermeiro\ i\ efectua\ a\ troca\ k\ no\ dia\ j, \\ 0, & caso\ contrário \end{cases}$$

para cada par $i \in I, j \in J$.

Troca 1: M → T

Consideremos a situação em que um enfermeiro i está escalonado para fazer o turno **M** no dia j e pretendemos considerar a possibilidade de trocar esse turno para **T**. Note-se que esta troca só pode acontecer quando o turno no dia seguinte é **C**, **DC**, **DS**, **E**, **F** ou **T**. Esta troca corresponde no modelo à seguinte variável de decisão

$$y_{ij}^1 = \begin{cases} 1 & \text{se o enfermeiro } i \text{ deve trocar o seu turno } \mathbf{M} \text{ por um turno } \mathbf{T} \text{ no dia } j, \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

para cada par $i \in I, j \in J$ acompanhada das seguintes restrições:

$$y_{ij}^1 = 0, \quad \text{para todo } i \in I, j \notin \mathbf{M}_i \tag{1a}$$

$$y_{ij}^1 \leq x_{i,j+1} + y_{i,j+1}^1 + y_{i,j+1}^2, \quad \text{para todo } i \in I, j+1 \in \mathbf{M}_i \tag{1b}$$

$$y_{ij}^1 \leq 1 - y_{i,j+1}^2, \quad \text{para todo } i \in I, j+1 \in \mathbf{M}_i \tag{1c}$$

$$y_{ij}^1 \leq 1 - (y_{i,j+1}^3 + y_{i,j+1}^4) \quad \text{para todo } i \in I, j+1 \in \mathbf{T}_i \tag{1d}$$

$$y_{ij}^1 \leq 1 - (y_{i,j+1}^5 + y_{i,j+1}^7), \quad \text{para todo } i \in I, j+1 \in \mathbf{DC}_i \tag{1e}$$

$$y_{ij}^1 \leq 1 - (y_{i,j+1}^8 + y_{i,j+1}^{10}), \quad \text{para todo } i \in I, j+1 \in \mathbf{E}_i \tag{1f}$$

$$y_{ij}^1 = 0, \quad \text{para todo } i \in I, j+1 \in \mathbf{DF}_i \tag{1g}$$

Antes de passarmos à próxima troca vamos fazer um pequeno parêntesis e explicarmos um pouco algumas das restrições anteriormente definidas. Notemos apenas que todas as restrições que já definidas e que ainda o vão ser para as trocas que se seguem, impedem que a variável que acompanham tome o valor 1 numa situação que não possa ocorrer, isto é, impedem a que a respectiva troca aconteça se os turnos do dia seguinte ou, eventualmente, do dia anterior não permitam que tal troca aconteça.

A restrição (**1a**) diz que, para todo o enfermeiro $i \in I$, se no no dia $j \in J$, não estiver um turno **M** no *roster* de partida, isto é, em r_{ij}, então a Troca 1 não pode ocorrer. Esta restrição aparece em todas as trocas que se seguem adaptada, obviamente, à troca em causa.

A restrição (**1b**) diz que para todo o enfermeiro $i \in I$, tal que no seu roster de partida esteja no dia seguinte (ao qual queremos fazer a troca) um turno **M** que não foi trocado para outro qualquer tipo de turno, então a Troca 1 não pode ocorrer.

A restrição (**1d**) diz que, para todo o enfermeiro $i \in I$, tal que no seu roster de partida esteja no dia seguinte (ao qual queremos fazer a troca) um turno **T** e se ocorreu a Troca 3 ou a Troca 4 (isto é, esse turno passou a ser **M** ou **N**), então não pode ocorrer a Troca 1.

A restrição (**1g**) diz que, para todo o enfermeiro $i \in I$, tal que no seu roster de partida esteja no dia seguinte (ao qual queremos fazer a troca) um turno **DF**, então a Troca 1 não pode ocorrer.

As restantes restrições relativas à Troca 1 e também muitas das restrições das trocas que vamos definir de seguida têm um significado análogo ao das restrições anteriormente explicadas.

Troca 2: M → N

Consideremos a situação em que um enfermeiro i está escalonamento para fazer o turno **M** no dia j e pretendemos considerar a possibilidade de trocar esse turno para **N**. Note-se que esta troca só pode acontecer quando no dia anterior o turno é **C**, **DC**, **DS**, **E** ou **F** e no dia seguinte é **C**, **DC**, **DS**, **E**, **F** ou **T**. Esta troca corresponde no modelo à seguinte variável de decisão

$$y_{ij}^2 = \begin{cases} 1 & \text{se o enfermeiro } i \text{ deve trocar o seu turno } \mathbf{M} \text{ por um turno } \mathbf{N} \text{ no dia } j, \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

para cada par $i \in I, j \in J$ acompanhada das seguintes restrições:

$$y_{ij}^2 = 0, \quad i \in I, \text{ e } j \text{ tq} \quad j \notin \mathbf{M}_i \tag{2a}$$
$$y_{ij}^2 = 0, \quad i \in I \text{ e } j \text{ tq} \quad j-1 \in \mathbf{DF}_i \tag{2b}$$
$$y_{ij}^2 = 0, \quad i \in I \text{ e } j \text{ tq} \quad j+1 \in \mathbf{DF}_i \tag{2c}$$
$$y_{ij}^2 \leq 1 - (y_{i,j-1}^1 + y_{i,j-1}^2), \quad i \in I \text{ e } j \text{ tq } j-1 \in \mathbf{M}_i, \tag{2d}$$
$$y_{ij}^2 \leq x_{i,j+1} + y_{i,j+1}^1 + y_{i,j+1}^2, \quad i \in I \text{ e } j \text{ tq } j-1 \in \mathbf{DS}_i, \quad j+1 \in \mathbf{M}_i \tag{2e}$$
$$y_{ij}^2 \leq 1 - y_{i,j+1}^2, \quad i \in I \text{ e } j \text{ tq } j-1 \in \mathbf{DS}_i, \quad j+1 \in \mathbf{M}_i \tag{2f}$$
$$y_{ij}^2 \leq 1 - (y_{i,j+1}^3 + y_{i,j+1}^4), \quad i \in I \text{ e } j \text{ tq } j-1 \in \mathbf{DS}_i, \quad j+1 \in \mathbf{T}_i \tag{2g}$$
$$y_{ij}^2 \leq 1 - (y_{i,j+1}^8 + y_{i,j+1}^{10}), \quad i \in I \text{ e } j \text{ tq } j-1 \in \mathbf{DS}_i, \quad j+1 \in \mathbf{E}_i \tag{2h}$$
$$y_{ij}^2 \leq x_{i,j-1} + y_{i,j-1}^1 + y_{i,j-1}^2, \quad i \in I \text{ e } j \text{ tq } j-1 \in \mathbf{M}_i, \tag{2i}$$
$$y_{ij}^2 \leq (1 - x_{i,j-1}) + 1 - (y_{i,j+1}^3 + y_{i,j+1}^4), \quad i \in I \text{ e } j \text{ tq } j-1 \in \mathbf{M}_i, \quad j+1 \in \mathbf{T}_i \tag{2j}$$
$$y_{ij}^2 \leq (1 - x_{i,j-1}) + 1 - (y_{i,j+1}^8 + y_{i,j+1}^{10}), \quad i \in I \text{ e } j \text{ tq } j-1 \in \mathbf{M}_i, \quad j+1 \in \mathbf{E}_i \tag{2k}$$
$$y_{ij}^2 \leq 1 - (y_{i,j-1}^8 + y_{i,j-1}^9 + y_{i,j-1}^{10}), \quad i \in I \text{ e } j \text{ tq } j-1 \in \mathbf{E}_i, \tag{2l}$$
$$y_{ij}^2 \leq x_{i,j+1} + y_{i,j+1}^1 + y_{i,j+1}^2, \quad i \in I \text{ e } j \text{ tq } j-1 \in \mathbf{E}_i, \quad j+1 \in \mathbf{M}_i \tag{2m}$$
$$y_{ij}^2 \leq 1 - y_{i,j+1}^2, \quad i \in I \text{ e } j \text{ tq } j-1 \in \mathbf{E}_i, \quad j+1 \in \mathbf{M}_i \tag{2n}$$
$$y_{ij}^2 \leq 1 - (y_{i,j+1}^3 + y_{i,j+1}^4), \quad i \in I \text{ e } j \text{ tq } j-1 \in \mathbf{E}_i, \quad j+1 \in \mathbf{T}_i \tag{2o}$$
$$y_{ij}^2 \leq 1 - (y_{i,j+1}^8 + y_{i,j+1}^{10}), \quad i \in I \text{ e } j \text{ tq } j-1 \in \mathbf{E}_i, \quad j+1 \in \mathbf{E}_i \tag{2p}$$
$$y_{ij}^2 \leq x_{i,j+1} + y_{i,j+1}^1 + y_{i,j+1}^2, \quad i \in I \text{ e } j \text{ tq } j-1 \in \mathbf{F}_i, \quad j+1 \in \mathbf{M}_i \tag{2q}$$
$$y_{ij}^2 \leq 1 - y_{i,j+1}^2, \quad i \in I \text{ e } j \text{ tq } j-1 \in \mathbf{F}_i, \quad j+1 \in \mathbf{M}_i \tag{2r}$$
$$y_{ij}^2 \leq 1 - (y_{i,j+1}^3 + y_{i,j+1}^4), \quad i \in I \text{ e } j \text{ tq } j-1 \in \mathbf{F}_i, \quad j+1 \in \mathbf{T}_i \tag{2s}$$
$$y_{ij}^2 \leq 1 - (y_{i,j+1}^8 + y_{i,j+1}^{10}), \quad i \in I \text{ e } j \text{ tq } j-1 \in \mathbf{F}_i, \quad j+1 \in \mathbf{E}_i \tag{2t}$$

Relativamente a esta troca, vamos também explicitar o signficado de algumas das suas restrições. Notemos que esta troca é um pouco mais complexa, em termos de modelação, que a troca anterior pois agora temos restrições que envolvem os turnos do dia anterior e do dia seguinte.

A restrição (**2e**) diz que, para todo o enfermeiro $i \in I$, tal que no seu roster de partida esteja no dia anterior (ao qual queremos fazer a troca) um turno **DS** e no dia seguinte esteja um turno **M** tal que não ocorreu, para esse dia seguinte, qualquer troca (isto é, continua lá o turno **M**), então a Troca 2 não pode ocorrer.

A restrição (**2j**) diz que, para todo o enfermeiro $i \in I$, tal que no seu roster de partida esteja no dia anterior (ao qual queremos fazer a troca) um turno **M** que foi trocado para uma compensação e no dia seguinte esteja um turno **T** tal que uma das trocas 3 e 4 ocorreu, isto é, passou a estar lá um **M** ou um **N**, então a Troca 2 não pode ocorrer,

Troca 3: T → M

Consideremos a situação em que um enfermeiro i está escalonado para fazer o turno **T** no dia j e pretendemos considerar a possibilidade de trocar esse turno para **M**. Note-se que esta troca pode acontecer independentemente do turno que estiver no dia anterior ou no dia seguinte, uma vez que não está sujeita a qualquer restrição. Esta troca corresponde no modelo à seguinte variável de decisão

$$y_{ij}^3 = \begin{cases} 1 & \text{se o enfermeiro } i \text{ deve trocar o seu turno } \mathbf{T} \text{ por um turno } \mathbf{M} \text{ no dia } j, \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

para cada par $i \in I, j \in J$ acompanhada da seguinte restrição:

$$y_{ij}^3 = 0, \qquad i \in I, \text{ e } j \text{ tq} \qquad j \notin \mathbf{T}_i \tag{3a}$$

De facto, esta troca não poderá ocorrer se, na escala de base não existir o turno **T**.

Troca 4: T → N

Consideremos a situação em que um enfermeiro i está escalonamento para fazer o turno **T** no dia j e pretendemos considerar a possibilidade de trocar esse turno para **N**. Note-se que esta troca só pode acontecer quando no dia anterior o turno é **C**, **DC**, **DS**, **E** ou **F** e no dia seguinte é **C**, **DC**, **DS**, **E**, **F** ou **T**. Esta troca corresponde no modelo à seguinte variável de decisão

$$y_{ij}^4 = \begin{cases} 1 & \text{se o enfermeiro } i \text{ deve trocar o seu turno } \mathbf{T} \text{ por um turno } \mathbf{N} \text{ no dia } j, \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

para cada par $i \in I, j \in J$ acompanhada das seguintes restrições:

$$
\begin{array}{llll}
y^4_{ij} = 0, & i \in I, \text{ e } j \text{ tq} & j \notin \mathbf{T}_i & \text{(4a)}\\
y^4_{ij} = 0, & i \in I \text{ e } j \text{ tq} & j+1 \in \mathbf{DF}_i & \text{(4b)}\\
y^4_{ij} = 0, & i \in I \text{ e } j \text{ tq} & j-1 \in \mathbf{DF}_i & \text{(4c)}\\
y^2_{ij} \leq 1 - (y^1_{i,j-1} + y^2_{i,j-1}), & i \in I \text{ e } j \text{ tq } j-1 \in \mathbf{M}_i, & & \text{(4d)}\\
y^4_{ij} \leq x_{i,j-1} + y^1_{i,j-1} + y^2_{i,j+1}, & i \in I \text{ e } j \text{ tq } j-1 \in \mathbf{M}_i, & & \text{(4e)}\\
y^4_{ij} \leq (1 - x_{i,j-1}) + 1 - (y^6_{i,j+1} + y^7_{i,j+1}), & i \in I \text{ e } j \text{ tq } j-1 \in \mathbf{M}_i, & j+1 \in \mathbf{DC}_i & \text{(4f)}\\
y^4_{ij} \leq (1 - x_{i,j-1}) + 1 - (y^8_{i,j+1} + y^{10}_{i,j+1}), & i \in I \text{ e } j \text{ tq } j-1 \in \mathbf{M}_i, & j+1 \in \mathbf{E}_i & \text{(4g)}\\
y^4_{ij} \leq 1 - y^8_{i,j-1} - y^9_{i,j-1} - y^{10}_{i,j-1}, & i \in I \text{ e } j \text{ tq } j-1 \in \mathbf{E}_i, & & \text{(4h)}\\
y^4_{ij} \leq 1 - (y^6_{i,j+1} + y^7_{i,j+1}), & i \in I \text{ e } j \text{ tq } j-1 \in \mathbf{E}_i, & j+1 \in \mathbf{DC}_i & \text{(4i)}\\
y^4_{ij} \leq 1 - (y^8_{i,j+1} + y^{10}_{i,j+1}), & i \in I \text{ e } j \text{ tq } j-1 \in \mathbf{E}_i, & j+1 \in \mathbf{E}_i & \text{(4j)}\\
y^4_{ij} \leq 1 - (y^6_{i,j+1} + y^7_{i,j+1}), & i \in I \text{ e } j \text{ tq } j-1 \in \mathbf{F}_i, & j+1 \in \mathbf{DC}_i & \text{(4k)}\\
y^4_{ij} \leq 1 - (y^8_{i,j+1} + y^{10}_{i,j+1}), & i \in I \text{ e } j \text{ tq } j-1 \in \mathbf{F}_i, & j+1 \in \mathbf{E}_i & \text{(4l)}
\end{array}
$$

Troca 5: DC → M

Consideremos a situação em que um enfermeiro i está escalonado para fazer o turno **DC** no dia j e pretendemos considerar a possibilidade de trocar esse turno para **M**. Note-se que esta troca só pode acontecer quando o turno no dia seguinte é **C**, **DC**, **DS**, **E**, **F** **M**, **T** ou **DF**, isto é, esta troca poderá ser sempre feita, a não ser que o turno do dia seguinte seja **N**. Esta troca corresponde no modelo à seguinte variável de decisão

$$y^5_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se o enfermeiro } i \text{ deve trocar o seu turno } \mathbf{DC} \text{ por um turno } \mathbf{M} \text{ no dia } j,\\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

para cada par $i \in I, j \in J$ acompanhada das seguintes restrições:

$$y^5_{ij} = 0, \qquad \text{para todo } i \in I, j \notin \mathbf{DC}_i \tag{5a}$$

$$y^5_{ij} \leq x_{i,j+1}, \qquad \text{para todo } i \in I, j+1 \in \mathbf{N}_i \tag{5b}$$

Troca 6: DC → T

Consideremos a situação em que um enfermeiro i está escalonado para fazer o turno **DC** no dia j e pretendemos considerar a possibilidade de trocar esse turno para **T**. Note-se que esta troca só pode acontecer quando o turno no dia seguinte é **C**, **DC**, **DS**, **E**, **F** ou **T**. Esta troca corresponde no modelo à seguinte variável de decisão

$$y_{ij}^{6} = \begin{cases} 1 & \text{se o enfermeiro } i \text{ deve trocar o seu turno } \mathbf{DC} \text{ por um turno } \mathbf{T} \text{ no dia } j, \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

para cada par $i \in I, j \in J$ acompanhada das seguintes restrições:

$$y_{ij}^{6} = 0, \qquad \text{para todo } i \in I, j \notin \mathbf{DC}_i \tag{6a}$$

$$y_{ij}^{6} \leq x_{i,j+1}, \qquad \text{para todo } i \in I, j+1 \in \mathbf{N}_i \tag{6b}$$

$$y_{ij}^{6} \leq 1 - (y_{i,j+1}^{8} + y_{i,j+1}^{10}), \qquad \text{para todo } i \in I, j+1 \in \mathbf{E}_i \tag{6c}$$

$$y_{ij}^{6} = 0, \qquad \text{para todo } i \in I, j+1 \in \mathbf{DF}_i \tag{6d}$$

Troca 7: DC → N

Consideremos a situação em que um enfermeiro i está escalonamento para fazer o turno **DC** no dia j e pretendemos considerar a possibilidade de trocar esse turno para **N**. Note-se que esta troca só pode acontecer quando no dia anterior o turno é **C**, **DC**, **DS**, **E** ou **F** e no dia seguinte é **C**, **DC**, **DS**, **E**, **F** ou **T**. Esta troca corresponde no modelo à seguinte variável de decisão

$$y_{ij}^{7} = \begin{cases} 1 & \text{se o enfermeiro } i \text{ deve trocar o seu turno } \mathbf{DC} \text{ por um turno } \mathbf{N} \text{ no dia } j, \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

para cada par $i \in I, j \in J$ acompanhada das seguintes restrições:

$$y^7_{ij} = 0, \quad i \in I, \text{ e } j \text{ tq} \quad j \notin \mathbf{DC}_i \tag{7a}$$
$$y^7_{ij} = 0, \quad i \in I \text{ e } j \text{ tq} \quad j-1 \in \mathbf{DF}_i \tag{7b}$$
$$y^7_{ij} = 0, \quad i \in I \text{ e } j \text{ tq} \quad j+1 \in \mathbf{DF}_i \tag{7c}$$
$$y^7_{ij} \leq x_{i,j-1} + y^3_{i,j-1} + y^4_{i,j-1}, \quad i \in I \text{ e } j \text{ tq } j-1 \in \mathbf{T}_i, \tag{7d}$$
$$y^7_{ij} \leq 1 - y^3_{i,j-1} - y^4_{i,j-1}, \quad i \in I \text{ e } j \text{ tq } j-1 \in \mathbf{T}_i, \tag{7e}$$
$$y^7_{ij} \leq (1 - x_{i,j-1}) + x_{i,j+1}, \quad i \in I \text{ e } j \text{ tq } j-1 \in \mathbf{T}_i, \quad j+1 \in \mathbf{N}_i \tag{7f}$$
$$y^7_{ij} \leq (1 - x_{i,j-1}) + 1 - (y^8_{i,j+1} + y^{10}_{i,j+1}), \quad i \in I \text{ e } j \text{ tq } j-1 \in \mathbf{T}_i, \quad j+1 \in \mathbf{E}_i \tag{7g}$$
$$y^7_{ij} \leq 1 - y^8_{i,j-1} - y^9_{i,j-1} - y^{10}_{i,j-1}, \quad i \in I \text{ e } j \text{ tq } j-1 \in \mathbf{E}_i, \tag{7h}$$
$$y^7_{ij} \leq x_{i,j+1}, \quad i \in I \text{ e } j \text{ tq } j-1 \in \mathbf{E}_i, \quad j+1 \in \mathbf{N}_i \tag{7i}$$
$$y^7_{ij} \leq 1 - (y^8_{i,j+1} + y^{10}_{i,j+1}), \quad i \in I \text{ e } j \text{ tq } j-1 \in \mathbf{E}_i, \quad j+1 \in \mathbf{E}_i \tag{7j}$$
$$y^7_{ij} \leq x_{i,j+1}, \quad i \in I \text{ e } j \text{ tq } j-1 \in \mathbf{F}_i, \quad j+1 \in \mathbf{N}_i \tag{7k}$$
$$y^7_{ij} \leq 1 - (y^8_{i,j+1} + y^{10}_{i,j+1}), \quad i \in I \text{ e } j \text{ tq } j-1 \in \mathbf{F}_i, \quad j+1 \in \mathbf{E}_i \tag{7l}$$

Nota: As trocas que se seguem dizem respeito ao turno **F**. Não foram consideradas as restrições em que o turno no dia anterior ou no dia seguinte ao dia para o qual queremos fazer a troca era um feriado pois, em Portugal, não existem dois dias feriado consecutivos.

Troca 8: E → M

Consideremos a situação em que um enfermeiro i está escalonado para gozar o feriado **E** no dia j e pretendemos considerar a possibilidade de trocar esse turno para **M**. Note-se que esta troca só pode acontecer quando no dia anterior o turno é **C**, **DC**, **DS**, **E** **M**, **N** ou **DF** e no dia seguinte é **C**, **DC**, **DS**, **E**, **F** **M**, **T**ou **DF**. Esta troca corresponde no modelo à seguinte variável de decisão

$$y^8_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se o enfermeiro } i \text{ deve trocar o seu turno } \mathbf{E} \text{ por um turno } \mathbf{M} \text{ no dia } j, \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

para cada par $i \in I, j \in J$ acompanhada das seguintes restrições:

$$
\begin{array}{llll}
y^8_{ij} = 0, & i \in I, \text{ e } j \text{ tq} & j \notin \mathbf{E}_i & \text{(8a)} \\
y^8_{ij} = 0, & i \in I \text{ e } j \text{ tq} & j-1 \in \mathbf{F}_i & \text{(8b)} \\
y^8_{ij} \leq x_{i,j-1} + y^3_{i,j-1} + y^4_{i,j-1}, & i \in I \text{ e } j \text{ tq } j-1 \in \mathbf{T}_i & & \text{(8c)} \\
y^8_{ij} \leq 1 - (x_{i,j-1} + y^3_{i,j-1} + y^4_{i,j-1}) + x_{i,j-1}, & i \in I \text{ e } j \text{ tq } j-1 \in \mathbf{T}_i, & j+1 \in \mathbf{N}_i & \text{(8d)} \\
y^8_{ij} \leq 1 - y^1_{i,j-1}, & i \in I \text{ e } j \text{ tq } j-1 \in \mathbf{M}_i, & & \text{(8e)} \\
y^8_{ij} \leq 1 - y^4_{i,j+1}, & i \in I \text{ e } j \text{ tq } j-1 \in \mathbf{M}_i, & j+1 \in \mathbf{T}_i & \text{(8f)} \\
y^8_{ij} \leq 1 - y^4_{i,j+1}, & i \in I \text{ e } j \text{ tq } j-1 \in \mathbf{M}_i, & j+1 \in \mathbf{DC}_i & \text{(8g)} \\
y^8_{ij} \leq 1 - y^4_{i,j+1}, & i \in I \text{ e } j \text{ tq } j-1 \in \mathbf{M}_i, & j+1 \in \mathbf{M}_i & \text{(8h)} \\
y^8_{ij} \leq 1 - y^6_{i,j+1}, & i \in I \text{ e } j \text{ tq } j-1 \in \mathbf{DC}_i, & & \text{(8i)} \\
y^8_{ij} \leq y^2_{i,j+1}, & i \in I \text{ e } j \text{ tq } j-1 \in \mathbf{DS}_i, & & \text{(8j)} \\
y^8_{ij} \leq x_{i,j+1}, & i \in I \text{ e } j \text{ tq } j-1 \in \mathbf{DF}_i, & j+1 \in \mathbf{N}_i & \text{(8k)} \\
y^8_{ij} \leq 1 - y^2_{i,j+1}, & i \in I \text{ e } j \text{ tq } j-1 \in \mathbf{DF}_i, & j+1 \in \mathbf{M}_i & \text{(8l)} \\
y^8_{ij} \leq 1 - y^4_{i,j+1}, & i \in I \text{ e } j \text{ tq } j-1 \in \mathbf{DF}_i, & j+1 \in \mathbf{T}_i & \text{(8m)} \\
y^8_{ij} \leq 1 - y^7_{i,j+1}, & i \in I \text{ e } j \text{ tq } j-1 \in \mathbf{DF}_i, & j+1 \in \mathbf{DC}_i & \text{(8n)}
\end{array}
$$

Troca 9: E → T

Consideremos a situação em que um enfermeiro i está escalonado para gozar o feriado **E** no dia j e pretendemos considerar a possibilidade de trocar esse turno para **T**. Note-se que esta troca só pode acontecer quando no dia anterior o turno é **C**, **DC**, **DS**, **E**, **M**, **T**, **N** ou **DF** e no dia seguinte é **C**, **DC**, **DS**, **E**, **F**ou **T**. Esta troca corresponde no modelo à seguinte variável de decisão

$$
y^9_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se o enfermeiro } i \text{ deve trocar o seu turno } \mathbf{E} \text{ por um turno } \mathbf{T} \text{ no dia } j, \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}
$$

para cada par $i \in I, j \in J$ acompanhada das seguintes restrições:

$$y_{ij}^9 = 0, \quad i \in I, \text{ e } j \text{ tq} \quad j \notin \mathbf{E}_i \tag{9a}$$
$$y_{ij}^9 = 0, \quad i \in I, \text{ e } j \text{ tq} \quad j-1 \in \mathbf{F}_i \tag{9b}$$
$$y_{ij}^9 = 0, \quad i \in I, \text{ e } j \text{ tq} \quad j+1 \in \mathbf{DF}_i \tag{9c}$$
$$y_{ij}^9 \leq x_{i,j+1} + y_{i,j+1}^1 + y_{i,j+1}^2, \quad i \in I, \text{ e } j \text{ tq } j-1 \in \mathbf{DC}_i, \quad j+1 \in \mathbf{M}_i \tag{9d}$$
$$y_{ij}^9 \leq 1 - y_{i,j+1}^2, \quad i \in I, \text{ e } j \text{ tq } j-1 \in \mathbf{DC}_i, \quad j+1 \in \mathbf{M}_i \tag{9e}$$
$$y_{ij}^9 \leq x_{i,j+1} + y_{i,j+1}^1 + y_{i,j+1}^2, \quad i \in I, \text{ e } j \text{ tq } j-1 \in \mathbf{DS}_i, \quad j+1 \in \mathbf{M}_i \tag{9f}$$
$$y_{ij}^9 \leq 1 - y_{i,j+1}^2, \quad i \in I, \text{ e } j \text{ tq } j-1 \in \mathbf{DS}_i, \quad j+1 \in \mathbf{M}_i \tag{9g}$$
$$y_{ij}^9 \leq 1 - (y_{i,j+1}^3 + y_{i,j+1}^4), \quad i \in I, \text{ e } j \text{ tq } j-1 \in \mathbf{DS}_i, \quad j+1 \in \mathbf{T}_i \tag{9h}$$
$$y_{ij}^9 \leq x_{i,j+1} + y_{i,j+1}^1 + y_{i,j+1}^2, \quad i \in I, \text{ e } j \text{ tq } j-1 \in \mathbf{M}_i, \quad j+1 \in \mathbf{M}_i \tag{9i}$$
$$y_{ij}^9 \leq 1 - y_{i,j+1}^2, \quad i \in I, \text{ e } j \text{ tq } j-1 \in \mathbf{M}_i, \quad j+1 \in \mathbf{M}_i \tag{9j}$$
$$y_{ij}^9 \leq 1 - (y_{i,j+1}^3 + y_{i,j+1}^4), \quad i \in I, \text{ e } j \text{ tq } j-1 \in \mathbf{M}_i, \quad j+1 \in \mathbf{T}_i \tag{9k}$$
$$y_{ij}^9 \leq 1 - (y_{i,j+1}^1 + y_{i,j+1}^2), \quad i \in I, \text{ e } j \text{ tq } j-1 \in \mathbf{M}_i, \quad j+1 \in \mathbf{DC}_i \tag{9l}$$
$$y_{ij}^9 \leq x_{i,j+1}, \quad i \in I, \text{ e } j \text{ tq } j-1 \in \mathbf{T}_i, \quad j+1 \in \mathbf{N}_i \tag{9m}$$
$$y_{ij}^9 \leq x_{i,j+1} + y_{i,j+1}^1 + y_{i,j+1}^2, \quad i \in I, \text{ e } j \text{ tq } j-1 \in \mathbf{N}_i, \quad j+1 \in \mathbf{M}_i \tag{9n}$$
$$y_{ij}^9 \leq 1 - y_{i,j+1}^2, \quad i \in I, \text{ e } j \text{ tq } j-1 \in \mathbf{N}_i, \quad j+1 \in \mathbf{M}_i \tag{9o}$$
$$y_{ij}^9 \leq x_{i,j+1} + y_{i,j+1}^1 + y_{i,j+1}^2, \quad i \in I, \text{ e } j \text{ tq } j-1 \in \mathbf{DF}_i, \quad j+1 \in \mathbf{M}_i \tag{9p}$$
$$y_{ij}^9 \leq 1 - y_{i,j+1}^2, \quad i \in I, \text{ e } j \text{ tq } j-1 \in \mathbf{DF}_i, \quad j+1 \in \mathbf{M}_i \tag{9q}$$
$$y_{ij}^9 \leq x_{i,j+1}, \quad i \in I, \text{ e } j \text{ tq } j-1 \in \mathbf{DF}_i, \quad j+1 \in \mathbf{N}_i \tag{9r}$$
$$y_{ij}^9 \leq 1 - (y_{i,j+1}^3 + y_{i,j+1}^4), \quad i \in I, \text{ e } j \text{ tq } j-1 \in \mathbf{DF}_i, \quad j+1 \in \mathbf{T}_i \tag{9s}$$
$$y_{ij}^9 \leq 1 - (y_{i,j+1}^1 + y_{i,j+1}^2), \quad i \in I, \text{ e } j \text{ tq } j-1 \in \mathbf{DF}_i, \quad j+1 \in \mathbf{DC}_i \tag{9t}$$

Troca 10: E → N

Consideremos a situação em que um enfermeiro i está escalonado para gozar o feriado **E** no dia j e pretendemos considerar a possibilidade de trocar esse turno para **N**. Note-se que esta troca só pode acontecer quando no dia anterior o turno é **C**, **DC**ou **DS**e no dia seguinte é **C**, **DC**, **DS**ou **T**. Esta troca corresponde no modelo à seguinte variável de decisão

$$y_{ij}^{10} = \begin{cases} 1 & \text{se o enfermeiro } i \text{ deve trocar o seu turno } \mathbf{E} \text{ por um turno } \mathbf{N} \text{ no dia } j, \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

para cada par $i \in I, j \in J$ acompanhada das seguintes restrições:

$$y_{ij}^{10} = 0, \quad i \in I, \text{ e } j \text{ tq} \quad j \notin \mathbf{E}_i \tag{10a}$$

$$y_{ij}^{10} = 0, \quad i \in I, \text{ e } j \text{ tq} \quad j-1 \in \mathbf{F}_i \tag{10b}$$

$$y_{ij}^{10} = 0, \quad i \in I, \text{ e } j \text{ tq} \quad j-1 \in \mathbf{DF}_i \tag{10c}$$

$$y_{ij}^{10} = 0, \quad i \in I, \text{ e } j \text{ tq} \quad j+1 \in \mathbf{DF}_i \tag{10d}$$

$$y_{ij}^{10} \leq x_{i,j-1} + y_{i,j-1}^1 + y_{i,j-1}^2, \quad i \in I, \text{ e } j \text{ tq} \quad j-1 \in \mathbf{M}_i \tag{10e}$$

$$y_{ij}^{10} \leq 1 - (y_{i,j-1}^1 + y_{i,j-1}^2), \quad i \in I, \text{ e } j \text{ tq} \quad j-1 \in \mathbf{M}_i \tag{10f}$$

$$y_{ij}^{10} \leq (1 - x_{i,j-1}) + x_{i,j-1} + y_{i,j+1}^1 + y_{i,j+1}^2, \quad i \in I, \text{ e } j \text{ tq } j-1 \in \mathbf{M}_i, \quad j+1 \in \mathbf{M}_i \tag{10g}$$

$$y_{ij}^{10} \leq (1 - x_{i,j-1}) + 1 - y_{i,j+1}^2, \quad i \in I, \text{ e } j \text{ tq } j-1 \in \mathbf{M}_i, \quad j+1 \in \mathbf{M}_i \tag{10h}$$

$$y_{ij}^{10} \leq (1 - x_{i,j-1}) + 1 - (y_{i,j+1}^3 + y_{i,j+1}^4), \quad i \in I, \text{ e } j \text{ tq } j-1 \in \mathbf{M}_i, \quad j+1 \in \mathbf{T}_i \tag{10i}$$

$$y_{ij}^{10} \leq (1 - x_{i,j-1}) + 1 - (y_{i,j+1}^5 + y_{i,j+1}^7), \quad i \in I, \text{ e } j \text{ tq } j-1 \in \mathbf{M}_i, \quad j+1 \in \mathbf{DC}_i \tag{10j}$$

$$y_{ij}^{10} \leq x_{i,j-1} + y_{i,j-1}^3 + y_{i,j-1}^4, \quad i \in I, \text{ e } j \text{ tq} \quad j-1 \in \mathbf{T}_i \tag{10k}$$

$$y_{ij}^{10} \leq 1 - (y_{i,j-1}^3 + y_{i,j-1}^4), \quad i \in I, \text{ e } j \text{ tq} \quad j-1 \in \mathbf{T}_i \tag{10l}$$

$$y_{ij}^{10} \leq (1 - x_{i,j-1}) + x_{i,j+1}, \quad i \in I, \text{ e } j \text{ tq } j-1 \in \mathbf{T}_i, \quad j+1 \in \mathbf{N}_i \tag{10m}$$

$$y_{ij}^{10} \leq 1 - (y_{i,j-1}^5 + y_{i,j-1}^6 + y_{i,j-1}^7), \quad i \in I, \text{ e } j \text{ tq} \quad j-1 \in \mathbf{DC}_i \tag{10n}$$

$$y_{ij}^{10} \leq x_{i,j-1} + y_{i,j+1}^1 + y_{i,j+1}^2, \quad i \in I, \text{ e } j \text{ tq } j-1 \in \mathbf{DC}_i, \quad j+1 \in \mathbf{M}_i \tag{10o}$$

$$y_{ij}^{10} \leq 1 - y_{i,j+1}^2, \quad i \in I, \text{ e } j \text{ tq } j-1 \in \mathbf{DC}_i, \quad j+1 \in \mathbf{M}_i \tag{10p}$$

$$y_{ij}^{10} \leq x_{i,j-1} + y_{i,j+1}^1 + y_{i,j+1}^2, \quad i \in I, \text{ e } j \text{ tq } j-1 \in \mathbf{DS}_i, \quad j+1 \in \mathbf{M}_i \tag{10q}$$

$$y_{ij}^{10} \leq 1 - y_{i,j+1}^2, \quad i \in I, \text{ e } j \text{ tq } j-1 \in \mathbf{DS}_i, \quad j+1 \in \mathbf{M}_i \tag{10r}$$

Uma vez considerados todos os tipos de trocas existentes neste problema e respectivas restrições a elas associadas, resta definir uma restrição que diz respeito a todas elas. Esta restrição considera o facto de, para um enfermeiro $i \in I$ num dia $j \in J$ só poder ser feita uma troca, isto é,

$$x_{ij} + \sum_{k=1}^{10} y_{ij}^{k} \leq 1, \text{ para cada par } i \in I \text{ } e \text{ } j \in J.$$

Resta definir agora as restrições que dizem respeito ao número de enfermeiros necessários em cada turno. Tal como foi feito na subsecção anterior, consideremos também os conjuntos

I_1={todos os enfermeiros do primeiro nível de integração}

I_2={todos os enfermeiros do primeiro e segundo níveis de integração}

I_3={todos os enfermeiros do primeiro, segundo e terceiro níveis de integração}

Consideremos também as três tabelas da subsecção anterior que definem o número de enfermeiros que devem estar em cada turno, a cada dia do mês.

	Seg e Ter	**Quar Qui e Sex**	**Fins de Semana e Feriados**
Manhã	pelo menos 3	pelo menos 3	pelo menos 1
Tarde	pelo menos 1	pelo menos 1	pelo menos 1
Noite	pelo menos 1	pelo menos 1	pelo menos 1

Tabela 1: Número de enfermeiros do conjunto I_1 necessários em dada turno, a cada dia da semana.

Seja $A^1 = [a_j^{1M}]_{1\times 28}$ o vector que contém, para cada dia j do mês, o número mínimo de enfermeiros de primeiro nível que deverão estar no serviço em cada manhã. De forma análoga definimos os vectores $A^1 = [a_j^{1T}]_{1\times 28}$ e $A^1 = [a_j^{1N}]_{1\times 28}$.

	Seg e Ter	**Quar Qui e Sex**	**Fins de Semana e Feriados**
Manhã	pelo menos 5	pelo menos 5	pelo menos 2
Tarde	pelo menos 2	pelo menos 2	pelo menos 2
Noite	pelo menos 2	pelo menos 2	pelo menos 2

Tabela 2: Número de enfermeiros do conjunto I_2 necessários em dada turno, a cada dia da semana.

Seja $A^2 = [a_j^{2M}]_{1\times 28}$ o vector que contém, para cada dia j do mês, o número mínimo de enfermeiros de primeiro e segundo níveis que deverão estar no serviço em cada manhã. De forma análoga definimos os vectores $A^2 = [a_j^{2T}]_{1\times 28}$ e $A^2 = [a_j^{2N}]_{1\times 28}$.

	Seg e Ter	**Quar Qui e Sex**	**Fins de Semana e Feriados**
Manhã	7	8	5
Tarde	4	4	3
Noite	3	3	3

Tabela 2: Número de enfermeiros do conjunto I_3 necessários em dada turno, a cada dia da semana.

Seja $A^3 = [a_j^{3M}]_{1\times 28}$ o vector que contém, para cada dia j do mês, o número de enfermeiros de primeiro, segundo e terceiro níveis necessários no serviço em cada manhã. De forma análoga definimos os vectores $A^3 = [a_j^{3T}]_{1\times 28}$ e $A^3 = [a_j^{3N}]_{1\times 28}$.

Pdemos definir agora as seguintes restrições

Manhã do dia $j, \in J$

I_1 :

$$\underbrace{\sum_{i\in I_1} M - \sum_{i\in I_1 : r_{ij}=M} x_{ij} - \sum_{i\in I_1} y_{ij}^1 - \sum_{i\in I_1} y_{ij}^2 + \sum_{i\in I_1} y_{ij}^3 + \sum_{i\in I_1} y_{ij}^5 + \sum_{i\in I_1} y_{ij}^8}_{número\ de\ enfermeiros\ que\ deverão\ de\ primeiro\ nível,\ na\ manhã\ do\ dia\ j} \geq a_j^{1M}$$

Notemos que o número de enfermeiros do primeiro nível de integração que devem estar na manhã de um qualquer dia do mês é igual à soma de todos os enfermeiros de primeiro nível que já tinham o turno **M** no seu horário, retirando a soma daqueles que estavam escalonados para uma manhã no seu horário original, e cujo trno foi trocado para outro diferente. A este valor temos ainda de somar o número de enfermeiros (também de primeiro nível) para os quais no horário original estava um turno diferente do turno **M** e que agora foi trocado para um turno **M**.

Esta justificação é análoga para o caso dos enfermeiros dos grupos I_2 e I_3, e também para o caso das restrições relativas à tarde e noite do dia $j, j \in J$.

I_2 :

$$\underbrace{\sum_{i\in I_2} M - \sum_{i\in I_2: r_{ij}=M} x_{ij} - \sum_{i\in I_2} y^1_{ij} - \sum_{i\in I_2} y^2_{ij} + \sum_{i\in I_2} y^3_{ij} + \sum_{i\in I_2} y^5_{ij} + \sum_{i\in I_2} y^8_{ij}}_{\textit{número de enfermeiros que deverão estar de primeiro e segundo níveis, na manhã do dia } j} \geq a_j^{2M}$$

I_3 :

$$\underbrace{\sum_{i\in I_3} M - \sum_{i\in I_3: r_{ij}=M} x_{ij} - \sum_{i\in I_3} y^1_{ij} - \sum_{i\in I_3} y^2_{ij} + \sum_{i\in I_3} y^3_{ij} + \sum_{i\in I_3} y^5_{ij} + \sum_{i\in I_3} y^8_{ij} = a_j^{3M}}_{\textit{número de enfermeiros que deverão estar de primeiro, segundo e terceiro níveis, na manhã do dia } j} = a_j^{3M}$$

Tarde do dia j, $j \in J$

I_1 :

$$\underbrace{\sum_{i\in I_1} T - \sum_{i\in I_1: r_{ij}=T} x_{ij} - \sum_{i\in I_1} y^3_{ij} - \sum_{i\in I_1} y^4_{ij} + \sum_{i\in I_1} y^1_{ij} + \sum_{i\in I_1} y^6_{ij} + \sum_{i\in I_1} y^9_{ij}}_{\textit{número de enfermeiros que deverão estar de primeiro nível, na tarde do dia } j} \geq a_j^{1T}$$

I_2 :

$$\underbrace{\sum_{i\in I_2} T - \sum_{i\in I_2: r_{ij}=T} x_{ij} - \sum_{i\in I_2} y^3_{ij} - \sum_{i\in I_2} y^4_{ij} + \sum_{i\in I_2} y^1_{ij} + \sum_{i\in I_2} y^6_{ij} + \sum_{i\in I_2} y^9_{ij}}_{\textit{número de enfermeiros que deverão estar de primeiro e segundo níveis, na tarde do dia } j} \geq a_j^{2T}$$

I_3 :

$$\underbrace{\sum_{i\in I_3} T - \sum_{i\in I_3: r_{ij}=T} x_{ij} - \sum_{i\in I_3} y^3_{ij} - \sum_{i\in I_3} y^4_{ij} + \sum_{i\in I_3} y^1_{ij} + \sum_{i\in I_3} y^6_{ij} + \sum_{i\in I_3} y^9_{ij}}_{\textit{número de enfermeiros que deverão estar de primeiro, segundo e terceiro níveis, na tarde do dia } j} = a_j^{3T}$$

Noite do dia j, $j \in J$

Relativamente a este turno, as restrições são um pouco mais simples que as anteriores, pois o turno noite nunca dá lugar a outro tipo de turno de trabalho. Portanto, temos

I_1 :

$$\underbrace{\sum_{i\in I_1} N - \sum_{i\in I_1:r_{ij}=N} x_{ij} + \sum_{i\in I_1} y_{ij}^2 + \sum_{i\in I_1} y_{ij}^4 + \sum_{i\in I_1} y_{ij}^7 + \sum_{i\in I_1} y_{ij}^{10}}_{número\ de\ enfermeiros\ que\ deverão\ estar\ de\ primeiro\ nível,\ na\ noite\ do\ dia\ j} \geq a_j^{1N}$$

I_2 :

$$\underbrace{\sum_{i\in I_2} N - \sum_{i\in I_2:r_{ij}=N} x_{ij} + \sum_{i\in I_2} y_{ij}^2 + \sum_{i\in I_2} y_{ij}^4 + \sum_{i\in I_2} y_{ij}^7 + \sum_{i\in I_2} y_{ij}^{10}}_{número\ de\ enfermeiros\ que\ deverão\ estar\ de\ primeiro\ e\ segundo\ níveis,\ na\ noite\ do\ dia\ j} \geq a_j^{2N}$$

I_3 :

$$\underbrace{\sum_{i\in I_3} N - \sum_{i\in I_3:r_{ij}=N} x_{ij} + \sum_{i\in I_3} y_{ij}^2 + \sum_{i\in I_3} y_{ij}^4 + \sum_{i\in I_3} y_{ij}^7 + \sum_{i\in I_3} y_{ij}^{10}}_{número\ de\ enfermeiros\ que\ deverão\ estar\ de\ primeiro,\ segundo\ e\ terceiro\ níveis,\ na\ noite\ do\ dia\ j} = a_j^{3n}$$

Uma vez definidas todas as restrições, temos a seguinte

Função objectivo:

$$min\ \sum_{j=1}^{28}(x_{ij} + y_{ij}^1 + y_{ij}^2 + y_{ij}^3 + y_{ij}^4 + y_{ij}^5 + y_{ij}^6 + y_{ij}^7 + y_{ij}^8 + y_{ij}^9 + y_{ij}^{10})p_{ij},\ i \in I$$

onde

p_{ij} representa o peso atribuído ao enfermeiro i no dia j, se este efectuar cada uma das trocas consideradas.

Esta função irá minimizar, para cada enfermeiro, o peso associado a cada uma das trocas que o seu horário irá sofrer. Aquele *peso*, que foi introduzido nesta função varia consoante a troca que eu associo a cada turno de cada enfermeiro durante o mês e, é tanto maior, quanto menos vantajosa for essa troca para o horário. Ao minimizarmos os pesos associados a cada troca estamos, assim, a garantir que sejam efectuadas as trocas "menos pesadas" no horário, isto é, estamos a minimizar a possibilidade de serem feitas trocas que são menos vantajosas para cada enfermeiro.

7 Conclusão

O trabalho que foi desenvolvido no âmbito do estágio "Elaboração de Horários de Enfermeiros" e que se encontra descrito neste relatório teve, por parte do Centro Hospitalar de Coimbra, a orientação do Enfermeiro-Chefe da Unidade de Cirurgia/Queimados do Hospital Pediátrico de Coimbra, que disponibilizou toda a informação necessária para que eu conseguisse entender e descrever o problema. Toda a bibliografia analisada é necessária para um entendimento do problema ao nível matemático. A análise e a modelação matemática do problema desenvolvidas e apresentadas neste relatório tiveram a orientação do Orientador do Departamento de Matemática.

8 Referências bibliográficas

[**1**] Aickelin U., Dowsland K., An Indirect Genetic Algorithm for a Nurse Scheduling Problem, Computers and Operations Research, 31(5), 761-778 (2003).

[**2**] Aickelin U., Dowsland K., Exploiting problem structure in a genetic algorithm approach to a nurse rostering problem, Journal of Scheduling 3(3), 139-153 (2000).

[**3**] Aickelin U., White P., Building Better Nurse Scheduling Algorithms, Annals of Operations Research 128, 159-177 (2004).

[**4**] Brucker P., Qu R., Burke E., Post G., A decomposition, construction and post-processing approach for nurse rostering, University of Osnabrück, Faculty of Mathematic/Informatic, Germany.

[**5**] Cheang B., Li H., Lim A., Rodrigues B., Nurse rostering problems - a bibliographic survey, European Journal of Operational Research 151, 447-460 (2003).

[**6**] Dowsland K., Nurse scheduling with tabu search and strategic oscilation, European Journal of Operational Research 106, 393-407 (1998).

[**7**] Ikegami A., Niwa A., A subproblem-centric model and approach to the nurse scheduling problem, Math. Program. Ser. B 97, 517-541 (2003)

[**8**] Jaumard B., Semet F., Vovor T., A generalized linear programming model for nurse scheduling, European Journal of Operational Research 107, 1-18 (1998).

[**9**] Millar H., Kiragu M., Cyclic and non-cycling scheduling of 12h shift nurses by network programming, European Journal of Operational Research 104, 582-592 (1998).

[**10**] Moz M., Pato M., A Genetic Algorithm Approach to a Nurse Rerostering Problem, Departamento de Matemática, Instituto Superior de Economia e Gestão da Universidade Técnica de Lisboa, Portugal.

[**11**] Moz M., Pato M., Solving the Problem of Rerostering Nurse Schedules with Hard Constraints: New Multicommodity Flow Models, Annals of Operational Research 128, 179-197 (2004).