

Paulo Tomás da Silva Tavares

Matrizes Totalmente e Quase Totalmente Unimodulares

Departamento de Matemática
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Universidade de Coimbra
2005

Dissertação submetida para satisfação parcial dos requisitos para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Resumo

Uma matriz A de componentes zeros, uns e menos uns diz-se Totalmente Unimodular, ou TU, se todos os seus subdeterminantes são zero, um ou menos um. A principal motivação pelo estudo desta classe de matrizes reside no facto de que o poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$, com b um vector de inteiros, é inteiro se a matriz A for Totalmente Unimodular. No contexto de problemas de optimização isso significa que, se A é uma matriz Totalmente Unimodular então

$$\left. \begin{array}{l} \max \quad cx \\ \text{s.a} \quad Ax \leq b, \\ \quad \quad x \in \mathbb{Z}^n \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \max \quad cx \\ \text{s.a} \quad Ax \leq b, \\ \quad \quad x \in \mathbb{R}^n, \end{array} \right.$$

para todo o vector de inteiros b . Além disso, R. G. Bland e J. Edmonds mostraram que existe até mesmo um algoritmo combinatório (isto é, distinto do método elipsóide de L. Khachian) que resolve estes dois problemas em tempo polinomial. Maurras, Truemper e Akgül (Maurras *et al.*, 1981) também mostraram que os dois problemas anteriores podem ser resolvidos em tempo polinomial através de uma modificação no método da relaxação.

Esta dissertação pretende ser um trabalho de síntese sobre o tema das matrizes TU. Isso inclui: definição e caracterizações alternativas, classes de matrizes TU, aplicações, reconhecimento da unimodularidade total, caracterização de matrizes que violam minimamente a definição e generalização. A referência principal foi o livro de Alexander Schrijver, *Theory of Linear and Integer Programming*, mas também se recorreu ao livro de Gérard Cornuéjols, *Covering and Packing* (ver (Cornuéjols, 2001)), nomeadamente no Capítulo 5. Como se verá, incluímos a demonstração de todos os resultados com a excepção do Teorema de Seymour, fundamental para justificar o algoritmo de reconhecimento de matrizes TU, porque a sua prova usa conceitos de matróides que optámos por não cobrir neste trabalho.

No Capítulo 2 estudamos as propriedades mais elementares das matrizes TU, apresentamos exemplos e exibimos caracterizações alternativas. A mais notável das propriedades é a de que a Unimodularidade Total preserva-se após pivotação. Fornecemos exemplos de matrizes TU, as matrizes-ciclo equilibradas. As caracterizações alternativas fornecem critérios mais ou menos simples de reconhecimento de uma matriz TU. Neste grupo incluem-se os teoremas de Hoffman-Kruskal, de Camion, de Gomory e de Ghouila-Houri. Como se revelará ao longo da dissertação, o Teorema de Ghouila-Houri é particularmente útil.

No Capítulo 3 estudaremos classes de matrizes Totalmente Unimodulares relacionadas com problemas em grafos. Neste grupo incluem-se as matrizes de

incidência vértice-aresta de grafos dirigidos ou não; as matrizes de rede subjacentes a um grafo e uma árvore; e, as matrizes de incidência de cortes de um grafo. As matrizes de rede são fundamentais porque o Teorema de Seymour, já citado antes, estabelece que toda a matriz TU pode ser obtida a partir de matrizes de rede e duas matrizes específicas 5×5 TU que não são de rede através de três operações elementares que preservam a propriedade de unimodularidade total.

No Capítulo 4 descrevemos um algoritmo que averigua em tempo polinomial se uma dada matriz é ou não Totalmente Unimodular. Como primeiros ingredientes exibiremos um algoritmo que averigua em tempo polinomial se uma matriz é ou não de rede e um algoritmo que dada uma matriz

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \quad (1)$$

averigua em tempo polinomial se é possível permutar linhas/colunas de modo a obter uma matriz com o aspecto (1) mas tal que $\text{car}(B) + \text{car}(C) \leq 2$ e, quer na matriz A quer na matriz D , o número de linhas somado com o número de colunas é maior ou igual que 4. Este último problema é, na verdade, um problema de intersecção de matróides. Finalmente, apoiado pelo Teorema de Seymour, exibiremos o algoritmo para o reconhecimento da Unimodularidade Total que usa aqueles dois algoritmos recursivamente um número polinomial de vezes, o que será devidamente demonstrado.

No Capítulo 5 definimos matriz quase-TU. Uma matriz diz-se quase-TU se não é Totalmente Unimodular mas toda a sua submatriz própria é. Demonstraremos um resultado, devido a Truemper, que caracteriza matrizes quase-TU à custa de uma subclasse das matrizes Totalmente Unimodulares, as matrizes Totalmente Unimodulares por Complementos. Por esse facto, o reconhecimento de uma matriz quase-TU também pode ser feito em tempo polinomial, adaptando o algoritmo do capítulo anterior. Além disso, matrizes quase-TU possuem propriedades muito curiosas.

Finalmente, no Capítulo 6 estudamos uma classe de matrizes que contém estritamente a classe das matrizes TU, as matrizes Unimodulares. Uma matriz A de característica r diz-se Unimodular se em toda a sua base (conjunto maximal de colunas linearmente independente) o máximo divisor comum dos seus subdeterminantes de ordem r é um. Veremos que existe uma relação estreita entre aquelas duas classes de matrizes. Por exemplo, A é TU se e só se $[I \ A]$ é Unimodular. Veremos caracterizações alternativas de Unimodularidade, em particular, uma caracterização que usa o conceito de Unimodularidade Total. Por esse facto, o reconhecimento de uma matriz Unimodular também é resolúvel

em tempo polinomial, adaptando o algoritmo de reconhecimento de Unimodularidade Total descrito no Capítulo 4.

No livro de Alexander Schrijver pode o leitor encontrar outros desenvolvimentos afins. No entanto, julgamos que o nosso trabalho, longe de encerrar todo o conhecimento à volta deste assunto, permite ao leitor obter uma visão simultaneamente geral e detalhada acerca de matrizes TU.

Conteúdo

1	Introdução	1
1.1	Assunto abordado nesta dissertação	1
1.2	Estrutura da dissertação	4
1.3	Conceitos e resultados elementares	6
2	Matriz Totalmente Unimodular	31
2.1	Definição e propriedades	33
2.2	Exemplo: matriz-ciclo	36
2.3	Outras caracterizações	38
3	Aplicações da Unimodularidade Total	69
3.1	Matrizes de incidência de grafos não-dirigidos	71
3.2	Matrizes de incidência de grafos dirigidos	74
3.3	Matrizes de rede	78
3.4	Matrizes de incidência de cortes	102
4	Reconhecimento da Unim. Total	117
4.1	Reconhec. de uma matriz de rede	119
4.2	Reconhec. de uma matriz Total. Unimodular	139
5	Matriz quase Totalmente Unimodular	175
5.1	Unimodularidade Total por Complementos	177
5.2	Propriedades e outras caracterizações	184
6	Matriz Unimodular	195
6.1	Definição e propriedades	198
6.2	Relação com a Unimodularidade Total	207
	Referências Bibliográficas	215

Agradecimentos

Agradeço ao Sr. Prof. Dr. João Soares a orientação e o apoio constante prestado na elaboração deste trabalho. Concretamente, agradeço todas as correcções de lógica, todas as sugestões para tornar o texto mais claro, organizado, com mais rigor e sucinto, a excelente literatura que me facultou e, em suma, o ter-me ensinado a escrever bem texto matemático. Agradeço-lhe todos os horizontes matemáticos que se me abriram, o crescimento do gosto pela Programação Linear e ainda, e especialmente, toda a paciência que teve para comigo em situações concretas.

Agradeço também aos restantes membros do júri, o Prof. Dr. Paulo Bárcia, da Faculdade de Economia da Universidade Nova de Lisboa e o Prof. Dr. José Luís Esteves dos Santos do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra. Muito me honraram com a sua presença no dia da defesa desta dissertação e agradeço-lhes a atenção que tiveram para comigo ao lerem este texto matemático e todas as correcções, sugestões, críticas, esclarecimentos, etc, que muito contribuíram para o valorizar.

Agradeço carinhosamente à minha namorada, Helena Maria, que, leiga nestes assuntos, sempre me acompanhou de perto, com muito afecto e inspirando-me confiança. Na mesma linha, agradeço aos meus pais que, também nesta ocasião, estiveram sempre comigo.

Agradeço também aos meus colegas de mestrado do Grupo de Análise Numérica, Catarina Domingues, Jorge Oliveira, Gonçalo Pena, João Ricardo e ao Pascoal, alguns esclarecimentos, a boa camaradagem e o ânimo que sempre me inculcaram.

Paulo Tomás da Silva Tavares
Coimbra, Janeiro de 2006.

Capítulo 1

Introdução

1.1 Assunto abordado nesta dissertação

As matrizes Totalmente Unimodulares e a sua aplicação em Programação Linear Inteira constituem o assunto principal deste trabalho. Matrizes com esta característica aparecem frequentemente nas formulações de problemas de otimização combinatória (isto é, problemas de otimização linear em grafos) quando são, por exemplo, a matriz de incidência vértice-arco (ou aresta) de um grafo dirigido ou não-dirigido, a matriz de rede associada a um grafo e uma árvore, ou uma matriz de cortes de um grafo, entre outras.

O problema geral é $\max\{cx : Ax \leq b, x \text{ inteiro}\}$, em que A é uma matriz de inteiros e b, c são vectores inteiros. A unimodularidade total de A é condição suficiente para que este problema seja equivalente à sua relaxação linear, isto é, ao problema $\max\{cx : Ax \leq b\}$ que é bem mais tratável. É possível estabelecer uma condição necessária e suficiente para a existência de soluções óptimas inteiras numa classe de problemas de otimização linear, em termos da unimodularidade total da matriz das restrições, que é o Teorema de Hoffman-Kruskal. Daí que seja importante saber se uma dada matriz de zeros, uns e menos uns é TU ou não, o que, no geral, não é simples. As caracterizações alternativas de unimodularidade total podem fornecer critérios simples de reconhecimento, sobretudo na presença de determinada propriedade da matriz, como é o caso, por exemplo do Teorema de Ghouila-Houri. Da unimodularidade total da matriz das restrições em problemas de otimização linear, resultam demonstrações alternativas para os bem conhecidos Teorema do Fluxo Máximo-Corte Mínimo, Teorema de König ou Teorema de Dilworth, por exemplo.

Um exemplo relevante de matrizes TU é o das matrizes de rede. Seymour (Seymour, 1985) mostrou que toda a matriz TU pode ser obtida a partir de matrizes de rede e de duas matrizes específicas 5×5 TU que não são de rede, através de seis operações unárias e de três operações binárias com matrizes, que

preservam a unimodularidade total. Edmonds e Giles (1977) observaram que se considerarmos um digrafo $G = (V, E)$, então uma dada matriz M é matriz de rede representada por G (e uma árvore dirigida cujo conjunto de vértices é V) se e só se M é matriz de incidência de cortes nos dois sentidos de uma família $\mathcal{F} \subseteq 2^V$ relativamente a G tal que o par (V, \mathcal{F}) é sem cruzamentos. A prova reside no facto de todo o par (V, \mathcal{F}) , com $\mathcal{F} \subseteq 2^V$, sem cruzamentos poder ser representado, num sentido que precisaremos, por uma árvore cujo conjunto de vértices é V .

Baseado no Teorema de Seymour, é possível descrever um algoritmo polinomial para reconhecimento de uma matriz TU se conseguirmos descrever também um algoritmo polinomial para reconhecimento de matrizes de rede e um algoritmo polinomial que implementa trocas de linhas/colunas numa dada matriz de modo a transformá-la numa matriz com o aspecto

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix},$$

onde, quer na matriz A quer na matriz D , o número de linhas somado com o número de colunas é maior ou igual que 4 e $\text{car}(B) + \text{car}(C)$ é o menor possível. O algoritmo para reconhecimento de matrizes de rede reside na averiguação da conexidade de vários adequados grafos não-dirigidos e da bipartição de apenas um, associados ambos a cada uma de adequadas submatrizes da matriz inicial que vão sendo recursivamente definidas. O outro algoritmo referido é essencialmente a aplicação de um número polinomial de vezes do algoritmo da intersecção de matróides proposto por Edmonds (ver (Cunningham & Edmonds, 1980)) e que é polinomial.

Depois de analisar as matrizes TU, definiremos e estudaremos algumas características das matrizes quase TU. Todas as matrizes quase TU são não-singulares. Veremos que uma matriz A não-singular de zeros uns e menos uns é quase TU se e só se toda a submatriz não-singular de A^{-1} tem determinante igual a $\pm 1/2$. Para provar isto é crucial observar que o conjunto das submatrizes não-singulares próprias de A^{-1} é o conjunto das matrizes inversas dos complementos Schur em A . Uma outra caracterização alternativa de matriz quase TU, que também recorre à matriz inversa, refere que uma matriz quadrada é quase TU se e só se uma adequada matriz quadrada de ordem inferior em uma unidade pertence a uma subclasse das matrizes TU, as matrizes Totalmente Unimodulares por Complementos, ou CTU. Por definição, uma matriz CTU é uma matriz de zeros e uns TU mas tal que todas as matrizes que se obtém dela através de sucessivas operações de complemento (por linha ou por coluna) também são TU. Uma operação de complemento numa matriz U , de zeros e uns, relativamente a uma

linha i (coluna j) consiste em, à excepção dos elementos da linha i (coluna j), substituir todos os elementos de cada coluna (linha) k tal que $U_{ik=1}$ ($U_{kj} = 1$) pelo seu complemento. Qualquer matriz obtida a partir de U após uma sequência qualquer de operações de complemento, pode ser construída com, no máximo, duas operações de complemento, uma por linha e outra por coluna, seguidas de trocas de linhas/columnas. Logo, se U é uma matriz quadrada de ordem, digamos, $m \geq 2$, para verificar se U é CTU basta verificar se $(m + 1)^2$ matrizes de ordem m são TU. Conseguiremos diminuir este número, bastando verificar se U é TU e se m matrizes com apenas mais uma linha que U também o são. Assim, também é possível definir um algoritmo polinomial para reconhecimento de matrizes quase TU, usando um algoritmo polinomial para reconhecimento de matrizes TU, que teremos descrito antes.

Estudaremos ainda a classe das matrizes Unimodulares que contém estritamente a classe das matrizes TU. Uma matriz Unimodular é uma matriz inteira mas não necessariamente de zeros, uns e menos uns. Já referimos que uma matriz A é TU se e só se a matriz $[I \ A]$ é Unimodular. Existem outras afinidades entre as matrizes Unimodulares e as matrizes TU. Por isso, as matrizes Unimodulares conduzirão de novo a resultados interessantes em Programação Linear Inteira. O mais importante é que o problema geral da Programação Linear Inteira, $\max\{cx : Ax \leq b, x \text{ inteiro}\}$, em que A é uma matriz de inteiros e b, c são vectores inteiros, é equivalente, para quaisquer b, c , à sua relaxação linear $\max\{cx : Ax \leq b\}$ se e só se A^T é Unimodular (já referimos que a unimodularidade total de A é condição suficiente; também é condição necessária mas apenas numa determinada classe de problemas de optimização linear). Truemper (Truemper, 1978) mostrou também que uma matriz A de inteiros é Unimodular se e só se existe uma base B de A tal que B é Unimodular e a (única) matriz C tal que $BC = A$ é TU Truemper ((Truemper, 1978) descobriu vários resultados semelhantes que relacionam o conceito de unimodularidade com o de unimodularidade total). Veremos que B é unimodular se e só se B^T pode ser conduzida à forma normal de Hermite $[H \ 0]$ com $H = I$, através de uma sequência de operações elementares unimodulares por coluna. Isto deve-se ao facto da unimodularidade de uma matriz ser preservada (enquanto a unimodularidade total não é) por substituição de uma das suas linhas pela sua adição com outra linha previamente multiplicada por um número inteiro, que corresponde a efectuar uma das operações elementares por colunas em B^T . Pelo exposto, podemos definir um algoritmo polinomial para reconhecimento de uma matriz Unimodular se dispusermos de um algoritmo polinomial para encontrar a forma normal de Hermite de uma matriz, que descreveremos e de um algoritmo polinomial para reconhecimento de uma matriz TU, que também descreveremos.

1.2 Estrutura da dissertação

A estrutura desta dissertação é a seguinte: este Capítulo é um capítulo introdutório onde estabelecemos os conceitos e resultados elementares sobre os quais assenta o desenvolvimento deste trabalho. Particularmente, no âmbito da Teoria de Grafos, Álgebra Linear, Sistemas de equações lineares Diofantinas e Teoria de Poliedros.

No Capítulo 2 definimos (na Secção 2.1) e desenvolvemos o conceito de matriz Totalmente Unimodular. Na Secção 2.1 veremos algumas propriedades destas matrizes. Na Secção 2.2 introduzimos uma primeira classe de matrizes Totalmente Unimodulares. A classe das matrizes-ciclo pode ser particionada em duas subclasses, uma é uma classe de matrizes Totalmente Unimodulares e outra é uma classe de matrizes quase Totalmente Unimodulares — conceito que abordaremos no Capítulo 5. Na Secção 2.3 veremos outras caracterizações de matriz Totalmente Unimodular.

No Capítulo 3 daremos exemplos de classes de matrizes Totalmente Unimodulares e veremos algumas aplicações relacionadas com o conceito de Unimodularidade Total, sobretudo em Teoria de Grafos. Nas secções 3.1 e 3.2 estabeleceremos alguns resultados que derivam da Unimodularidade Total das matrizes de incidência vértice-arco de grafos dirigidos (na Secção 3.2) e das matrizes de incidência vértice-aresta de grafos não-dirigidos bipartidos (na Secção 3.1). Na Secção 3.3 definimos e desenvolvemos o conceito de matriz de rede e na Secção 3.4 generalizaremos este conceito, introduzindo o conceito de matriz de incidência de cortes.

No Capítulo 4 descreveremos, na Secção 4.2, um algoritmo para reconhecimento de uma matriz Totalmente Unimodular. Para isso, e como primeiro ingrediente, precisaremos de definir, na Secção 4.1, um algoritmo para reconhecimento de matrizes de rede e provaremos que é polinomial. Veremos, na primeira subsecção, como fazer este reconhecimento em matrizes com no máximo duas entradas não-nulas por coluna e, na subsecção seguinte, veremos o caso geral. Como segundo ingrediente, na primeira subsecção da Secção 4.2, descreveremos um algoritmo (e mostraremos que é polinomial) que averigua se, dada uma matriz, podemos trocar (e, sendo possível, fá-lo-á) as suas linhas e/ou colunas de modo a transformá-la numa matriz com o aspecto (1) e nas condições referidas a seguir a (1). Depois, na subsecção seguinte, veremos como a Unimodularidade Total de uma matriz deste tipo é equivalente à Unimodularidade Total de duas submatrizes mais pequenas. Nesta altura, estaremos em condições de descrever um algoritmo para reconhecimento da Unimodularidade Total e mostraremos que a sua aplicação recursiva funciona em tempo polinomial.

No Capítulo 5 definimos matriz quase Totalmente Unimodular. Na Secção 5.1, introduzimos e desenvolvemos um conceito afim, que é o de matriz Totalmente Unimodular por Complementos. Na Secção 5.2, estabeleceremos uma caracterização das matrizes quase Totalmente Unimodulares, devida a Truemper, através das matrizes Totalmente Unimodulares por Complementos. Além disso, descreveremos um algoritmo para reconhecimento de uma matriz quase Totalmente Unimodular e mostraremos que é polinomial. Nesta última secção veremos ainda algumas propriedades das matrizes quase Totalmente Unimodulares e outras caracterizações.

No Capítulo 6 definimos matriz Unimodular. Na Secção 6.1 veremos algumas propriedades destas matrizes, uma caracterização poliedral de matriz Unimodular e um resultado em Programação Linear Inteira que resulta desta caracterização. Na Secção 6.2 veremos uma caracterização de matriz Unimodular que usa o conceito de Unimodularidade Total. Nesta secção descreveremos ainda um algoritmo polinomial para reconhecimento de uma matriz Unimodular.

1.3 Conceitos e resultados elementares

Para a boa compreensão deste trabalho é necessário que o leitor esteja familiarizado com alguns conceitos básicos de Teoria de Grafos, Álgebra Linear e Teoria de Poliedros, ainda que tivéssemos procurado minimizar essa familiaridade. De qualquer modo, como um bom conjunto de referências para esses conceitos básicos, sugerimos (West, 1996), (Schrijver, 1986) e os textos de apoio da cadeira de Teoria de Optimização do mestrado em Matemática do DMUC.

Teoria de Grafos

Um grafo dirigido (ou digrafo) $G = (V, E)$ diz-se fortemente conexo se para quaisquer dois vértices distintos $s, t \in V$ existe um caminho dirigido de s para t em G . O digrafo G diz-se (fracamente) conexo se o grafo não dirigido subjacente (aquele que resulta de eliminarmos os sentidos aos arcos) é conexo. Uma árvore dirigida é um digrafo cujo grafo não dirigido subjacente é uma árvore. Por exemplo: O grafo dirigido da Figura 1.1.(b) é uma árvore dirigida que usa os mesmos vértices do grafo dirigido da Figura 1.1.(a)

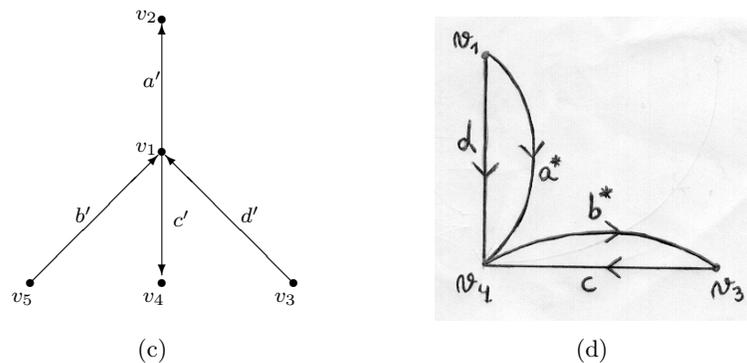
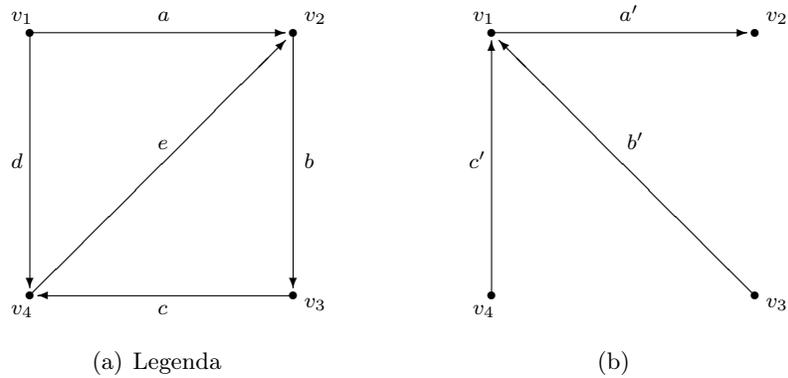


Figura 1.1: Exemplos de digrafos

Uma r -arborescência para fora é uma árvore dirigida na qual existe um

caminho dirigido de um vértice r (denominado raiz) para cada um dos restantes vértices. Uma r -arborescência para dentro é uma árvore dirigida na qual, existe um caminho de cada um dos vértice para o vértice r . A árvore dirigida da Figura 1.1.(b) é uma v_2 -arborescência para dentro. A árvore dirigida da Figura 1.1.(c) não é sequer uma arborescência porque $|\delta^+(v_1)| > 1$ e $|\delta^-(v_1)| > 1$. O conjunto $\delta^+(v_1)$ denota o conjunto de arcos com origem no vértice v_1 e o conjunto $\delta^-(v_1)$ denota o conjunto de arcos com extremidade no vértice v_1 .

Um grafo não dirigido sem arestas múltiplas e sem laços diz-se um grafo simples. Um grafo simples diz-se completo se para qualquer par de vértices desse grafo existe uma aresta que os liga.

Uma *floresta* é um grafo sem ciclos e uma árvore é uma floresta conexa. Um subgrafo $G' = (V', E')$ de $G = (V, E)$ é uma árvore abrangente de G se $V' = V$ e G' é uma árvore. A prova do seguinte teorema pode ser vista em (West, 1996) na página 68.

Teorema 1 *Seja $G = (V, E)$ um grafo simples. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a). G é uma árvore.
- (b). G não contém ciclos e $|E| = |V| - 1$.
- (c). G é conexo e $|E| = |V| - 1$.
- (d). Existe exactamente um único caminho a ligar dois quaisquer vértices de G .

Um grafo não-dirigido $G' = (V', E')$ é um subgrafo de $G = (V, E)$ se $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$. Se E' é o conjunto de todas as arestas de G com ambas as extremidades em V' , então, G' diz-se o subgrafo de G induzido por V' e denotamos G' por $G[V']$.

Seja a uma aresta de um grafo $G = (V, E)$, dirigido ou não. *Remover a* significa substituir G por $G - \{a\} \equiv (V, E \setminus \{a\})$. Esta definição pode estender-se para conjuntos de arestas $A \subseteq E$. Assim, *remover* um conjunto de arestas A significa substituir G por $G - A \equiv (V, E \setminus A)$.

Seja a uma potencial aresta para um grafo $G = (V, E)$, dirigido ou não. *A acrescentar a* significa substituir G por $G + \{a\} \equiv (V, E \cup \{a\})$. Esta definição pode estender-se para conjuntos de arestas A . Assim, *acrescentar* um conjunto de arestas A significa substituir G por $G + A \equiv (V, E \cup A)$.

Seja $a = (u, v)$ um potencial arco para um grafo dirigido $G = (V, E)$. *Contrair a* significa substituir G por $G_a = (V', E')$, para o qual $V' = V \setminus \{v\}$ e E'

obtém-se de $E \setminus \{a\}$ por substituição de cada arco $(v, j) \in \delta^+(v)$ por (u, j) , e cada arco $(j, v) \in \delta^-(v)$ por (j, u) . Por exemplo, se G for o digrafo da Figura 1.1.(a), então G_e é o digrafo da Figura 1.1.(d). A definição de contração de uma aresta em grafos não dirigidos é análoga.

A matriz de adjacência de um grafo não-dirigido $G = (V, E)$ é a matriz com linhas e colunas ambas indexadas por V , tal que a entrada na posição (v, w) é o número de arestas que ligam v e w .

No caso particular de G ser bipartido (e, portanto, $G = (V_1, V_2, E)$), também chamamos matriz de adjacência à matriz com linhas indexadas por V_1 e colunas indexadas por V_2 , tal que a entrada na posição (v, w) é o número de arestas que ligam v e w .

Caso referência em contrário, quando usarmos a designação “a matriz de adjacência de um grafo bipartido”, estamos a referir-nos à última parte da definição do parágrafo anterior.

Se $G = (V, E)$ é um grafo não dirigido, a matriz de incidência vértice-aresta de G é uma matriz A com $|V|$ linhas e $|E|$ colunas cujo elemento genérico $a_{i,e}$ é caracterizado por

$$a_{i,e} = \begin{cases} 1 & \text{se } e \in \delta(i), \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Se $G = (V, E)$ é um grafo dirigido, a matriz de incidência vértice-arco de G é uma matriz A com $|V|$ linhas e $|E|$ colunas cujo elemento genérico $a_{i,e}$ é caracterizado por

$$a_{i,e} = \begin{cases} -1 & \text{se } e \in \delta^+(i), \\ 1 & \text{se } e \in \delta^-(i), \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Seja $G = (V, E)$ um grafo dirigido onde a cada arco $(i, j) \in E$ é associado um escalar $h_{ij} \geq 0$ não-negativo denominado *capacidade* desse arco. Sejam s, t dois vértices de G . Um corte- $(s - t)$ de G é um conjunto de arcos de G que se removidos fazem com que deixe de existir um caminho (orientado) de s para t . A capacidade de um corte é a soma das capacidades dos arcos que o compõem.

Consideremos o mesmo grafo do parágrafo anterior. Destaquemos dois vértices $s, t \in V$ distintos. Um *fluxo de s para t* é o número real v tal que para alguma afectação de valores às variáveis x_{ij} , $(i, j) \in E$, o seguinte sistema de igualdades e desigualdades é admissível

$$e_s(x) = v, \tag{1.1}$$

$$e_i(x) = 0 \quad (i \in V \setminus \{s, t\}), \tag{1.2}$$

$$e_t(x) = -v, \tag{1.3}$$

$$0 \leq x_{ij} \leq h_{ij} \quad ((i, j) \in E). \tag{1.4}$$

onde $e_i(x)$ denota o *excesso de fluxo* do vértice $i \in V$, definido por

$$e_i(x) \equiv \sum_{(j,i) \in \delta^-(i)} x_{ji} - \sum_{(i,j) \in \delta^+(i)} x_{ij} = -A[i]x, \quad (1.5)$$

onde $A[i]$ denota a i -ésima linha da matriz de incidência vértice-arco A do grafo G . As restrições (1.2) são conhecidas por restrições de conservação de fluxo pois impõem que *o fluxo que entra em i é igual ao fluxo que sai de i* seja verdade para todo o vértice $i \neq s, t$ - relação também conhecida por lei de Kirchoff.

Lema 1 *Seja $G = (I, J; E)$ um grafo simples bipartido e seja $A = [a_{ij}]$, $i \in I, j \in J$, a sua matriz de adjacência. As seguintes proposições são equivalentes:*

- (a). *Não existe caminho em G de um vértice de $R \subseteq I$ para um vértice de $K \subseteq J$.*
- (b). *Existem I' e J' satisfazendo $R \subseteq I' \subseteq I$ e $K \subseteq J' \subseteq J$ tal que*

$$A_{I'J'} = 0 \quad e \quad A_{\bar{I}'\bar{J}'} = 0 \quad (1.6)$$

para $\bar{I}' = I \setminus I'$ e $\bar{J}' = J \setminus J'$.

Prova: (a) \Rightarrow (b) Seja C o subgrafo de G constituído pelas componentes (conexas) de G que contêm algum elemento de R e seja \bar{C} o subgrafo de G constituído pelas restantes componentes (conexas). Seja ainda

$$\begin{array}{l} I' = I \cap V(C) \quad e \quad J' = J \cap V(\bar{C}) \\ \bar{I}' = I \setminus I' \quad e \quad \bar{J}' = J \setminus J' \end{array} .$$

Claramente, $R \subseteq I' \subseteq I$. Além disso, $K \subseteq J' \subseteq J$ pois, caso contrário, existiria caminho em G de algum $r \in R$ para algum $k \in K$, o que é absurdo por hipótese. Pela mesma razão, como

$$\bar{I}' = I \cap V(\bar{C}) \subseteq V(\bar{C}) \quad e \quad \bar{J}' = J \cap V(C) \subseteq V(C),$$

não existem arestas ligando vértices de \bar{I}' a vértices de \bar{J}' . Por isso, (1.6) verifica-se.

(b) \Rightarrow (a) Por hipótese, A tem o seguinte aspecto:

$$A = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & A_2 \\ \hline A_1 & \mathbf{0} \end{array} \right] \begin{array}{l} \bar{I}' \\ I' \end{array}$$

$\underbrace{\hspace{2cm}}_{\bar{J}'} \quad \underbrace{\hspace{2cm}}_{J'}$

(basta numerar adequadamente os vértices do grafo). Então, A é matriz de adjacência da união de dois subgrafos G_1 e G_2 distintos, um é caracterizado por

A_1 e o outro é caracterizado por A_2 . R faz parte do conjunto de vértices de G_1 e K faz parte do conjunto de vértices de G_2 . Como G_1 e G_2 são distintos, não existe caminho de R para K . \square

Seguidamente apresentamos uma generalização do lema que acabámos de demonstrar.

Lema 2 *Seja $G = (I, J; E)$ um grafo simples bipartido e seja $A = [a_{ij}]$, $i \in I, j \in J$, a sua matriz de adjacência. As seguintes proposições são equivalentes:*

- (a). *Todo o caminho em G de um vértice de $R \subseteq I$ para um vértice de $K \subseteq J$ contém alguma aresta $\{i, j\}$, com $i \in R$ e $j \in K$.*
- (b). *Existem I' e J' satisfazendo $R \subseteq I' \subseteq I$ e $K \subseteq J' \subseteq J$ tal que a matriz A tem o seguinte aspecto:*

$$A = \left[\begin{array}{c|cc} \mathbf{0} & & A_2 \\ \hline A_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & \mathbf{0} & A_{RK} \end{array} \right] \begin{array}{l} \bar{I}' \\ \\ I' \end{array} \quad (1.7)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{J'} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{J'}$

Prova: Seja $C \subseteq E$ o conjunto de todas as arestas de G da forma $\{i, j\}$, com $i \in K, j \in J$. O grafo $G - C$ é o subgrafo de G que resulta por eliminação do conjunto de arestas C . A matriz de adjacência A^* de $G - C$ tem o seguinte aspecto:

$$A^* = \left[\begin{array}{c|c} A_{\bar{R}\bar{K}} & A_{\bar{R}K} \\ \hline A_{R\bar{K}} & \mathbf{0} \end{array} \right] \begin{array}{l} \bar{R} \\ R \end{array} = A - \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & A_{RK} \end{array} \right] \quad (1.8)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\bar{K}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{K}$

para $\bar{R} = I \setminus R$ e $\bar{K} = J \setminus K$.

Agora, observe-se que (a). é equivalente a afirmar que não existe caminho em $G - C$ de um vértice de R para um vértice de K . Pelo Lema 1, isso é equivalente a existir I' e J' satisfazendo $R \subseteq I' \subseteq I$ e $K \subseteq J' \subseteq J$ tal que

$$A_{I', J'}^* = 0 \quad \text{e} \quad A_{\bar{I}', \bar{J}'}^* = 0$$

para $\bar{I}' = I \setminus I'$ e $\bar{J}' = J \setminus J'$. Mas atendendo à relação (1.8) entre A^* e A , isso é equivalente a afirmar (b).. \square

Teorema 2 *Seja $G = (V, E)$ um digrafo com n vértices e m arcos e seja $A = [a_{v,e}]$ a matriz de incidência vértice-arco de G . As colunas de A formam um conjunto linearmente independente se e só se G é uma floresta. Por isso, $\text{car}(A) = n - k$, sendo k o número de componentes de G .*

Prova: Seja C um subgrafo de G que seja um ciclo no grafo subjacente ao digrafo G . Fixe-se uma orientação (sentido dos ponteiros do relógio, por exemplo) e defina-se um vector $x \in \mathbb{R}^m$ com componente

$$x_{ij} = \begin{cases} +1 & \text{se } ij \in E(C) \text{ e } ij \text{ tem o sentido certo,} \\ 0 & \text{se } ij \notin E(C), \\ -1 & \text{se } ij \in E(C) \text{ e } ij \text{ tem o sentido contrário,} \end{cases}$$

em cada posição $ij \in C$. Como é fácil de verificar, $Ax = 0$. Como $x \neq 0$, concluímos que as colunas de A são linearmente dependentes. Concluímos que, se as colunas de A formam um conjunto linearmente independente então G é uma floresta.

Suponhamos que $G = (V, E)$ é uma árvore e consideremos o sistema de equações $Ax = 0$. Provamos por indução matemática no número de vértices de G que a única solução desse sistema de equações é $x = 0$. Se $n = 2$ então G é constituído por um único arco. Trivialmente o sistema $Ax = 0$ tem uma única solução. Por hipótese de indução, suponhamos que o sistema $Ax = 0$ tem uma única solução se A é matriz de incidência vértice-arco de uma árvore com menos de n vértices.

Toda a árvore tem uma folha e — resultado elementar de Teoria de Grafos. Então existe uma linha de A que contém um único elemento não nulo pelo que, então, $x_e = 0$. A matriz A' que decorre de A por eliminação da coluna e e daquela linha é matriz de incidência vértice-arco da árvore $G - \{e\}$. Pela hipótese de indução, o sistema $A'x' = 0$ possui uma única solução $x' = 0$. Por isso, $x = (x', x_e) = 0$ é a única solução de $Ax = 0$. Pelo método de indução matemática concluímos que as colunas da matriz de incidência vértice-arco de uma árvore formam um conjunto linearmente independente.

Finalmente, suponhamos que G é uma floresta com k componentes. Então a matriz A tem o seguinte aspecto, a menos de adequadas trocas de linhas e colunas:

$$\begin{bmatrix} A_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_2 & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & A_i & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \mathbf{0} & A_k \end{bmatrix}, \quad (1.9)$$

onde $\mathbf{0}$ representa uma matriz-nula de dimensão adequada e cada uma das matrizes A_i é matriz de incidência vértice-arco de uma árvore. As colunas de cada uma dessas matrizes formam um conjunto linearmente independente. Concluímos que, se G for uma floresta então as colunas de A formam um conjunto linearmente independente.

Sejam $G_i = (V_i, E_i)$, $i = 1, 2, \dots, k$, as componentes de G e sejam A_i , $i = 1, 2, \dots, k$, as respectivas matrizes de incidência vértice-arco. Então a matriz A tem o aspecto (1.9), a menos de adequadas trocas de linhas e colunas. Além disso,

$$\text{car}(A) = \text{car}(A_1) + \text{car}(A_2) + \dots + \text{car}(A_i) + \dots + \text{car}(A_k). \quad (1.10)$$

Mas, $\text{car}(A_i)$ é o número de arcos numa árvore geradora de G_i . Por (1.10), concluímos que $\text{car}(A) = n - k$. \square

Álgebra Linear (o método de eliminação de Gauss)

Provavelmente o mais conhecido algoritmo em Álgebra Linear é o famoso método de eliminação de Gauss que, como veremos, é um algoritmo polinomial para resolver sistemas de equações lineares. Este algoritmo transforma uma dada matriz A de números racionais numa matriz na forma

$$\begin{bmatrix} B & C \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.11)$$

em que B é uma matriz triangular superior não singular, através da aplicação sucessiva de duas operações: adição de um múltiplo de uma linha a uma outra linha; permutação de linhas e/ou colunas. Este algoritmo implementa-se do seguinte modo: suponhamos que A é de dimensão $m \times n$. Ele constrói sucessivamente matrizes A_k , $k = 0, 1, 2, \dots$, com $A_0 \equiv A$, da forma

$$A_k = \begin{bmatrix} B_k & C_k \\ 0 & D_k \end{bmatrix}, \quad (1.12)$$

em que B_k é uma matriz triangular superior, não-singular, de ordem k . A matriz A_{k+1} é obtida a partir da matriz A_k através de um *passo em frente* no método de eliminação de Gauss. Este passo consiste no seguinte: escolhe-se uma entrada não-nula da matriz D_k em (1.12), chamada *pivot*, e trocam-se as linhas e/ou as colunas de A_k de tal modo a colocar o *pivot* na posição $(1, 1)$ da matriz D_k . Em seguida adicionam-se adequados múltiplos racionais da primeira linha de D_k às outras linhas de D_k de tal modo que o *pivot* seja o único elemento não-nulo na primeira coluna de D_k . No final, a matriz obtida é precisamente A_{k+1} . Este passo é implementado para $k = 0, 1, 2, \dots$ até que, para adequado r , a matriz D em A_r é a matriz-nula e, por isso, A_r tem o aspecto (1.11). Por definição, $r = \text{car}(A)$.

Às vezes, após termos obtido a forma (1.11), a matriz é transformada ainda na forma

$$\begin{bmatrix} \Delta & C' \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.13)$$

em que Δ é uma matriz diagonal não-singular. Para isso, o algoritmo continua a construir matrizes $A^{(k)}$, $k = r, r-1, r-2, \dots, 1$, com $A^{(r)} = A_r$,

$$A^{(k)} = \begin{bmatrix} B^{(k)} & 0 & C^{(k)} \\ 0 & \Delta^{(k)} & D^{(k)} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.14)$$

em que $B^{(k)}$ é uma matriz triangular superior, não-singular, de ordem k e $\Delta^{(k)}$ é uma matriz diagonal de ordem $r-k$. A matriz $A^{(k-1)}$ é obtida a partir da matriz $A^{(k)}$ através de um *passo atrás* no método de eliminação de Gauss. Este passo consiste em adicionar adequados múltiplos racionais da linha k de $A^{(k)}$ às linhas $1, 2, \dots, k-1$ de tal modo que o elemento de $A^{(k)}$ na posição (k, k) seja o único elemento não-nulo na coluna k de $A^{(k)}$. Este passo é implementado para $k = r, r-1, \dots, 2, 1$. No final, $A^{(1)}$ tem o aspecto (1.13).

Teorema 3 *Para matrizes de números racionais, o método de eliminação de Gauss é polinomial.*

Prova: Seja A uma matriz de números inteiros de dimensão $m \times n$. Pretendemos aplicar o método de eliminação de Gauss à matriz A de modo a transformá-la, primeiro, numa matriz com o aspecto (1.11) e, depois, numa matriz com o aspecto (1.13). Sem perda de generalidade, podemos assumir que não precisamos de trocar linhas e/ou colunas durante a execução do algoritmo. É fácil verificar que o número de operações aritméticas de adição, multiplicação ou divisão, que ocorrem durante o método é da ordem de

$$\mathcal{O}(m^2n). \quad (1.15)$$

Para provar que o método é polinomial resta só mostrar que os tamanhos das entradas das matrizes $A_k = [a_{ij}^{(k)}]$, $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$, com $k = 0, 1, \dots, r \equiv \text{car}(A)$, em (1.12), que vão sendo construídas pelo método, são limitados polinomialmente pelos tamanhos das entradas da matriz A , isto é,

$$\max_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}} |a_{ij}^{(k)}| \leq p \left(\max_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}} |a_{ij}| \right), \quad \forall k = 0, 1, \dots, r \quad (1.16)$$

em que $p(x)$ denota um adequado polinómio na variável x . Denotemos $M \equiv \max\{|a_{ij}| : i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n\}$. Para provarmos (1.16), note-se que, como na matriz A_k em (1.12),

$$\det \left((A_k)_{1, \dots, k}^{1, \dots, k} \right) = a_{11}^{(1)} a_{22}^{(1)} \dots a_{kk}^{(k-1)}, \quad (1.17)$$

em que, para uma dada matriz G , $G_{j_1, \dots, j_t}^{i_1, \dots, i_t}$ denota a submatriz de G constituída pelas linhas indexadas por i_1, i_2, \dots, i_t e pelas colunas indexadas por j_1, \dots, j_t ,

e, além disso, para qualquer entrada (ij) da submatriz D , digamos $d_{ij}^{(k)}$,

$$\det \left((A_k)_{1, \dots, k, k+i}^{1, \dots, k, k+i} \right) = a_{11} a_{22}^{(1)} \dots a_{kk}^{(k-1)} d_{ij}^{(k)}, \quad (1.18)$$

então, por (1.17) e (1.18),

$$d_{ij}^{(k)} = \det \left((A_k)_{1, \dots, k, k+i}^{1, \dots, k, k+i} \right) / \det \left((A_k)_{1, \dots, k}^{1, \dots, k} \right).$$

Como A_k se obtém de A por adição de múltiplos das primeiras k linhas às outras linhas, então

$$d_{ij}^{(k)} = \det \left(A_{1, \dots, k, k+i}^{1, \dots, k, k+i} \right) / \det \left(A_{1, \dots, k}^{1, \dots, k} \right).$$

Por definição de determinante de uma matriz, e denotando $\theta_k \equiv 1/|\det \left(A_{1, \dots, k}^{1, \dots, k} \right)|$,

$$|d_{ij}^{(k)}| = \theta_k |\det \left(A_{1, \dots, k, k+i}^{1, \dots, k, k+i} \right)| \leq \theta_k (k+1)! M^{k+1} \leq \theta (r+1)! M^{r+1} \quad (1.19)$$

para todo $k = 1, \dots, r$ e com $\theta = \max_{k=1, \dots, r} \theta_k$. Uma vez que quaisquer entradas das matrizes B^k e C^k em (1.12) foram entradas, em passos anteriores do algoritmo, de alguma matriz $D^{(k)}$, com $k' < k$, para não mais serem alterados até final dos *passos em frente*, então, da arbitrariedade de k , concluímos que durante estes passos qualquer entrada das matrizes intervenientes é limitada em módulo por (1.19).

Se $r \geq 2$, podemos executar passos para trás no método de eliminação de Gauss. Durante estes passos, as entradas também são limitadas em módulo por um polinómio em M . Com efeito, consideremos a matriz $A^{(k)}$ em (1.14) e a matriz $A_r \equiv A^{(r)}$ particionada como a matriz $A^{(k)}$. Portanto,

$$A^{(k)} = \begin{bmatrix} B^{(k)} & 0 & C^{(k)} \\ 0 & \Delta^{(k)} & D^{(k)} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A_r = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & C_1 \\ 0 & B_3 & C_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

em que, relembre-se, $B^{(k)}$ é uma matriz triangular superior, não-singular, de ordem k e $\Delta^{(k)}$ é uma matriz diagonal de ordem $r - k$. Em termos de matrizes, a matriz $A^{(k)}$ obtém-se multiplicando à esquerda a matriz A_r por uma matriz quadrada de ordem m ,

$$\begin{bmatrix} I & M & 0 \\ 0 & U & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad (1.20)$$

particionada por linhas e por colunas como a matriz A_r (com $m - r$ colunas no último bloco de colunas em vez de $n - r$) e tal que U é uma matriz triangular superior. Por isso,

$$B^{(k)} = B_1, \quad C^{(k)} = C_1 + MC_2, \quad D^{(k)} = UC_2, \quad \Delta^{(k)} = UB_3 \quad \text{e} \quad 0 = B_2 + MB_3.$$

Como B_3 é uma matriz não-singular, então $U = \Delta^{(k)}B_3^{-1}$ e $M = -B_2B_3^{-1}$ e, assim, $C^{(k)} = C_1 - B_2B_3^{-1}C_2$ e $D^{(k)} = \Delta B_3^{-1}C_2$. Como B_1, B_2, B_3, C_1 e C_2 são submatrizes de A_r então, por (1.19), qualquer entrada destas matrizes é limitada em módulo por $\bar{M} \equiv \theta(r+1)!M^{r+1}$. Como $B_3^{-1} = 1/\det(B_3)\text{adj}(B_3)$, então cada entrada β_{ij} de B_3^{-1} é tal que $\beta_{ij} = \pm \det(B'_3)/\det(B_3)$ em que B'_3 é o menor- ij de B_3 . Por isso, denotando $\delta \equiv 1/|\det(B_3)|$,

$$|\beta_{ij}| = \delta |\det(B'_3)| \leq \delta(r-k-1)!\bar{M}^{r-k-1} \leq \delta(r-2)!\bar{M}^{r-2} \quad (1.21)$$

pois, lembre-se, B_3 e $\Delta^{(k)}$ são de ordem $r-k$. Por (1.21) e por definição de \bar{M} , as entradas de B_3^{-1} também são limitadas (em módulo) polinomialmente por M . Como a soma e o produto de matrizes cujas entradas são limitadas (em módulo) polinomialmente por um valor continuam a ser, claramente, matrizes com entradas limitadas polinomialmente pelo mesmo valor, então as entradas das submatrizes $C^{(k)}$ e $D^{(k)}$ de $A^{(k)}$, tal como as entradas das submatrizes $\Delta^{(k)}$ (note-se que os elementos da diagonal principal de $\Delta^{(k)}$ coincidem com os da diagonal principal de B_3) e $B^{(k)} = B_1$, são limitadas polinomialmente por M . Concluimos que ao longo do método de eliminação de Gauss, quer nos passos para a frente quer nos passos para trás as entradas das matrizes intervenientes são limitadas (em módulo) polinomialmente pelo máximo valor dos módulos das entradas da matriz A inicial. \square

Se A for uma matriz de inteiros não-singular, então podemos aplicar eliminação de Gauss, para a frente e para trás, em A na matriz $[A \ I]$, de modo a obter a matriz $[I \ A^{-1}]$. Pelo Teorema 3, podemos calcular a inversa de uma matriz não-singular, de dimensão $n \times n$ em tempo polinomial limitado por $O(n^3)$.

Álgebra Linear (operações pivotais)

Operações pivotais, que definiremos a seguir, surgem no contexto de trocas de posicionamento entre variáveis básicas e não básicas em sistemas de equações lineares. Suponhamos que variáveis básicas (y_0, y) estão escritas em função de variáveis não-básicas (x_0, x) do seguinte modo:

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon & c \\ b & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x \end{bmatrix}. \quad (1.22)$$

para adequado $\varepsilon \in \mathbb{R}$, um adequado vectores-coluna b e um adequado vector-linha c . Então, supondo $\varepsilon \neq 0$,

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon^{-1} & -\varepsilon^{-1}c \\ \varepsilon^{-1}b & D - \varepsilon^{-1}bc \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ x \end{bmatrix}. \quad (1.23)$$

A matriz do sistema (1.23) diz-se resultante da matriz do sistema (1.22) através de uma operação pivotar definida pelo elemento ε . Esta interpretação de uma operação pivotar, permite concluir que se efectuássemos uma nova operação pivotar usando o elemento na mesma posição (neste caso, ε^{-1}) obteríamos a matriz original.

Em geral, uma operação pivotar usando um outro elemento qualquer a_{ij} da matriz A como *pivot*, é definida de modo semelhante, ou seja, se designarmos por \bar{A} a submatriz que resulta de A por eliminação da coluna que contém a_{ij} , e se designarmos por \bar{A}' a correspondente submatriz em A' , tem-se que

$$\bar{A}'_k = \begin{cases} (1/a_{ij})\bar{A}_k & \text{se } k = i \\ \bar{A}_k - a_{kj}\bar{A}'_i & \text{se } k \neq i \end{cases} \quad \text{e} \quad a'_{kj} = \begin{cases} -1/a_{ij} & \text{se } k = i \\ a_{kj}/a_{ij} & \text{se } k \neq i \end{cases}$$

onde o índice em \bar{A} e \bar{A}' identifica 'linha'.

O método de Simplex é um algoritmo que em cada iteração usa uma operação pivotar e, por isso, é chamado um algoritmo pivotar. A seguinte propriedade relaciona a pivotação numa matriz A com a pivotação nas matrizes que resultam de A por trocas de linhas ou colunas, multiplicação de linhas ou colunas por -1 ou por transposição.

Propriedade 1 *Seja $p_{ij}(A)$ a matriz que se obtém da matriz A por pivotação no elemento situado na posição (i, j) , P uma matriz de permutação e D uma matriz diagonal cujos elementos da diagonal principal são apenas uns ou menos uns (se apenas o elemento na posição (k, k) da matriz D for -1 , então denotaremos D por D_k). Então,*

$$(a). \quad p_{ij}(PA) = Pp_{ij}(A) \quad \text{e} \quad p_{ij}(AP) = p_{ij}(A)P.$$

$$(b). \quad p_{ij}(DA) = \begin{cases} Dp_{ij}(A) & \text{se } D_{ii} \neq -1 \\ D_i(Dp_{ij}(A))D_j & \text{se } D_{ii} = -1 \end{cases}, \quad \text{e}$$

$$p_{ij}(AD) = \begin{cases} p_{ij}(A)D & \text{se } D_{jj} \neq -1 \\ D_i(p_{ij}(A)D)D_j & \text{se } D_{jj} = -1 \end{cases}$$

$$(c). \quad (p_{ij}(A))^T = D_j[p_{ji}(A^T)]D_i.$$

Prova: É imediato que (a) é verdade. Seja A' a matriz que resulta de A após multiplicação da linha k por -1 e pivotemos num elemento $\varepsilon \neq 0$ da matriz A situado na posição (i, j) , com $i \neq k$. Uma vez que (a) é verdade, então, sem perda de generalidade, por (1.22) e (1.23), as matrizes A , A' , $p_{ij}(A)$ e $p_{ij}(A')$

têm o seguinte aspecto:

$$\begin{aligned}
 & \begin{matrix} i \\ k \end{matrix} \begin{matrix} j \\ \left[\begin{array}{cc} \varepsilon & c \\ \alpha & d \\ b & D \end{array} \right] \end{matrix} = A, & \begin{matrix} i \\ k \end{matrix} \begin{matrix} j \\ \left[\begin{array}{cc} \varepsilon^{-1} & -\varepsilon^{-1}c \\ \varepsilon^{-1}\alpha & d - \varepsilon^{-1}\alpha c \\ \varepsilon^{-1}b & D - \varepsilon^{-1}bc \end{array} \right] \end{matrix} = p_{ij}(A), \\
 & \begin{matrix} i \\ k \end{matrix} \begin{matrix} j \\ \left[\begin{array}{cc} \varepsilon & c \\ -\alpha & -d \\ b & D \end{array} \right] \end{matrix} = A', & \begin{matrix} i \\ k \end{matrix} \begin{matrix} j \\ \left[\begin{array}{cc} \varepsilon^{-1} & -\varepsilon^{-1}c \\ \varepsilon^{-1}(-\alpha) & -d - \varepsilon^{-1}(-\alpha)c \\ \varepsilon^{-1}b & D - \varepsilon^{-1}bc \end{array} \right] \end{matrix} = p_{ij}(A'),
 \end{aligned} \tag{1.24}$$

para adequado $\alpha \in \mathbb{R}$, um adequado vector-coluna b e adequados vectores-linha c, d . Logo, por (1.24), $p_{ij}(A')$ resulta de $p_{ij}(A)$ também após multiplicação da linha k por -1 . Por aplicação sucessiva do que terminámos de demonstrar, concluímos que se $D_{ii} \neq -1$ então $p_{ij}(DA) = Dp_{ij}(A)$. Suponhamos agora que $i = k$. Então,

$$\begin{aligned}
 & \begin{matrix} i \\ \left[\begin{array}{cc} \varepsilon & c \\ b & D \end{array} \right] \end{matrix} = A, & \begin{matrix} i \\ \left[\begin{array}{cc} \varepsilon^{-1} & -\varepsilon^{-1}c \\ \varepsilon^{-1}b & D - \varepsilon^{-1}bc \end{array} \right] \end{matrix} = p_{ij}(A), \\
 & \begin{matrix} i \\ \left[\begin{array}{cc} -\varepsilon & -c \\ b & D \end{array} \right] \end{matrix} = A', & \begin{matrix} i \\ \left[\begin{array}{cc} -\varepsilon^{-1} & -(-\varepsilon^{-1})(-c) \\ -\varepsilon^{-1}b & D - (-\varepsilon^{-1})b(-c) \end{array} \right] \end{matrix} = p_{ij}(A').
 \end{aligned} \tag{1.25}$$

Logo, $p_{ij}(A')$ resulta de $p_{ij}(A)$ após multiplicação da coluna j por -1 . Então, se $D_{ii} = -1$,

$$p_{ij}(DA) = p_{ij}[(D_i D D_i)A] = p_{ij}[(D_i D)(D_i A)] = D_i D p_{ij}(D_i A) = D_i D p_{ij}(A) D_j,$$

e assim terminámos de provar a primeira igualdade de (b). A segunda igualdade de (b) provar-se-ia de modo análogo. Como, sem perda de generalidade, as matrizes $A, A^T, p_{ij}(A)$ e $p_{ji}(A^T)$ têm o seguinte aspecto,

$$\begin{aligned}
 & \begin{matrix} i \\ \left[\begin{array}{cc} \varepsilon & c \\ b & D \end{array} \right] \end{matrix} = A, & \begin{matrix} i \\ \left[\begin{array}{cc} \varepsilon^{-1} & -\varepsilon^{-1}c \\ \varepsilon^{-1}b & D - \varepsilon^{-1}bc \end{array} \right] \end{matrix} = p_{ij}(A), \\
 & \begin{matrix} j \\ \left[\begin{array}{cc} \varepsilon & b^T \\ c^T & D^T \end{array} \right] \end{matrix} = A^T, & \begin{matrix} j \\ \left[\begin{array}{cc} \varepsilon^{-1} & -\varepsilon^{-1}b^T \\ \varepsilon^{-1}c^T & D^T - \varepsilon^{-1}c^T b^T \end{array} \right] \end{matrix} = p_{ji}(A^T),
 \end{aligned}$$

então é fácil verificar que (c) é verdade. \square

As operações pivotais numa matriz estão relacionadas com os complementos de Schur dessa matriz, como veremos a seguir.

Definição 1 Dada uma matriz A , denota-se por A_{IJ} a submatriz de A constituída pelas linhas indexadas por I e pelas colunas indexadas por J . Se $A_{IJ} \neq A$ então diz-se que A_{IJ} é uma submatriz própria de A . Se $I = J$ então diz-se que A_{II} é uma submatriz principal de A .

Definição 2 Seja A uma matriz quadrada não-singular e A_{IJ} uma submatriz própria de A não-singular. O complemento Schur de A_{IJ} em A é a matriz

$$(A|A_{IJ}) \equiv A_{\bar{I}\bar{J}} - A_{\bar{I}J}(A_{IJ})^{-1}A_{I\bar{J}},$$

onde \bar{I} denota o conjunto de índices de linha complementares com I e \bar{J} denota o conjunto de índices de coluna complementares com J .

Note-se que, em (1.23), $D - \varepsilon^{-1}bc$ é o complemento Schur de ε na matriz

$$\begin{bmatrix} \varepsilon & c \\ b & D \end{bmatrix}.$$

Lema 3 (fórmula de Schur) Seja A uma matriz quadrada não-singular e A_{IJ} uma submatriz própria de A não-singular. Então

$$\det(A|A_{IJ}) = (-1)^p \frac{\det(A)}{\det(A_{IJ})}.$$

com p o número de trocas de linhas e/ou colunas da matriz A necessárias para colocar A_{IJ} no canto superior esquerdo.

Prova: Sem perda de generalidade podemos escrever a matriz A na forma

$$A = \begin{bmatrix} A_{IJ} & A_{I\bar{J}} \\ A_{\bar{I}J} & A_{\bar{I}\bar{J}} \end{bmatrix}$$

Como A_{IJ} é não singular, pode verificar-se que

$$A = \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_{\bar{I}J}(A_{IJ})^{-1} & A_{\bar{I}\bar{J}} - A_{\bar{I}J}(A_{IJ})^{-1}A_{I\bar{J}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{IJ} & A_{I\bar{J}} \\ 0 & I \end{bmatrix}. \quad (1.26)$$

O resultado desejado decorre da aplicação do Teorema de Laplace aos factores em (1.26) e de propriedades do determinante. \square

É um resultado de Álgebra Linear que uma matriz quadrada A , de ordem n , é não-singular se e só, após eventuais trocas de linhas, podemos pivotar sucessivamente nos elementos (não-nulos) situados nas posições $(1, 1), (2, 2), \dots, (n, n)$. Mais, se A é não-singular, depois destas pivotações, a matriz final obtida é A^{-1} (a menos de trocas de linhas). Isto pode ser provado, por exemplo, usando a fórmula de Schur anterior. Se considerarmos que variáveis básicas $(y_I, y_{\bar{I}})$, com

$y_I = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ e $y_{\bar{I}}$ um adequado vector, estão escritas em função de variáveis não básicas $(x_J, x_{\bar{J}})$, com $x_J = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $x_{\bar{J}}$ um adequado vector (não necessariamente da mesma dimensão que a do vector y), do seguinte modo:

$$y_I \equiv \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \\ y_{\bar{I}} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} A_{IJ} & A_{I\bar{J}} \\ \hline A_{\bar{I}J} & A_{\bar{I}\bar{J}} \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{\bar{J}} \end{bmatrix} \right\} \equiv x_J, \quad (1.27)$$

em que A denota a matriz do sistema (1.27), então o sistema (1.27) é equivalente ao sistema

$$x_J \equiv \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ y_{\bar{I}} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} A'_{IJ} & A'_{I\bar{J}} \\ \hline A'_{\bar{I}J} & A'_{\bar{I}\bar{J}} \end{array} \right] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \\ x_{\bar{J}} \end{bmatrix} \right\} \equiv y_I. \quad (1.28)$$

com

$$\begin{aligned} A'_{IJ} &= A_{IJ}^{-1} & A'_{I\bar{J}} &= -A_{IJ}^{-1}A_{I\bar{J}}, \\ A'_{\bar{I}J} &= A_{\bar{I}J}A_{IJ}^{-1}, & A'_{\bar{I}\bar{J}} &= A_{\bar{I}\bar{J}} - A_{\bar{I}J}A_{IJ}^{-1}A_{I\bar{J}} = (A|A_{IJ}), \end{aligned} \quad (1.29)$$

e mostra-se que a matriz do sistema (1.28) obtém-se da matriz A do sistema (1.27) após pivotações sucessivas nas posições $(1, 1), (2, 2), \dots, (n, n)$ da matriz A (A_{IJ}). Por isso, a equivalência entre o sistema (1.27) e o sistema (1.28) é uma generalização da equivalência entre os sistemas (1.22) e (1.23) e é uma maneira sucinta de descrever uma série de pivotações em sucessivos elementos da diagonal principal da matriz A (A_{IJ}) do sistema inicial.

Lema 4 *Seja A uma matriz não-singular.*

- (a). *Para toda a submatriz própria de A não-singular A_{IJ} existe uma submatriz própria de A^{-1} não singular Q tal que $Q = (A|A_{IJ})^{-1}$.*
- (b). *Para toda a submatriz própria de A^{-1} não singular Q existe uma submatriz própria de A não-singular A_{IJ} tal que $Q = (A|A_{IJ})^{-1}$.*

Prova: Seja A_{IJ} uma qualquer submatriz própria de A não-singular. Pelo Lema 3, $(A|A_{IJ})$ é uma matriz não-singular. Seja $X = (A|A_{IJ})^{-1}$. Consideremos a matriz C definida do seguinte modo

$$C \equiv \begin{bmatrix} C_{IJ} & C_{I\bar{J}} \\ C_{\bar{I}J} & C_{\bar{I}\bar{J}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{IJ}^{-1} + A_{IJ}^{-1}A_{I\bar{J}}XA_{\bar{I}J}A_{IJ}^{-1} & -A_{IJ}^{-1}A_{I\bar{J}}X \\ -XA_{\bar{I}J}A_{IJ}^{-1} & X \end{bmatrix}$$

Conforme se pode verificar, CA e AC são a matriz identidade pelo que $C = A^{-1}$. Concluimos que X é uma submatriz própria de A^{-1} .

Reciprocamente, seja $Y = (A^{-1})_{IJ}$ uma qualquer submatriz própria de A^{-1} não singular. Seja M uma matriz definida por

$$M \equiv (A^{-1}|Y) = (A^{-1})_{\bar{I}\bar{J}} - (A^{-1})_{\bar{I}\bar{J}}[(A^{-1})_{IJ}]^{-1}(A^{-1})_{I\bar{J}}.$$

que, pelo Lema 3 é uma matriz não singular. Consideremos a matriz D definida do seguinte modo

$$D = \begin{bmatrix} D_{IJ} & D_{I\bar{J}} \\ D_{\bar{I}J} & D_{\bar{I}\bar{J}} \end{bmatrix}$$

com $D_{\bar{I}\bar{J}} = M^{-1}$,

$$\begin{aligned} D_{IJ} &= [(A^{-1})_{IJ}]^{-1} + [(A^{-1})_{IJ}]^{-1}(A^{-1})_{I\bar{J}}M^{-1}(A^{-1})_{\bar{I}J}[(A^{-1})_{IJ}]^{-1}, \\ D_{\bar{I}J} &= -(A^{-1})_{IJ}(A^{-1})_{I\bar{J}}M^{-1} \quad \text{e} \quad D_{\bar{I}\bar{J}} = -M^{-1}(A^{-1})_{\bar{I}J}[(A^{-1})_{IJ}]^{-1}. \end{aligned}$$

Conforme se pode verificar, DA^{-1} e $A^{-1}D$ são a matriz identidade pelo que $D = A$. Concluimos que $M^{-1} = A_{\bar{I}\bar{J}}$ é uma submatriz própria de A^{-1} . Além disso, $[A_{IJ} - A_{I\bar{J}}(A_{\bar{I}\bar{J}})^{-1}A_{\bar{I}J}]^{-1} = (A^{-1})_{IJ}$ e, portanto, $Y = (A|A_{\bar{I}\bar{J}})^{-1}$. \square

Sistemas de equações lineares Diofantinas

Um sistema de equações lineares Diofantinas é um sistema de equações lineares algébricas no qual as variáveis só podem assumir valores inteiros. Quando a matriz do sistema está na Forma Normal de Hermite é simples caracterizar explicitamente o conjunto de todas as soluções. No nosso caso, a Forma Normal de Hermite de uma matriz será útil para caracterizar matrizes Unimodulares, que estudaremos no Capítulo 6.

Definição 3 *Seja A uma matriz de racionais. Diz-se que A está na Forma Normal de Hermite se $A = [B \ 0]$, onde B é uma matriz triangular inferior, não negativa e tal que cada uma das suas linhas possui o maior dos seus elementos unicamente na diagonal.*

Definição 4 *Diz-se que uma matriz A' resulta de uma matriz A por aplicação de uma operação elementar por colunas se A' resulta da aplicação de uma das seguintes operações sobre a matriz A :*

- (a). *Permuta de duas colunas;*
- (b). *Multiplicação dos elementos de uma coluna por -1 ;*

(c). *Adição de um múltiplo inteiro de uma coluna a uma outra coluna.*

Teorema 4 (Teorema da Forma Normal de Hermite) *Toda a matriz A de racionais e de característica completa por linhas se pode transformar numa matriz na Forma Normal de Hermite após uma sequência de adequadas operações elementares por colunas.*

A prova deste teorema pode ser vista em (Schrijver, 1986) na página 45 ou nos textos de apoio da cadeira de Optimização Combinatória da Licenciatura em Matemática do DMUC. A unicidade da Forma Normal de Hermite decorre do Teorema 5 abaixo. Poderemos então referir a Forma Normal de Hermite de uma matriz sem ambiguidade.

Seja A uma matriz de racionais $m \times n$. É fácil verificar que o conjunto Ω dos vectores racionais b para os quais o sistema $Ax = b$ tem solução inteira, isto é,

$$\Omega = \{Ax : x \in \mathbb{Z}^n\}$$

é um subgrupo de \mathbb{Q}^m para a adição de vectores e multiplicação por um escalar inteiro usuais. Dizemos, então, que Ω é o grupo gerado pelas colunas de A .

Teorema 5 *Sejam A, A' matrizes de característica completa por linhas, e que após operações elementares por colunas assumem a Forma Normal de Hermite $[B \ 0]$ e $[B' \ 0]$, respectivamente. Então, as colunas de A geram o mesmo grupo que as colunas de A' se e só se $B = B'$.*

A prova deste teorema pode ser vista em (Schrijver, 1986) na página 48 ou nos textos de apoio da cadeira de Optimização Combinatória da Licenciatura em Matemática do DMUC. Agora, na página seguinte vamos descrever um algoritmo polinomial que permite obter a Forma Normal de Hermite de uma dada matriz de números inteiros e de característica completa por linhas através de operações elementares por colunas.

Algoritmo $\mathbf{H}(A)$

(1/2)

Input: Matriz A de números inteiros de dimensão $m \times n$ e de característica completa por linhas.

Output: A Forma Normal de Hermite $[H \ 0]$ da matriz A .

Iteração Genérica:

Passo 1: Encontrar uma base de A com o método de eliminação de Gauss e seja M o módulo do seu determinante.

Passo 2: Definir uma nova matriz A' acrescentando M vezes as colunas da matriz identidade $m \times m$ à matriz, nomeadamente através de

$$A' = \left[\begin{array}{c|ccc} A & M & & \\ & & \ddots & \\ & & & M \end{array} \right] \quad (1.30)$$

Adicionar múltiplos inteiros das últimas m colunas de A' às primeiras n colunas até obter uma matriz cujos elementos estejam todos no conjunto $\{0, 1, \dots, M\}$.

Passo 3: Executar m iterações do seguinte modo: Suponhamos que numa iteração genérica $k - 1 \in \{0, 1, \dots, m - 1\}$ se obteve a matriz

$$\left[\begin{array}{c|c|ccc} B & 0 & & 0 \\ & & 0 & \dots & 0 \\ & & M & & \\ C & D & & \ddots & \\ & & & & M \end{array} \right] \quad (1.31)$$

onde B é uma matriz $k \times k$ triangular inferior cujos elementos da diagonal principal são todos positivos, C é uma matriz $(m - k) \times k$, D é uma matriz $(m - k) \times (n + 1)$. Antes de executar a primeira iteração, correspondente a $k = 0$, (1.31) tem a forma (1.30) com $D = [A \ Me^1]$ e B e C não existem. Denote-se o elemento genérico da matriz D na posição (i, j) por d_{ij} .

Efectuar, na iteração- k , as seguintes operações elementares por colunas:

Enquanto existirem $i \neq j$ tais que $d_{1i} \geq d_{1j} > 0$ então:

- (a). subtrair $[d_{1i}/d_{1j}]$ vezes a j -ésima coluna de D à i -ésima coluna de D ;
- (b). somar múltiplos das últimas $m - k - 1$ colunas em (1.31) à i -ésima coluna de D de forma a que todas as componentes pertençam a $\{0, 1, \dots, M\}$.

Algoritmo **H**(A)

(2/2)

No final deste procedimento a primeira linha de D contém exactamente uma componente não nula. Efectuar uma troca de colunas que coloque essa componente na primeira coluna de D e denotêmo-la por d_{11} .

A matriz C manteve-se inalterável. Denotemos por \bar{C} a submatriz que resulta de C por eliminação da primeira linha, digamos c .

Nesta altura as matrizes C e D têm o seguinte aspecto:

$$C = \left[\begin{array}{c} c \\ \bar{C} \end{array} \right] \quad \text{e} \quad D = \left[\begin{array}{c|c} d_{11} & 0 \\ \hline d & \bar{D} \end{array} \right]$$

para um adequado vector-coluna d e uma adequada matriz \bar{D} .

Após a iteração- k , continuamos a ter uma matriz com o aspecto (1.31) em que as novas matrizes B, C e D , digamos B', C' e D' são

$$B' = \left[\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline c & d_{11} \end{array} \right], \quad C' = [\bar{C} \mid d], \quad D' = [\bar{D} \mid Me^1].$$

Recomeçar os procedimentos (a) e (b) com k substituído por $k + 1$.

Passo 4: Depois do Passo 3, ou seja, após a iteração $k = m - 1$ executada no Passo 3, (1.31) encontra-se na forma $[B \ 0]$ com $B = [\beta_{ij}]$ uma matriz triangular inferior, cujos elementos da diagonal principal são todos positivos.

Para $i = 2, \dots, m$:

Para $j = 1, \dots, i - 1$: somar um múltiplo inteiro da coluna i de B à coluna j de B de modo que o elemento da posição (i, j) de B fique não negativo e menor do que β_{ii} .

Eliminar na matriz final obtida as últimas m colunas nulas.

Figura 1.2: **H**(A)

Teorema 6 *O algoritmo **H** da Figura 1.2 encontra em tempo polinomial a Forma Normal de Hermite de uma dada matriz de números inteiros e de característica completa por linhas.*

Prova: Seja A uma matriz de números inteiros, de dimensão $m \times n$, de característica completa por linhas. Seja M o módulo do determinante de uma qualquer submatriz invertível $m \times m$ de A , por exemplo, a submatriz constituída pelas colunas de A correspondentes às colunas dos *pivots* no final do método de eliminação de Gauss aplicado à matriz A . O módulo do determinante desta submatriz é o módulo do produto dos *pivots*. Por isso, o tempo total do Passo

1 do algoritmo **H** é, de acordo com o Teorema 3, polinomial e da ordem de

$$\mathcal{O}(m^2n) \quad (1.32)$$

(ver (1.15)). Consideremos a matriz A' definida por (1.30). Começamos por demonstrar que as colunas de A' e as colunas de A geram o mesmo grupo e que, por esse facto, A' e A possuem a mesma Forma Normal de Hermite (Teorema 5). Seja $B \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ o conjunto de índices de coluna tal que $|\det(A_B)| = M$. Como $A_B \in \mathbb{Z}^{m \times m}$ então a matriz adjunta de A_B , denotada $\text{adj}(A_B)$, é uma matriz de números inteiros. Seja Me^j uma qualquer das últimas m colunas da matriz A' . Como $\det(A_B)e^j$ é igual ao produto da matriz A_B pela transposta da j -ésima linha da matriz adjunta de A_B então a coluna Me^j é uma combinação inteira de colunas de A_B . Em particular, Me^j é uma combinação inteira de colunas de A . Por isso, o grupo gerado pelas colunas de A' está contido no grupo gerado pelas colunas de A . A inclusão contrária é imediata. Pelo Teorema 5, a Forma Normal de Hermite de A é a mesma da de A' , exceptuando que a de A' tem mais m colunas nulas. Por isso, basta encontrar a Forma Normal de Hermite da matriz A' e eliminar as últimas m colunas. Pela unicidade da Forma Normal de Hermite, o algoritmo **H** encontra a Forma Normal de Hermite da matriz A' . Resta mostrar que o faz em tempo polinomial.

O Passo 2 do algoritmo **H** tem tempo

$$\mathcal{O}(m^2n). \quad (1.33)$$

No Passo 3, executam-se m iterações que geram m matrizes com o aspecto (1.31). Consideremos a matriz que se obteve após uma iteração genérica $k \in 0, 1, \dots, m-1$. Denote-se o elemento genérico da submatriz D desta matriz (ver (1.31)) na posição (i, j) por d_{ij} . Na iteração- k executam-se (a) e (b) do algoritmo **H** enquanto existirem existirem $i \neq j$ tais que $d_{1i} \geq d_{1j} > 0$. Como D é $(m-k) \times (n+1)$ cada execução de (a) tem tempo $\mathcal{O}(m-k)$. Cada execução de (b) consiste em substituir cada entrada d_{li} , com $l \neq 1$, da nova (após execução de (a)), coluna i de D , com $d_{li} \notin \{0, 1, \dots, M\}$, por $d_{li} - \lfloor d_{li}/M \rfloor M$. Por isso, cada execução de (b) tem também tempo $\mathcal{O}(m-k)$. Da arbitrariedade de k , concluímos que a aplicação conjunta de (a) e (b) tem tempo limitado por

$$\mathcal{O}(m). \quad (1.34)$$

Por causa das execuções anteriores de (b), D é uma matriz de números inteiros não-negativos do conjunto $\{0, 1, \dots, M\}$. Após execução de (a), o único elemento na primeira linha de D que é alterado é d_{1i} que é substituído por $d_{1i} - \lfloor d_{1i}/d_{1j} \rfloor d_{1j}$, que é precisamente o resto da divisão inteira de d_{1i} por d_{1j} .

Portanto, todos os elementos da nova primeira linha de D mantêm-se no conjunto $\{0, 1, \dots, M\}$. Cada entrada $l \neq 1$ da nova coluna i de D , sendo igual a $d_{li} - \lfloor d_{1i}/d_{1j} \rfloor d_{lj}$, está compreendida entre $-\lfloor d_{1i}/d_{1j} \rfloor d_{lj}$ e d_{li} , e, por isso, é limitada em módulo por

$$\max\{\lfloor d_{1i}/d_{1j} \rfloor d_{lj}, d_{li}\} \leq M^2. \quad (1.35)$$

Depois da aplicação conjunta de (a) e (b), todos os elementos de D mantêm-se no conjunto $\{0, 1, \dots, M\}$. Como todas as entradas das matrizes B e C em (1.31) foram entradas de matrizes D em iterações anteriores, concluímos que todas as entradas das matrizes (1.31) construídas durante o processo iterativo permanecem sempre no conjunto $\{0, 1, \dots, M\}$.

Em cada execução de (a), ou a primeira linha de D contém mais uma entrada nula ou o produto das entradas não-nulas desta linha é reduzido num factor de pelo menos 2, pois a nova entrada i desta linha (a única a ser alterada), digamos d'_{1i} , é tal que

$$d'_{1i} = d_{1i} - \lfloor d_{1i}/d_{1j} \rfloor d_{1j} \leq d_{1j} - 1 \leq \lfloor d_{1i}/d_{1j} \rfloor d_{1j} = d_{1i} - d'_{1i} \quad (1.36)$$

e, por isso, $d'_{1i} \leq d_{1i}/2$. Como o produto das entradas não-nulas da matriz D é, no máximo, M^{n+1} (relembre-se que D é $(m - k) \times (n + 1)$) então são necessárias, no máximo, $n + \log_2(M^{n+1}) = n + (n + 1) \log_2 M$ execuções de (a) para que a primeira linha de D contenha exactamente uma entrada não-nula (a primeira parcela corresponde à introdução das, no máximo, n entradas nulas na primeira linha de D). Depois de uma aplicação singular de (b), k é incrementado para $k + 1$. Por isso, durante as m iterações do Passo 3, (a) e (b) são tarefas executadas, no máximo,

$$m[n + (n + 1) \log_2 M] = \mathcal{O}(mn) \quad (1.37)$$

vezes. Após a iteração $k = m - 1$, (1.31) do algoritmo **H** encontra-se na forma $[B \ 0]$ com $B = [b_{ij}]$ uma matriz quadrada triangular inferior cujos elementos da diagonal principal são todos positivos. Já vimos em (1.34) que o tempo de uma aplicação conjunta de (a) e (b) é $\mathcal{O}(m)$ e, portanto, por (1.37), o tempo das tarefas implementadas no Passo 3 é

$$\mathcal{O}(m^2n). \quad (1.38)$$

Como a matriz B é de ordem m , o Passo 4 tem, claramente, tempo

$$\mathcal{O}(m^3) \leq \mathcal{O}(m^2n). \quad (1.39)$$

Já mostrámos em (1.35) que nas sucessivas aplicações de (a) e (b), as entradas das matrizes envolvidas são limitadas em módulo por M^2 . Para mostrar que o

algoritmo **H** é polinomial falta só mostrar que, durante a execução do Passo 4, as entradas da matriz B são sempre limitadas (em módulo) polinomialmente por M . Mostraremos que o polinómio pretendido é precisamente $(M + 1)^m$. Com efeito, denotemos por c_j a coluna j de B . Na execução do Passo 4, esta coluna é alterada, no máximo, $m - j$ vezes e vamos obtendo sucessivamente novas colunas $c_j^0, c_j^1, \dots, c_j^{m-j}$ com $c_j^0 = c_j$. Vamos usar indução em $p = 0, 1, \dots, m - j$ para provar que, para qualquer $i = 1, 2, \dots, m$,

$$|(c_j^p)_i| \leq (M + 1)^{p+1} \quad \forall p = 0, 1, \dots, m - j \quad (1.40)$$

em que, para um dado vector v , $|v|$ denota o vector cujas componentes são os módulos das componentes de v . Se $p = 0$ (1.40) é verdade pois as entradas da matriz B estão compreendidas entre 0 e M . Suponhamos que (1.40) é verdade para p . Tem-se que $c_j^{p+1} = c_j^p - \lfloor \frac{(c_j^p)_{j+p+1}}{\beta_{j+p+1, j+p+1}} \rfloor c_{j+p+1}$ com

$$\left| \left\lfloor \frac{(c_j^p)_{j+p+1}}{\beta_{j+p+1, j+p+1}} \right\rfloor \right| \leq |(c_j^p)_{j+p+1}| \leq (M + 1)^{p+1},$$

por hipótese de indução. Por isso, para qualquer $i = 1, 2, \dots, m$,

$$\begin{aligned} |(c_j^{p+1})_i| &\leq |(c_j^p)_i| + \left| \left\lfloor \frac{(c_j^p)_{j+p+1}}{\beta_{j+p+1, j+p+1}} \right\rfloor \right| |\beta_{i, j+p+1}| \\ &\leq (M + 1)^{p+1} + (M + 1)^{p+1} M = (M + 1)^{p+2}, \end{aligned}$$

isto é, (1.40) também é verdade para $p + 1$. Assim, concluímos a veracidade de (1.40), ou seja, para qualquer $i = 1, 2, \dots, m$ e qualquer $p = 0, 1, \dots, m - j$,

$$|(c_j^p)_i| \leq (M + 1)^{p+1} \leq (M + 1)^{m-j+1} \leq (M + 1)^m.$$

Da arbitrariedade de j , concluímos que, durante a execução do Passo 4 do algoritmo **H**, as entradas da matriz B são limitadas em módulo por $(M + 1)^m$.

Somando os tempos dos Passos 1, 2, 3 e 4 do algoritmo **H** em (1.32), (1.33), (1.38) e (1.39), resp., concluímos que o algoritmo **H** tem tempo polinomial

$$\mathcal{O}(m^2 n) \quad (1.41)$$

que é igual ao tempo do método de eliminação de Gauss. \square

Corolário 1 *É possível encontrar a Forma Normal de Hermite $[B \ 0]$ de uma matriz A de números racionais, de dimensão $m \times n$ e de característica completa por linhas, e uma matriz U Unimodular (isto é, uma matriz quadrada de números inteiros cujo determinante é ± 1) tal que $AU = [B \ 0]$ em tempo polinomial dado por $\mathcal{O}(n^3)$.*

Prova: Suponhamos que $A = [a_{ij}]$, $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$, é, primeiro, uma matriz de números inteiros cuja Forma Normal de Hermite é $[B \ 0]$. Como A é uma matriz de característica completa por linhas, a menos de trocas de colunas, podemos assumir que $A = [A' \ A'']$ com A' não-singular. Consideremos a matriz quadrada

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A' & A'' \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

Como \tilde{A} pode ser conduzida à Forma Normal de Hermite através de uma sequência de operações elementares por colunas, isto significa que existe uma matriz Unimodular

$$U = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4 \end{bmatrix}$$

da mesma ordem que a ordem de \tilde{A} e particionada por blocos do mesmo modo (U_1, U_2, U_3 e U_4 são matrizes de ordem adequada) tal que a Forma Normal de Hermite de \tilde{A} é

$$\begin{bmatrix} A' & A'' \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^* & 0 \\ B' & B'' \end{bmatrix} \quad (1.42)$$

para adequadas matrizes B^*, B', B'' . Como $AU = [A' \ A'']U = [B^* \ 0]$ então, da Unicidade da Forma Normal de Hermite, concluímos que $B^* = B$. De (1.42) vem que $U_3 = B', U_4 = B''$ e, depois, $U_1 = A'^{-1}(B - A''B')$ e $U_2 = -A'^{-1}A''B''$. Portanto,

$$\begin{aligned} U &= \begin{bmatrix} A'^{-1}B - A'^{-1}A''B' & -A'^{-1}A''B'' \\ B' & B'' \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A'^{-1} & -A'^{-1}A'' \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & 0 \\ B' & B'' \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A' & A'' \\ 0 & I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B & 0 \\ B' & B'' \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.43)$$

Pelo Teorema 6, podemos achar a Forma Normal de Hermite de \tilde{A} através do algoritmo **H**, descrito na Figura 6.1, em tempo polinomial dado por

$$\mathcal{O}(n^3) \quad (1.44)$$

(ver (1.41)). Em particular, isto significa que as entradas das matrizes intervenientes no algoritmo **H**, particularmente as entradas da matriz final que é a Forma Normal de Hermite, são polinomialmente limitadas, em módulo, pelo valor máximo, em módulo, das entradas de \tilde{A} , que coincide com $M \equiv \max\{|a_{ij}|: i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n\}$. Como $\det(\tilde{A}) = \det(A') \neq 0$, então \tilde{A} é uma matriz não singular. A inversa da matriz \tilde{A} pode ser calculada, por exemplo, com o método de eliminação de Gauss em tempo polinomial dado também

por

$$\mathcal{O}(n^3). \quad (1.45)$$

Como as entradas de \tilde{A}^{-1} , a menos de uma multiplicação por uma constante ($= \pm 1/\det(\tilde{A})$) de valor absoluto não superior a 1, são subdeterminantes de \tilde{A} , então, estas entradas também são polinomialmente limitadas, em módulo, por M . Como a matriz U , por (1.43), é o produto destas duas últimas matrizes, então, as entradas de U ainda são polinomialmente limitadas, em módulo, por M . Este produto pode ser calculado em tempo

$$\mathcal{O}(n^3). \quad (1.46)$$

Como $AU = [B \ 0]$ então, é possível encontrar a Forma Normal de Hermite $[B \ 0]$ da matriz A e uma matriz U Unimodular tal que $AU = [B \ 0]$, em tempo polinomial dado pela soma dos tempos em (1.44), (1.45) e (1.46) que dá

$$\mathcal{O}(n^3). \quad (1.47)$$

Suponhamos agora que A é uma matriz de números racionais e que cada entrada situada na posição (i, j) é da forma $a_{ij} = p_{ij}/q_{ij}$ com $p_{ij} \in \mathbb{Z}$ e $q_{ij} \in \mathbb{N}$. Seja $M \equiv \max\{|a_{ij}|: i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n\}$ e seja $\alpha \equiv m.m.c.\{q_{ij}: i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n\}$. Então αA é uma matriz de números inteiros limitados em módulo por $M' = \alpha M$. Como já vimos, podemos encontrar a Forma Normal de Hermite $[B \ 0]$ da matriz αA e uma matriz U Unimodular tal que $\alpha AU = [B \ 0]$, através do algoritmo **H** e, de acordo com (1.47), em tempo polinomial dado por $\mathcal{O}(n^3)$. Durante a implementação deste algoritmo, as entradas das matrizes são polinomialmente limitadas, em módulo, por M' e, portanto, também por M . Como $AU = 1/\alpha[B \ 0]$, que é precisamente a Forma Normal de Hermite da matriz A , e as entradas da matriz $1/\alpha[B \ 0]$ também são polinomialmente limitadas, em módulo, por $1/\alpha M' = M$, concluímos a veracidade deste corolário, caso A seja uma matriz de números racionais. \square

Teoria de Poliedros

Teorema 7 *Seja P um poliedro definido por $P = \{x \in \mathbb{R}^n: Ax \leq b\}$. Um conjunto F é uma face minimal de P (isto é uma face própria de P que não contém qualquer outra), se e só se $\emptyset \neq F \subseteq P$ e*

$$F = \{x \in \mathbb{R}^n: A'x = b'\}$$

para um determinado subsistema $A'x \leq b'$ de $Ax \leq b$.

A prova deste teorema pode ser vista, por exemplo, em (Schrijver, 1986) ou nos textos de apoio da disciplina de Teoria de Optimização.

Teorema 8 *Para um poliedro racional P as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a). P é o invólucro convexo dos vectores inteiros de P ;
- (b). Toda a face de P contém vectores inteiros;
- (c). Toda a face minimal de P contém vectores inteiros;
- (d). Para todo o vector c tal que o valor óptimo de $\max\{cx: x \in P\}$ é finito, existe uma solução óptima que é um vector de inteiros.
- (e). Para todo o vector c tal que o valor óptimo de $\min\{cx: x \in P\}$ é finito, existe uma solução óptima que é um vector de inteiros.

A prova de que (a), (b), (c) e (d) são equivalentes entre si pode encontrar-se em (Schrijver, 1986) ou nos textos de apoio da disciplina de Teoria de Optimização. Temos que (d) e (e) equivalem-se pois, para o mesmo vector c , as soluções óptimas dos problemas $\max\{cx: x \in P\}$ e $\min\{-cx: x \in P\}$ são, claramente, as mesmas.

Lembremos nesta subsecção que o problema $\max\{cx: Ax \leq b\}$ é equivalente ao problema $\max\{c^*z: z \geq 0, A^*z = b\}$ com

$$z = \begin{bmatrix} x' \\ x'' \\ \tilde{x} \end{bmatrix}, \quad c^* = [c \quad -c \quad 0] \quad \text{e} \quad A^* = [A \quad -A \quad I]$$

em que x', x'' e \tilde{x} são vectores com a mesma dimensão que o vector x . A redução de cada um destes problemas ao outro é chamada uma *redução de Karp*. Lembremos ainda que o poliedro que define a região admissível de um problema linear com restrições de não-negatividade admite pelo menos um vértice (a prova disto pode ser vista, por exemplo, nos textos de apoio da cadeira de Teoria da Optimização).

Capítulo 2

Matriz Totalmente Unimodular

Neste capítulo, definimos matriz Totalmente Unimodular adoptando a definição de que é uma matriz cujos subdeterminantes são todos iguais a -1 , 0 ou 1 . Portanto, em particular, todos os elementos de uma matriz Totalmente Unimodular são zeros, uns e menos uns.

Matrizes com esta característica aparecem frequentemente em formulações de problemas de otimização combinatória, isto é, problemas de otimização linear em grafos. Veremos que tais problemas de otimização linear possuem uma solução ótima definida por números inteiros (frequentemente vector característico de um subgrafo) se a matriz das restrições for Totalmente Unimodular.

As matrizes que advêm de problemas de otimização combinatória são frequentemente matrizes de zeros, uns e menos uns quando são, por exemplo, a matriz de incidência vértice-aresta de um grafo, a matriz de incidência vértice-arco de um grafo dirigido (ou digrafo), a matriz de rede associada a um grafo e uma árvore, ou uma matriz de incidência dos cortes de um grafo — que serão todas analisadas no Capítulo 3 —, ou podem ser, ainda, matrizes “próximas” daquelas por acréscimo de uma linha de tudo-uns, ou linhas da matriz identidade, entre outras.

De uma maneira geral, não é fácil obter soluções ótimas para os problemas lineares que correspondem a formulações de problemas de otimização combinatória porque se impõe adicionalmente a *integralidade* da solução ótima procurada. Tais problemas são geralmente designados por problemas de otimização linear inteira.

Se ignorarmos aquela restrição de integralidade então podemos resolver o problema linear resultante, denotado relaxação linear, através de, por exemplo, o método de Simplex. Este método iterativo *desloca-se* de ponto extremo em ponto extremo até alcançar a solução ótima que, garantidamente, é um ponto extremo. Se conseguirmos garantir que todos os pontos extremos são definidos por números inteiros então também a solução ótima será inteira o que implicará

que teríamos resolvido também o problema original. Uma condição suficiente para que isso aconteça é a matriz das restrições ser Totalmente Unimodular.

Mais, a dualidade da otimização linear juntamente com o facto da matriz das restrições ser Totalmente Unimodular pode permitir o estabelecimento de relações do tipo *max-min* entre problemas que têm uma descrição puramente combinatória. Estas relações podem, por exemplo, suscitar métodos de resolução inovadores ou permitir uma descrição poliédrica dos envolventes convexos subjacentes. Este é o caso, por exemplo, do Teorema do Fluxo Máximo-Corte Mínimo e do Teorema de König para emparelhamentos em grafos bipartidos — que recordaremos no Capítulo 3.

Pelo exposto nos dois parágrafos anteriores, é importante saber se uma dada matriz de zeros, uns e menos uns, é Totalmente Unimodular ou não. Em geral, este problema de reconhecimento não é simples — veja-se o Capítulo 4. Contudo, as caracterizações alternativas de Unimodularidade Total podem fornecer critérios simples de reconhecimento. Na presença de determinada propriedade, esta ou aquela caracterização pode permitir concluir a Unimodularidade Total. Neste contexto uma caracterização que se tem revelado muito útil é o Teorema de Ghouila-Houri que demonstraremos. Demonstraremos também o Teorema de Hoffman-Kruskal, que estabelece uma condição necessária e suficiente para a existência de soluções óptimas inteiras numa classe de problemas de otimização linear em termos da Unimodularidade Total da matriz das restrições.

2.1 Definição e propriedades

Definição 5 *Uma matriz diz-se Totalmente Unimodular se uma qualquer sua submatriz quadrada tiver determinante $0, \pm 1$.*

As matrizes A_1 e A_2 abaixo são Totalmente Unimodulares enquanto que as matrizes A_3 e A_4 não são:

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & A_2 &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ A_3 &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & A_4 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.1}$$

Daqui em diante, usaremos a notação 'TU' para designar 'Totalmente Unimodular'. Algumas propriedades que decorrem imediatamente da definição de Unimodularidade Total são as seguintes:

- (a). Toda a submatriz de uma matriz Totalmente Unimodular é Totalmente Unimodular. Em particular, todos os elementos de uma matriz Totalmente Unimodular são $0, 1$ ou -1 .
- (b). A transposta de uma matriz Totalmente Unimodular também é Totalmente Unimodular.
- (c). Se A é Totalmente Unimodular e P é uma matriz de permutação de dimensão adequada então a matriz AP , ou PA , é Totalmente Unimodular.
- (d). Se multiplicarmos uma linha ou coluna de uma matriz Totalmente Unimodular por -1 , a matriz obtida também é Totalmente Unimodular.
- (e). Se duplicarmos uma linha (ou uma coluna) de uma matriz Totalmente Unimodular, a matriz obtida ainda é Totalmente Unimodular.
- (f). Se acrescentarmos uma linha ou uma coluna com no máximo uma entrada não nula a uma matriz Totalmente Unimodular, a matriz obtida ainda é Totalmente Unimodular.

Note-se que se numa matriz TU, substituirmos uma linha pela sua subtração com um múltiplo inteiro de outra linha, então a matriz assim obtida pode não ser TU. Por exemplo, se considerarmos as seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A' = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

é fácil verificar que A é TU e que A' se obtém de A por substituição em A da linha 3 pela sua subtração com a linha 2 previamente multiplicada por -1 . No entanto, A' não é TU porque a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

é uma submatriz quadrada de A' com determinante 2.

Teorema 9 *Se A é uma matriz TU e A_{IJ} é uma submatriz não singular então $(A|A_{IJ})$ é TU.*

Prova: Toda a submatriz não singular de $(A|A_{IJ})$ é da forma $(A_{KL}|A_{IJ})$, com A_{KL} uma submatriz de A que contém A_{IJ} como submatriz. Como, pela fórmula de Schur,

$$\det(A_{KL}|A_{IJ}) = \frac{\det(A_{KL})}{\det(A_{IJ})} = \pm 1,$$

concluimos que $(A|A_{IJ})$ é TU. \square

Proposição 1 *Uma matriz A de zeros, uns e menos uns, é Totalmente Unimodular se e só se qualquer base da matriz $[I \ A]$ tem determinante ± 1 (uma base de uma matriz é um conjunto de colunas dessa matriz linearmente independente e maximal).*

Prova: Note-se que a matriz $[I \ A]$ tem sempre característica completa por linhas. Por isso, toda a base de $[I \ A]$ é uma matriz quadrada.

(\Rightarrow) Suponhamos, por absurdo, que existe uma submatriz $[I_C \ A_D]$ de ordem m da matriz $[I \ A]$ tal que $\det [I_C \ A_D] \notin \{-1, 0, 1\}$. Por aplicação do Teorema de Laplace,

$$|\det [I_C \ A_D]| = |\det A_{ED}|,$$

sendo $E = \{1, 2, \dots, m\} \setminus C$ (isto é, retirámos as linhas e as colunas referentes a cada elemento não nulo da submatriz I_C). Então, $\det A_{ED} \notin \{-1, 0, 1\}$, o que é absurdo porque A é TU.

(\Leftarrow) Suponhamos, por absurdo, que A não é TU. Seja A_{ED} uma submatriz quadrada de A tal que $\det(A_{ED}) \notin \{-1, 0, 1\}$. Considere-se a submatriz $[I_C \ A_D]$ de ordem m da matriz $[I \ A]$, onde $C = \{1, 2, \dots, m\} \setminus E$. Por aplicação do Teorema de Laplace,

$$|\det [I_C \ A_D]| = |\det A_{ED}|,$$

e teríamos encontrado uma base de $[I \ A]$. Chegámos a um absurdo porque $\det [I_C \ A_D] \notin \{-1, 1\}$ e assumimos que qualquer base de $[I \ A]$ tem determinante igual a ± 1 . \square

Pela Proposição 1, para averiguar se uma matriz A de zeros, uns e menos uns, com m linhas e n colunas, é TU, basta calcular todos os determinantes das submatrizes $m \times m$ da matriz $[I \ A]$, que são em número igual a

$$\binom{m+n}{m} \equiv \frac{(m+n)!}{m!n!} = \left(1 + \frac{n}{m}\right) \left(1 + \frac{n}{m-1}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{1}\right)$$

Isto não implica que o reconhecimento de uma matriz TU seja polinomial. Mais adiante, veremos um algoritmo com o mesmo propósito mas com uma complexidade computacional polinomial (em m e n).

Teorema 10 *Seja A' a matriz que se obtém de uma matriz A através de uma operação pivotal. Então, A é TU se e só se A' é TU.*

Prova: (\Rightarrow) Suponhamos que A é TU e, sem perda de generalidade, que A é da forma (1.22) com $\varepsilon \neq 0$ o *pivot*. Pela Proposição 1, qualquer base de $[I \ A]$ tem determinante igual a ± 1 . A matriz

$$B = \begin{bmatrix} \varepsilon & \mathbf{0} \\ b & I \end{bmatrix}$$

é uma base da matriz $[I \ A]$. Como qualquer base B' de $B^{-1}[I \ A]$ é o produto de B^{-1} por uma adequada base B^* de $[I \ A]$, então

$$\det(B') = \det(B^{-1}B^*) = \frac{\det(B^*)}{\det(B)} = \frac{\pm 1}{\pm 1} = \pm 1.$$

Concluimos que qualquer base da matriz

$$B^{-1}[I \ A] = \begin{bmatrix} \varepsilon^{-1} & \mathbf{0} \\ -\varepsilon^{-1}b & I \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c|cc} I & \varepsilon & c \\ \hline & b & D \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|cc} \varepsilon^{-1} & \mathbf{0} & 1 & \varepsilon^{-1}c \\ \hline -\varepsilon^{-1}b & I & \mathbf{0} & D - \varepsilon^{-1}bc \end{array} \right]$$

também tem determinante igual a ± 1 . Como esta matriz coincide com $[I \ A']$ a menos de uma troca de duas colunas, uma multiplicação de uma linha por -1 e duas multiplicações de colunas por -1 , concluimos que A' é TU.

(\Leftarrow) Suponhamos que A' é TU. Se pivotarmos de novo no elemento ε de A' obtemos a matriz A e, portanto, pela implicação anterior, A é TU. \square

O Teorema 10 é particularmente relevante em algoritmos pivotais, como é o caso do método de Simplex, pois para esses algoritmos poderá ser possível a sua implementação sem divisões. Esse é o caso, por exemplo, quando da resolução do problema de transportes, o problema de afectação, ou o problema do fluxo máximo entre dois vértices de um grafo dirigido, através do método de Simplex.

2.2 Exemplo: matriz-ciclo

Definição 6 *Uma matriz de zeros, uns e menos uns, diz-se uma matriz-ciclo se contém exactamente duas entradas não-nulas por linha e por coluna e se nenhuma sua submatriz própria tem esta propriedade.*

Por exemplo, a matriz

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é uma matriz-ciclo. A próxima proposição justifica a designação escolhida para esta classe de matrizes.

Proposição 2 *Seja A uma matriz de zeros, uns e menos uns com pelo menos duas linhas e duas colunas e seja $G = (I, J; E)$, um grafo simples bipartido não-dirigido tal que $|A|$ é a sua matriz de adjacência. Então, A é uma matriz-ciclo se e só se G é um ciclo.*

Prova: (\Leftarrow) Como G é um ciclo, todos os vértices de G têm grau 2, ou seja, toda a linha e toda a coluna de A tem exactamente duas entradas não-nulas. Seja $A_{I', J'}$ com $I' \subseteq I$, $J' \subseteq J$ uma qualquer submatriz própria de A . A matriz de adjacência do subgrafo induzido $G[I' \cup J']$ é $|A_{I', J'}|$. Este subgrafo do ciclo G possui pelo menos um vértice de grau menor ou igual que um. Por isso, existe pelo menos uma linha ou uma coluna de $A_{I', J'}$ com apenas um elemento não-nulo. Por isso, $A_{I', J'}$ não pode ser uma matriz-ciclo.

(\Rightarrow) Como A é uma matriz-ciclo, então, A tem duas entradas não-nulas por linha e por coluna, o que significa que todos os vértices de G têm grau 2. Para concluirmos que G é um ciclo falta só mostrar que G é conexo. Suponhamos que G é desconexo e seja $G[I' \cup J']$, com $I' \subseteq I$, $J' \subseteq J$, $I' \cup J' \subset I \cup J$, uma das componentes conexas de G . A matriz de adjacência de $G[I' \cup J']$ é $|A_{I', J'}|$, que é um ciclo. Pela implicação anterior, $A_{I', J'}$ é uma matriz-ciclo. Mas como $A_{I', J'}$ é uma submatriz própria de A , concluimos que A não seria uma matriz-ciclo, o que é absurdo. Concluimos que G é conexo e, portanto é um ciclo. \square

Proposição 3 *Toda a submatriz quadrada própria de uma matriz-ciclo tem determinante pertencente a $\{0, \pm 1\}$.*

Prova: Seja A uma matriz-ciclo. A matriz A é, trivialmente, de ordem maior ou igual que 2. Seja A' uma submatriz quadrada própria de A . Vamos mostrar, por indução na ordem p da matriz A' , que $\det(A') \in \{0, \pm 1\}$. Se $p = 1$, então

$\det(A') \in \{0, \pm 1\}$ porque A é uma matriz de zeros, uns e menos uns. Suponhamos que $\det(A') \in \{0, \pm 1\}$ para toda a submatriz A' quadrada própria de A de ordem $p = k$. Seja A' uma submatriz quadrada própria de A de ordem $p = k+1$. Por definição de matriz-ciclo, A' tem alguma coluna (ou linha) nula ou igual a e^i (ou $(e^i)^T$) para algum índice i de coluna de A' . Por isso, $\det(A') = 0$ ou $|\det(A')| = |\det(A^*)|$ em que A^* é uma submatriz quadrada própria de A de ordem k . Então, por hipótese de indução, $\det(A') \in \{0, \pm 1\}$. Concluimos que $\det(A') \in \{0, \pm 1\}$ para qualquer submatriz A' quadrada própria de A . \square

Proposição 4 *O determinante de uma matriz-ciclo pertence a $\{0, \pm 2\}$.*

Prova: Seja A uma matriz-ciclo. Se calcularmos o determinante da matriz A usando regra de Laplace ao longo de uma linha ou de uma coluna de A , então, pela Proposição 3, $\det(A) \in \{0, \pm 1, \pm 2\}$. Basta mostrar que $\det(A) \neq \pm 1$. Façamos a prova por indução na ordem da matriz A . Suponhamos que A é 2×2 . Como A é uma matriz-ciclo, todas as entradas de A são iguais a ± 1 . Por isso, $\det(A) \neq \pm 1$. Suponhamos que esta proposição é válido para toda a matriz-ciclo de ordem n e seja A uma matriz-ciclo qualquer de ordem $n+1$. Pela Proposição 2, $|A|$ é a matriz de adjacência de um grafo bipartido G que é um ciclo. Logo, trocando convenientemente as linhas e as colunas de A , obtemos uma matriz A' com o seguinte aspecto:

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & & & & & & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2n} & & & & & & \\ & * & * & & & & & \\ & & * & * & & & & \\ & & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & * & * & & \\ & & & & & * & * & \\ & & & & & & * & * \end{bmatrix},$$

com $a_{11}, a_{21}, a_{2n}, a_{1n}$, adequadas entradas não-nulas (i.e., iguais a ± 1) da matriz A e em que cada espaço em branco representa uma entrada nula. Portanto, $\det(A) = \det(A')$. Se subtrairmos à segunda linha da matriz A' a primeira linha previamente multiplicada por $a_{21}/a_{11} = a_{11}a_{21}$, obtemos uma matriz A'' tal que

$$A'' = \begin{bmatrix} a_{11} & & & & & & & a_{1n} \\ 0 & a_{2n} & & & & & & a''_{2n} \\ & * & * & & & & & \\ & & * & * & & & & \\ & & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & * & * & & \\ & & & & & * & * & \\ & & & & & & * & * \end{bmatrix}, \quad \text{com } a''_{2n} = -a_{11}a_{21}a_{1n} = \pm 1$$

e $\det(A'') = \det(A')$. Como a primeira coluna de A'' é uma coluna da matriz identidade ou sua simétrica então, $\det(A'') = \det(A''')$ em que A''' é a submatriz de A'' que resulta de A'' por eliminação da primeira coluna e da primeira linha. É óbvio que $|A'''|$ é a matriz de adjacência de um grafo simples bipartido não dirigido que é um ciclo. Pela Proposição 2, A''' é uma matriz-ciclo. Como A''' tem ordem n então, por hipótese de indução, $\det(A) = \pm \det(A''') \neq \pm 1$. Pelo princípio de indução matemática, conclui-se a veracidade da proposição para uma matriz-ciclo A qualquer. \square

Pelas Proposições 2, 3 e 4, as seguintes matrizes

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

são TU pois, repare-se, todas as matrizes (2.2) são singulares. Com efeito, denotando por l_i a i ésima linha de qualquer uma das matrizes (2.2), temos que, na primeira matriz, $l_1 + l_2 = l_3$; na segunda, $l_1 - l_2 + l_3 = l_4$ e, na terceira matriz, $l_1 - l_2 - l_3 + l_4 = l_5$.

2.3 Outras caracterizações

Teorema 11 *Seja A uma matriz $m \times n$ de números inteiros. Para todo o vector b inteiro, o poliedro P definido por*

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, x \geq 0\} \quad (2.3)$$

é inteiro se e só se o poliedro $Q = \{z \in \mathbb{R}^{n+m} : [I \ A]z = b, z \geq 0\}$ é inteiro.

Prova: (\Rightarrow) Seja $\bar{z} = (\bar{y}, \bar{x})$ ponto extremo de Q com \bar{y} o vector constituído pelas primeiras m componentes de \bar{z} e \bar{x} o vector constituído pelas restantes n . Então existe um subsistema ' $Iy + Ax = b, y_D \geq 0_D, x_E \geq 0_E$ ' do sistema ' $Iy + Ax = b, y \geq 0, x \geq 0$ ' representado por uma matriz quadrada que é satisfeito como igualdade em \bar{z} e

$$\begin{vmatrix} I & A \\ I_D & 0 \\ 0 & I_E \end{vmatrix} \neq 0. \quad (2.4)$$

Seguidamente, provamos que \bar{x} é ponto extremo de P : de facto, $\bar{x} \in P$ porque $\bar{x} \geq 0$ e

$$[I \ A] \begin{bmatrix} \bar{y} \\ \bar{x} \end{bmatrix} = b \Leftrightarrow \bar{y} + A\bar{x} = b \Leftrightarrow \bar{y} = b - A\bar{x} \geq 0 \quad (2.5)$$

De (2.5) vem também que

$$\bar{y}_D = b_D - A_D \bar{x} \Leftrightarrow A_D \bar{x} = b_D$$

Além disso, $\bar{x}_E = 0$. Por isso ' $A_D x \leq b_D, x_E \geq 0$ ' é um subsistema de ' $Ax \leq b, x \geq 0$ ', representado pela matriz quadrada

$$\begin{bmatrix} A_D \\ I_E \end{bmatrix},$$

que é satisfeito como igualdade em \bar{x} . Usando a regra de Laplace, obtemos que

$$\begin{vmatrix} I & A \\ I_D & 0 \\ 0 & I_E \end{vmatrix} = \pm \begin{vmatrix} I^* & A \\ 0 & I_E \end{vmatrix} = \pm \begin{vmatrix} A_D \\ I_E \end{vmatrix} \neq 0, \quad (2.6)$$

por (2.4), e concluímos então que \bar{x} é ponto extremo de P . Por hipótese, \bar{x} é um vector inteiro e, assim, $\bar{y} = b - A\bar{x}$ também é inteiro. Concluimos que $\bar{z} = (\bar{y}, \bar{x})$ é inteiro. Da arbitrariedade de \bar{z} concluímos que Q é um poliedro inteiro.

(\Leftarrow) Seja \bar{x} ponto extremo de P . Então existe um subsistema ' $A_D x \leq b_D, x_E \geq 0$ ' do sistema ' $Ax \leq b, x \geq 0$ ' representado por uma matriz quadrada que é satisfeito como igualdade em \bar{x} e

$$\begin{bmatrix} A_D \\ I_E \end{bmatrix} \neq 0. \quad (2.7)$$

Seja $\bar{z} = (\bar{y}, \bar{x})$ com $\bar{y} = b - A\bar{x}$; seguidamente, provamos que \bar{z} é ponto extremo de Q : de facto, $\bar{z} \in P$ porque $\bar{x} \geq 0$, $\bar{y} = b - A\bar{x} \geq 0$ e

$$[I \quad A] \begin{bmatrix} \bar{y} \\ \bar{x} \end{bmatrix} = b - A\bar{x} + A\bar{x} = b.$$

Temos que

$$\begin{cases} A_D \bar{x} = b_D \\ \bar{x}_E = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_D - A_D \bar{x} = 0 \\ \bar{x}_E = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \bar{z}_{D \cup E} = 0$$

Então ' $[I \quad A] z = b, z_{D \cup E} \geq 0$ ' é um sub-sistema de ' $[I \quad A] z = b, z \geq 0$ ' que é satisfeito como igualdade em \bar{z} . Usando a regra de Laplace,

$$\begin{vmatrix} I & A \\ I_{D \cup E} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I & A \\ I_D & 0 \\ 0 & I_E \end{vmatrix} = \pm \begin{vmatrix} A_D \\ I_E \end{vmatrix} \neq 0, \quad (2.8)$$

por (2.7), e concluímos então que \bar{z} é ponto extremo de Q . Por hipótese, \bar{z} é inteiro. Por isso, em particular, \bar{x} é inteiro. Da arbitrariedade de \bar{x} concluímos que P é um poliedro inteiro. \square

Teorema 12 *Se A é Totalmente Unimodular então, para todo o vector b inteiro, o poliedro*

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\} \quad (2.9)$$

é inteiro.

Prova: Seja $F = \{x : A'x = b'\}$ uma face minimal de P em que ' $A'x \leq b'$ ' é um sub-sistema de ' $Ax \leq b$ ' tal que A' tem característica completa por linhas. Seja A'_B uma base de A' . Como A é TU, $\det(A'_B) = \pm 1$. Então para $x' = (x'_B, x'_N)$, com $N = \{1, 2, \dots, n\} \setminus B$, definido por

$$x'_B = (A'_B)^{-1} b', \quad x'_N = 0,$$

temos que $x' \in F$ porque $A'x' = A'_B x'_B + A'_N x'_N = b'$, e $x' \in \mathbb{Z}^n$ porque $\det(A'_B) = \pm 1$. \square

O recíproco do Teorema 12 não é verdade conforme se ilustra com o seguinte exemplo: consideremos o poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^3 : Ax \leq b\}$ com A a matriz definida por

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

e $b = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ um vector inteiro qualquer. Um ponto $x_0 \in P$ é um ponto extremo de P se e só se existe um subsistema " $A'x \leq b'$ " constituído pelas desigualdades do sistema $Ax \leq b$ satisfeitas como igualdade em x_0 e tal que $\text{car}(A') = 3$. Sem perda de generalidade, podemos supôr que A' é uma matriz quadrada. Assim, é fácil verificar que os pontos extremos de P são as soluções dos seguintes sistemas:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x &= \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} x &= \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} x &= \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} x &= \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

que são

$$\begin{aligned} x^1 &= (b_1 - b_2 + 2b_3, b_2 - b_3, b_3), & x^2 &= (-b_1 + b_2 + 2b_4, -b_1 + b_2 + b_4, b_1 - b_4), \\ x^3 &= (b_3 + b_4, b_1 - b_4, b_3), & x^4 &= (b_3 + b_4, b_2 - b_3, b_3), \end{aligned}$$

resp. Concluimos que P é um poliedro inteiro para todo b inteiro. No entanto, a matriz A não é TU porque admite como submatriz a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

cujo determinante é 2.

Corolário 2 *Se A é Totalmente Unimodular então, para todos os vectores b, c inteiros de dimensões apropriadas, ambos os problemas de optimização*

$$\max\{cx : Ax \leq b\} \quad e \quad \min\{yb : yA = c, y \geq 0\} \quad (2.11)$$

possuem soluções óptimas inteiras, sempre que o respectivo valor óptimo for finito.

Prova: Para todo o vector b inteiro tal que o problema de 'maximização' em (2.11) possua valor óptimo finito existe uma face minimal que é constituída por soluções óptimas. Pelo Teorema 12, existe uma solução óptima que é inteira. Para provar a segunda parte do corolário, note-se que o problema de 'minimização' em (2.11) pode escrever-se como

$$\begin{array}{ll} \max & y(-b) \\ \text{s.a.} & y \begin{bmatrix} A \\ -A \\ -I \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} c \\ -c \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Para todo o vector c inteiro tal que o problema de 'minimização' em (2.11) possua valor óptimo finito existe uma face minimal que é constituída por soluções óptimas. Pelas Propriedades imediatas (d), (e) e (f),

$$\begin{bmatrix} A \\ -A \\ -I \end{bmatrix}$$

é TU e, portanto, o Teorema 12 permite concluir que existe uma solução óptima que é inteira. \square

O recíproco do Corolário 2 não é verdade. Com efeito, consideremos em (2.11) que A é a matriz (2.10), por exemplo. Já vimos, no exposto a seguir ao Teorema 12, que o poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^3 : Ax \leq b\}$ tem vértices e é inteiro para qualquer vector b inteiro. Uma vez que se o problema de maximização em (2.11) tiver valor óptimo finito, este é atingido num vértice de P , então, este problema tem solução óptima inteira para qualquer vector inteiro c .

Consideremos que $c = (c_1, c_2, c_3)$; o poliedro

$$Q = \{y \in \mathbb{R}^4 : yA = c, y \geq 0\} = \{y \in \mathbb{R}^4 : A^T y = c, y \geq 0\}$$

que define a região admissível do problema de minimização em (2.11) é definido pelo seguinte sistema de igualdades e desigualdades:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} y \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Se o problema de maximização em (2.11) tiver valor óptimo finito (como estamos a supor), então, o problema de minimização em (2.11) também tem. Como, no poliedro Q , $y \geq 0$ então, para qualquer vector inteiro c , Q não contém qualquer linha. Logo, o problema de minimização em (2.11) possui sempre uma solução óptima que é ponto extremo de Q . Um ponto $y_0 \in Q$ é ponto extremo de Q se e só se existe um subconjunto K do conjunto dos índices de linha da matriz identidade I , tal que y_0 é solução do seguinte sistema de igualdades

$$A^T y = c, \quad -I[K]y = 0, \quad \text{com} \quad \text{car} \left(\begin{bmatrix} A^T \\ -I[K] \end{bmatrix} \right) = 4, \quad (2.13)$$

em que I denota a matriz identidade de ordem 4, e ainda $y[\bar{k}] > 0$. Sem perda de generalidade, podemos supor que em (2.13), $\begin{bmatrix} A^T \\ -I[K] \end{bmatrix}$ é uma matriz quadrada. De acordo com (2.12), os únicos sistemas de igualdades que, para algum subconjunto K do conjunto dos índices de linha da matriz identidade I , satisfazem (2.13), são os seguintes

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}, & \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}, & \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Por isso, para um dado vector inteiro $c = (c_1, c_2, c_3)$ qualquer, o conjunto dos pontos extremos de Q está contido no conjunto das soluções (únicas) de cada um dos sistemas em (2.14), que são

$$\begin{aligned} y^1 &= (0, c_2, c_1 - c_2 + c_3, c_1), & y^2 &= (c_2, 0, c_1 + c_3, c_1 - c_2), \\ y^3 &= (c_1 - c_2 + c_3, -c_1 + 2c_2 - c_3, 0, c_2 - c_3), & y^4 &= (c_1, -c_1 + c_2, -c_2 + c_3, 0), \end{aligned}$$

resp. Concluimos que Q também é um poliedro inteiro para qualquer vector inteiro c . Como o valor óptimo do problema de minimização em (2.11) é atingido num vértice de Q , então este problema tem solução óptima inteira para qualquer

vector inteiro b . No entanto, como já vimos antes, a matriz A definida em (2.10) não é TU.

O próximo teorema garante que, para uma dada matriz A de números inteiros, é condição necessária de Unimodularidade Total mas também condição suficiente que, para todo o vector b inteiro, um adequado poliedro, definido à custa da matriz A e do vector b , seja inteiro.

Teorema 13 (Hoffman e Kruskal, 1956) *Uma matriz A de números inteiros é Totalmente Unimodular se e só se, para todo o vector b inteiro,*

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, x \geq 0\} \quad (2.15)$$

é um poliedro inteiro.

Prova: Note-se que todo o poliedro definido por (2.15) tem pontos extremos. Por isso, P é inteiro se e só se todos os seus pontos extremos são inteiros.

(\Rightarrow) Seja b um vector inteiro qualquer. É óbvio que $P = \{x \in \mathbb{R}^n : A' \leq b'\}$ com

$$A' = \begin{bmatrix} A \\ -I \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b' = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Pelas Propriedades imediatas (d) e (f), A' é TU. Pelo Teorema 12, P é inteiro.

(\Leftarrow) Suponhamos que A é uma matriz $m \times n$. Seja A_{KJ} uma qualquer submatriz quadrada de A não-singular. Queremos provar que $\det(A_{KJ}) = \pm 1$. A matriz quadrada

$$B \equiv \begin{bmatrix} A_{KJ} & 0 \\ A_{\bar{K}J} & I \end{bmatrix} \equiv [B_A \ B_I]$$

é submatriz de $[A \ I]$ e $\det(A_{KJ}) = \det(B)$. Para provar o pretendido basta, então, mostrar que $\det(B) = \pm 1$. Seja β^j a j -ésima coluna de B^{-1} . É óbvio que existe um vector inteiro y tal que $z = y + \beta^j \geq 0$. Consideremos o vector $Bz = By + e^j$. Então Bz é inteiro. Sejam z_A e z_I os vectores constituídos pelas componentes de z correspondentes às colunas de B_A e B_I , resp. Vamos mostrar que $\tilde{x} = \begin{bmatrix} z_A \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ é vértice do poliedro P para $b \equiv Bz$.

Com efeito, como a menos de trocas de colunas, $A = [B_A \ A']$ para uma adequada submatriz A' de A , então

$$A\tilde{x} = B_A z_A + A'0 \leq B_A z_A + B_I z_I = Bz \quad \text{e} \quad \tilde{x} \geq 0 \quad (2.16)$$

A primeira desigualdade de (2.16) vale porque $B_I z_I \geq 0$ pois $B_I \geq 0$ e $z_I \geq 0$. A segunda desigualdade é válida por definição de \tilde{x} e porque $z \geq 0$. Logo $\tilde{x} \in P$. Além disso, $A[K]\tilde{x} = B[K]z$ porque

$$A[K]\tilde{x} = B_A[K]z_A \quad \text{e} \quad B[K]z = B_A[K]z_A + B_I[K]z_I = B_A[K]z_A \quad (2.17)$$

A última igualdade de (2.17) é válida porque, por definição de B_I e de B , $B_I[K]$ é a matriz nula. Denotando por J o índice das componentes de \tilde{x} indexadas por z_A , temos que ' $A[K]x \leq B[K]z$, $x_{\bar{j}} \geq 0$ ' é um sub-sistema do sistema ' $Ax \leq Bz$, $x \geq 0$ ' constituído por $|K| + (n - |J|) = |K| + (n - |K|) = n$ equações, satisfeito como igualdade em \tilde{x} e, após trocar convenientemente colunas,

$$\left| \begin{array}{c} A[K] \\ I_n[\bar{J}] \end{array} \right| = \pm \left| \begin{array}{cc} A_{KJ} & A_{K\bar{J}} \\ 0 & I \end{array} \right| = \pm |A_{KJ}| \neq 0.$$

Logo \tilde{x} é vértice de P . Por hipótese, \tilde{x} é inteiro e, portanto, z_A é inteiro. Como $Bz = B_A z_A + B_I z_I$, Bz e z_A são vectores inteiros e B_A é uma matriz inteira, então $B_I z_I = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} z_I = \begin{bmatrix} 0 \\ z_I \end{bmatrix}$ é inteiro. Logo z_I é inteiro e concluímos que z é inteiro. Então $\beta^j = z - y$ é inteiro. Da arbitrariedade de j , concluímos que B^{-1} é uma matriz inteira. Como B também é uma matriz inteira, $\det(B)$, $\det(B^{-1})$ são ambos inteiros. De $\det(B) \cdot \det(B^{-1}) = 1$, concluímos que $\det(B) = \pm 1$. \square

Teorema 14 (Corolário do Teorema de Hoffman e Kruskal) *Uma matriz A de números inteiros é Totalmente Unimodular se e só se, para todos os vectores a, b, c, d inteiros,*

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : a \leq Ax \leq b, c \leq x \leq d\}$$

é um poliedro inteiro.

Prova: (\Rightarrow) Suponhamos que A é TU. Como $P = \{x : A'x \leq b'\}$ com

$$A' = \begin{bmatrix} I \\ -I \\ A \\ -A \end{bmatrix} \quad e \quad b' = \begin{bmatrix} d \\ -c \\ b \\ -a \end{bmatrix}$$

e A' também é TU (pelas Propriedades (d), (e) e (f)), então, pelo Teorema 13, P é inteiro.

(\Leftarrow) Suponhamos que $P = \{x : A'x \leq b'\}$ é um poliedro inteiro, quaisquer que sejam os vectores a, b, c, d inteiros. Em particular, o poliedro $P_1 = \{x : x \geq 0 \quad A''x \leq b''\}$ com

$$A'' = \begin{bmatrix} I \\ A \\ -A \end{bmatrix} \quad e \quad b'' = \begin{bmatrix} d \\ b \\ -a \end{bmatrix},$$

que corresponde a escolher $c = 0$, é inteiro quaisquer que sejam a, b, d inteiros. Pelo Teorema 13, A'' é TU e A é TU porque é uma submatriz de A'' . \square

Corolário 3 *Uma matriz A de inteiros é TU se e só se para todos os vectores b, c inteiros de dimensões apropriadas, ambos os problemas de optimização*

$$\max\{cx: Ax \leq b, x \geq 0\} \quad e \quad \min\{yb: yA \geq c, y \geq 0\} \quad (2.18)$$

possuem soluções óptimas inteiras, sempre que o respectivo valor óptimo for finito.

Prova: (\Rightarrow) Suponhamos que A é TU e consideremos b, c quaisquer tais que ambos os problemas de optimização em (2.18) possuem valor óptimo finito. Pela Dualidade Forte da Programação Linear,

$$\max\{cx: Ax \leq b, x \geq 0\} = \min\{yb: yA \geq c, y \geq 0\}.$$

Denotemos por P_1 e P_2 os seguintes poliedros:

$$P_1 \equiv \{cx: Ax \leq b, x \geq 0\}$$

$$P_2 \equiv \{yb: yA \geq c, y \geq 0\} = \{yb: -A^T y \leq -c, y \geq 0\}.$$

Ambos os problemas em (2.18) possuem soluções óptimas em faces de dimensão mínima dos poliedros P_1 e P_2 , resp. Como P_1 tem vértices e A é TU então, pelo Teorema de Hoffman-Kruskal, os vértices de P_1 são vectores de inteiros e, por isso, o problema da esquerda em (2.18) possui solução óptima inteira. Como P_2 também tem vértices e $-A^T$ é TU então, de igual modo, concluímos que o problema da direita em (2.18) também possui solução óptima inteira.

(\Leftarrow) Seja b qualquer. Suponhamos que $P_1 \neq \emptyset$. Seja c qualquer tal que o valor óptimo do problema de maximização em (2.18) é finito. Pela Dualidade Forte da Programação Linear, o problema de minimização em (2.18) também possui valor óptimo finito. Por hipótese, ambos os problemas possuem soluções óptimas inteiras. Pelo Teorema 8, P_1 e P_2 são poliedros inteiros. Da arbitrariedade de b em P_1 , concluímos, pelo Teorema de Hoffman-Kruskal aplicado a P_1 , que A é TU. \square

Teorema 15 (Teorema de Ghouila-Houri) *Uma matriz A com entradas $0, 1, -1$ é Totalmente Unimodular se e só se*

toda a colecção de colunas da matriz A pode ser particionada em dois conjuntos tal que a soma de todas colunas em um conjunto menos a soma de todas colunas no outro conjunto é um vector só com entradas $0, \pm 1$.

(2.19)

Prova: (\Rightarrow) Suponhamos que A é $m \times n$, TU, e seja $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ o conjunto das colunas de A . Consideremos uma qualquer colecção de colunas de A , $C = \{c_i : i \in I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}\}$ e seja d o vector característico de C , isto é, cada componente d_i de d é tal que $d_i = 1$ se $i \in I$ e $d_i = 0$ se $i \notin I$. O poliedro

$$P = \left\{ x : 0 \leq x \leq d, \left\lfloor \frac{1}{2}Ad \right\rfloor \leq Ax \leq \left\lceil \frac{1}{2}Ad \right\rceil \right\}.$$

é não vazio pois $\frac{1}{2}d \in P$ e, sendo limitado, tem vértices. Seja \bar{x} um qualquer vértice de P . Como A é TU, \bar{x} é inteiro e como $0 \leq \bar{x} \leq d$, \bar{x} é um vector de zeros e uns e $y = d - 2\bar{x}$ tem apenas componentes $0, \pm 1$. Além disso,

$$\frac{1}{2}Ad - \left\lfloor \frac{1}{2}Ad \right\rfloor \leq \frac{1}{2}Ad - A\bar{x} \leq \frac{1}{2}Ad - \left\lceil \frac{1}{2}Ad \right\rceil$$

o que implica que

$$-1 < \frac{1}{2}Ay < 1 \Leftrightarrow -2 < Ay < 2,$$

isto é, Ay é um vector de componentes $0, \pm 1$. Sejam $U = \{i \in I : y_i = 1\}$ e $V = \{i \in I : y_i = -1\}$. Como $y = d - 2\bar{x} \equiv d \pmod{2}$ então $U \cup V = I$, o índice das colunas de C . Portanto

$$Ay = \sum_{i \in I} c_i y_i = \left(\sum_{i \in U} c_i \right) - \left(\sum_{i \in V} c_i \right)$$

(\Leftarrow) Por hipótese, A é uma matriz $m \times n$ tal que, para todo $R \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$, existe uma partição $\{R_1, R_2\}$ de R tal que

$$\sum_{j \in R_1} a_{ij} - \sum_{j \in R_2} a_{ij} \in \{-1, 0, 1\},$$

para todo $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Vamos provar por indução matemática forte que toda a submatriz quadrada de A tem determinante zero, um ou menos um.

Claramente, todo o elemento de A , denotado genericamente por a_{ij} , é zero, um ou menos um. De facto, isso decorre da hipótese para $R = \{i\}$.

Suponhamos que qualquer submatriz de A de dimensão inferior a k tem determinante zero, um ou menos um, e seja B uma qualquer submatriz invertível de A de dimensão k . A i -ésima coluna da matriz B^{-1} é solução \bar{x} do sistema de equações $Bx = e^i$. Pela regra de Cramer,

$$\bar{x}_j = \frac{\det B_j}{\det B} \quad (j = 1, 2, \dots, k),$$

onde B_j é uma matriz que resulta de B substituindo a coluna j de B por e^j . Pela hipótese de indução, $\det B_j \in \{-1, 0, 1\}$. Por isso, concluímos que a matriz $B^* \equiv (\det B)B^{-1}$ é uma matriz de zeros, uns e menos uns.

Seja b_1^* a primeira coluna de B^* , e portanto um vector de zeros, uns e menos uns, e seja $R = \{j: b_{j1}^* \neq 0\}$ Como $Bb_1^* = (\det B)e^1$ então

$$0 = (Bb_1^*)_i = \sum_{j \in R} b_{ij}b_{j1}^* \quad (i = 2, 3, \dots, k). \quad (2.20)$$

Como B é uma matriz de zeros, uns e menos uns, o somatório (2.20) é sempre uma soma de zeros, uns e menos uns que é igual a zero. Por isso, em cada uma dessas somas deverão existir igual número de uns e de menos uns. Isso, em particular, implica que

$$|\{j \in R: b_{ij} \neq 0\}| \text{ é par} \quad (i = 2, 3, \dots, k). \quad (2.21)$$

Por hipótese, existe uma partição $\{R_1, R_2\}$ de R tal que

$$\sum_{j \in R_1} b_{ij} - \sum_{j \in R_2} b_{ij} \in \{-1, 0, 1\} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, k).$$

Por (2.21), temos que

$$\sum_{j \in R_1} b_{ij} - \sum_{j \in R_2} b_{ij} = 0 \quad (i = 2, 3, \dots, k)$$

Se também tivéssemos, para $i = 1$,

$$\sum_{j \in R_1} b_{1j} - \sum_{j \in R_2} b_{1j} = 0.$$

então existiria uma combinação não nula das colunas de B que é igual a zero, o que é um absurdo porque B é invertível. Concluimos que $By \in \{e^1, -e^1\}$, para y definido por

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{se } j \in R_1 \\ -1 & \text{se } j \in R_2 \\ 0 & \text{se } j \notin R \end{cases} \quad (j = 1, 2, \dots, k),$$

Como $Bb_1^* = (\det B)e^1 = \pm By$ e B é invertível então $b_1^* \in \{(\det B)y, -(\det B)y\}$. Como ambos os vectores y e b_1^* são não nulos e têm componentes em $\{-1, 0, 1\}$, concluimos que $\det B \in \{-1, 1\}$. \square

Corolário 4 *Se A é uma matriz de zeros e uns tal que em cada coluna de A os uns aparecem consecutivamente, então A é uma matriz Totalmente Unimodular.*

Prova: Pelo Teorema de Ghouila-Houri, basta mostrar que toda a colecção de linhas de A se pode particionar em duas partes tal que a soma das linhas de

uma parte menos a soma das linhas da outra parte é um vector de zeros, uns e menos uns. Atendendo a (2.19), fica demonstrado que a matriz A^T é TU, o que implica que também A é TU.

Seja L o conjunto dos índices de linha de uma qualquer colecção de linhas de A e seja $p(i)$ a posição ordenada da linha $i \in L$ em L . Consideremos $L_1 = \{i \in L: p(i) \text{ é ímpar}\}$ e $L_2 = \{i \in L: p(i) \text{ é par}\}$. Como, por hipótese, em cada coluna de A os uns aparecem consecutivamente,

$$\sum_{i \in L_1} a_{ij} - \sum_{i \in L_2} a_{ij} = \sum_{i \in L} a_{ij} \in \{-1, 0, 1\},$$

para todo índice de coluna j , como pretendíamos demonstrar. \square

Corolário 5 *Se A é matriz de incidência vértice-arco de um grafo dirigido então, A é Totalmente Unimodular.*

Prova: Vamos mostrar que toda a colecção de linhas de A se pode particionar em duas partes tal que a soma das linhas de uma parte menos a soma das linhas da outra parte é um vector de zeros, uns e menos uns. Atendendo a (2.19), fica demonstrado que a matriz A^T é TU, o que implica que também A é TU.

Seja L o conjunto dos índices de linha de uma qualquer colecção de linhas de A e seja $L_1 = L$ e $L_2 = \emptyset$. Como cada coluna de A contém no máximo um 1 e no máximo um -1 ,

$$\sum_{i \in L_1} a_{ij} - \sum_{i \in L_2} a_{ij} = \sum_{i \in L} a_{ij} \in \{-1, 0, 1\},$$

para todo índice de coluna j , como pretendíamos demonstrar. \square

Corolário 6 *Seja M uma matriz de zeros, uns e menos uns tal que*

$$M = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

para adequadas matrizes A, D . A matriz M é TU se e só se A e D são TU.

Prova: (\Rightarrow) Como, por hipótese, M é TU, então, uma vez que A e D são submatrizes de M , pela Propriedade (a), A e D são TU.

(\Leftarrow) Denote-se por I, I_1 e I_2 , os conjuntos de índices de linha das matrizes $M, [A \ 0]$ e $[0 \ D]$, resp. Seja $K \subseteq I$ qualquer. Pelo Teorema 15 (de Ghouila-Houri), existe uma partição (K_1^+, K_1^-) de $K_1 \equiv K \cap I_1$ tal que

$$[0 \ u] \equiv \sum_{i \in K_1^+} [A \ 0]_i - \sum_{i \in K_1^-} [A \ 0]_i \quad (2.22)$$

é um vector de zeros, uns e menos uns. De igual modo, existe uma partição (K_2^+, K_2^-) de $K_2 \equiv K \cap I_2$ tal que

$$[0 \ v] \equiv \sum_{i \in K_2^+} [0 \ D]_i - \sum_{i \in K_2^-} [0 \ D]_i \quad (2.23)$$

é um vector de zeros, uns e menos uns. Então, para

$$K^+ = K_1^+ \cup K_2^+ \quad \text{e} \quad K^- = K_1^- \cup K_2^-.$$

tem-se que (K^+, K^-) é uma partição de K tal que

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in K^+} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}_i - \sum_{i \in K^-} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}_i = \\ & = \left(\sum_{i \in K_1^+} [A \ 0]_i - \sum_{i \in K_1^-} [A \ 0]_i \right) + \left(\sum_{i \in K_2^+} [0 \ D]_i - \sum_{i \in K_2^-} [0 \ D]_i \right) \\ & = [u \ 0] + [0 \ v] = [u \ v] \end{aligned}$$

é um vector de zeros, uns e menos uns. Pelo Teorema 15, M é TU. \square

Corolário 7 *Seja M uma matriz de zeros, uns e menos uns, tal que*

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

para adequadas matrizes A, B e D . Se existe um vector-coluna a e um vector-linha b ambos não-nulos e de zeros, uns e menos uns, tais que $B = ab$, então, M é TU se e só se $[A \ a]$ e $\begin{bmatrix} b \\ D \end{bmatrix}$ são TU.

Prova: Comecemos por fixar alguma notação. Denotemos por I, J os conjuntos dos índices de linha e de coluna da matriz M , resp. Sejam $I_1, I_2 \subseteq I$ os conjuntos de índices de linha das matrizes $[A \ B]$ e $[0 \ D]$, resp., e sejam $J_1, J_2 \subseteq J$ os conjuntos de índices de coluna das matrizes $\begin{bmatrix} A \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix}$, resp. Cada linha $i \in I_1$ de B e cada coluna $j \in J_2$ de B é definida, resp., por

$$B_i = \begin{cases} b & \text{se } a_i = 1 \\ -b & \text{se } a_i = -1 \\ 0 & \text{se } a_i = 0. \end{cases} \quad \text{e} \quad B_j = \begin{cases} a & \text{se } b_j = 1 \\ -a & \text{se } b_j = -1 \\ 0 & \text{se } b_j = 0. \end{cases}$$

(\Rightarrow) Suponhamos que M é TU. As matrizes $[A \ a]$ e $\begin{bmatrix} b \\ D \end{bmatrix}$ são submatrizes de M , a menos de uma multiplicação por -1 da última coluna ou da primeira linha, resp. Como M é TU, estas duas matrizes são TU.

(\Leftarrow) Suponhamos que ambas as matrizes $[A \ a]$ e $\begin{bmatrix} b \\ D \end{bmatrix}$ são TU. Como $[A \ a]$ é TU então, pelas Propriedades (e) e (f), $[A \ B]$ também é TU. Pelo Teorema 15 (de Ghouila-Houri), existe uma partição (K_1^+, K_1^-) de $K_1 \equiv K \cap I_1$, tal que

$$[u \ v] \equiv \sum_{i \in K_1^+} [A \ B]_i - \sum_{i \in K_1^-} [A \ B]_i \quad (2.25)$$

é um vector de zeros, uns e menos uns. Note-se que, atendendo à definição de B , $v \in \{-b, 0, b\}$. Agora, como a matriz D é TU, existe uma partição (K_2^+, K_2^-) de $K_2 \equiv K \cap I_2$ tal que

$$[0 \ w] \equiv \sum_{i \in K_2^+} [0 \ D]_i - \sum_{i \in K_2^-} [0 \ D]_i \quad (2.26)$$

é um vector de zeros, uns e menos uns. Denote-se por $I_{2,0} \equiv \{0\} \cup I_2$, o conjunto de índices de linha da matriz $\begin{bmatrix} b \\ D \end{bmatrix}$. Como esta matriz é TU, existe uma partição $(K_{2,0}^+, K_{2,0}^-)$ de $K_{2,0} \equiv \{0\} \cup K_2$ tal que

$$[0 \ z] \equiv \sum_{i \in K_{2,0}^+} \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & D \end{bmatrix}_i - \sum_{i \in K_{2,0}^-} \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & D \end{bmatrix}_i \quad (2.27)$$

é um vector de zeros, uns e menos uns. Para o resto da demonstração precisamos considerar três situações distintas, consoante o valor de v em (2.25): $v = -b$, $v = 0$ e $v = b$. Se $v = 0$ então considere-se a partição (K^+, K^-) de K definida por

$$K^+ = K_1^+ \cup K_2^+ \quad \text{e} \quad K^- = K_1^- \cup K_2^-.$$

Para esta partição, tem-se que

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in K^+} \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}_i - \sum_{i \in K^-} \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}_i = \\ & = \left(\sum_{i \in K_1^+} [A \ B]_i - \sum_{i \in K_1^-} [A \ B]_i \right) + \left(\sum_{i \in K_2^+} [0 \ D]_i - \sum_{i \in K_2^-} [0 \ D]_i \right) \\ & = [u \ 0] + [0 \ w] = [u \ w], \end{aligned}$$

que é um vector de zeros, uns e menos uns.

Se $v = b$ então há que considerar dois casos, consoante $0 \in K_{2,0}^+$ ou não. Se $0 \in K_{2,0}^+$, então considere-se a partição (K^+, K^-) de K definida por

$$K^+ = K_1^+ \cup (K_{2,0}^+ \setminus \{0\}) \quad \text{e} \quad K^- = K_1^- \cup K_{2,0}^-.$$

Para esta partição, tem-se que

$$\begin{aligned}
& \sum_{i \in K^+} \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}_i - \sum_{i \in K^-} \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}_i = \\
& = \left(\sum_{i \in K_1^+} [A \ B]_i - \sum_{i \in K_1^-} [A \ B]_i \right) + \left(\sum_{i \in K_{2,0}^+} \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & D \end{bmatrix}_i - \sum_{i \in K_{2,0}^-} \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & D \end{bmatrix}_i \right) - [0 \ b] \\
& = [u \ b] + [0 \ z] - [0 \ b] = [u \ z],
\end{aligned}$$

que é um vector de zeros, uns e menos uns. Se $0 \notin K_{2,0}^+$, então considere-se a partição (K^+, K^-) de K definida por

$$K^+ = K_1^- \cup K_{2,0}^+ \quad \text{e} \quad K^- = K_1^+ \cup (K_{2,0}^- \setminus \{0\}).$$

Para esta partição, tem-se que

$$\begin{aligned}
& \sum_{i \in K^+} \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}_i - \sum_{i \in K^-} \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}_i = \\
& = - \left(\sum_{i \in K_1^+} [A \ B]_i - \sum_{i \in K_1^-} [A \ B]_i \right) + \left(\sum_{i \in K_{2,0}^+} \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & D \end{bmatrix}_i - \sum_{i \in K_{2,0}^-} \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & D \end{bmatrix}_i \right) + [0 \ b] \\
& = -[u \ b] + [0 \ z] + [0 \ b] = [-u \ z],
\end{aligned}$$

que é um vector de zeros, uns e menos uns. O caso de $v = -b$ é análogo ao caso de $v = b$. Neste caso os desenvolvimentos anteriores permanecem válidos para

$$\begin{aligned}
K^+ &= K_1^- \cup (K_{2,0}^+ \setminus \{0\}), & K^- &= K_1^+ \cup K_{2,0}^- & \text{se } 0 \in K_{2,0}^+; \\
K^+ &= K_1^+ \cup K_{2,0}^+, & K^- &= K_1^- \cup (K_{2,0}^- \setminus \{0\}) & \text{se } 0 \in K_{2,0}^-.
\end{aligned}$$

Tendo analisado todos os casos concluímos, pelo Teorema 15, que M é TU. \square

Como uma matriz é TU se e só se a sua transposta for TU, também temos a veracidade do seguinte: Seja M uma matriz de zeros, uns e menos uns, tal que

$$M = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

para adequadas matrizes A, C e D . Se existe um vector-coluna c e um vector-linha d ambos não-nulos e de zeros, uns e menos uns, tais que $C = cd$, então, M é TU se e só se $\begin{bmatrix} A \\ d \end{bmatrix}$ e $[c \ D]$ são TU.

Corolário 8 *Seja M uma matriz de zeros, uns e menos uns tal que*

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

para adequadas matrizes A, B, C, D . Se existem vectores-coluna a, c e vectores-linha b, d de zeros, uns e menos uns, tal que $B = ab$ e $C = cd$ e se ambas as matrizes

$$\begin{bmatrix} A & a & a \\ d & 0 & \varepsilon \end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & b \\ c & c & D \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

são TU para algum $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, então M é TU.

Prova: Denotemos por I, J os conjuntos dos índices de linha e de coluna da matriz M , resp. Sejam $I_1, I_2 \subseteq I$ os conjuntos de índices de linha das matrizes $[A \ B]$ e $[C \ D]$, resp., e sejam $J_1, J_2 \subseteq J$ os conjuntos de índices de coluna das matrizes $\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix}$, resp. Cada linha $i \in I_1$ de B e cada coluna $j \in J_2$ de B é definida por

$$B_i = \begin{cases} b & \text{se } a_i = 1 \\ -b & \text{se } a_i = -1 \\ 0 & \text{se } a_i = 0. \end{cases} \quad e \quad B_j = \begin{cases} a & \text{se } b_j = 1 \\ -a & \text{se } b_j = -1 \\ 0 & \text{se } b_j = 0 \end{cases}, \quad (2.31)$$

resp., assim como cada linha i de C e cada coluna j de C é definida por

$$C_i = \begin{cases} d & \text{se } c_i = 1 \\ -d & \text{se } c_i = -1 \\ 0 & \text{se } c_i = 0. \end{cases} \quad e \quad C_j = \begin{cases} c & \text{se } d_j = 1 \\ -c & \text{se } d_j = -1 \\ 0 & \text{se } d_j = 0 \end{cases}, \quad (2.32)$$

resp. Denote-se, ainda, por Q a matriz do lado esquerdo de (2.30) e por Q^* a matriz do lado direito de (2.30). Seja $K \subseteq I$ qualquer. Como, por hipótese, Q e Q^* são TU, então $[A \ a]$ e $[c \ D]$ também o são. Pelas Propriedades (e) e (f), $[A \ B]$ e $[C \ D]$ também são TU. Pelo Teorema 15 (de Ghouila-Houri), existe uma partição (K_1^+, K_1^-) de $K_1 \equiv K \cap I_1$ e uma partição (K_2^+, K_2^-) de $K_2 \equiv K \cap I_2$ tal que

$$[u \ v] \equiv \sum_{i \in K_1^+} [A \ B]_i - \sum_{i \in K_1^-} [A \ B]_i \quad (2.33)$$

e

$$[w \ z] \equiv \sum_{i \in K_2^+} [C \ D]_i - \sum_{i \in K_2^-} [C \ D]_i, \quad (2.34)$$

são vectores-linha de zeros, uns e menos uns. Por (2.31) e (2.32), $v \in \{-b, 0, b\}$ e $w \in \{-d, 0, d\}$. Denote-se por $I_{1,0} \equiv I_1 \cup \{0\}$ o conjunto dos índices de linha da matriz Q , em que a linha 0 é a última, e por $I_{2,0} \equiv \{0^*\} \cup I_2$ o conjunto dos índices de linha da matriz Q^* , em que a linha 0^* é a primeira. Como, por hipótese, Q e Q^* são TU então, pelo Teorema de Ghouila-Houri, existe uma partição $(K_{1,0}^+, K_{1,0}^-)$ de $K_{1,0} \equiv K_1 \cup \{0\}$ e uma partição $(K_{2,0}^+, K_{2,0}^-)$ de $K_{2,0} \equiv \{0^*\} \cup K_2$ tal que

$$[u \ \theta \ \gamma] \equiv \sum_{i \in K_{1,0}^+} \begin{bmatrix} A & a & a \\ d & 0 & \varepsilon \end{bmatrix}_i - \sum_{i \in K_{1,0}^-} \begin{bmatrix} A & a & a \\ d & 0 & \varepsilon \end{bmatrix}_i \quad (2.35)$$

e

$$[\rho \ \omega \ z] \equiv \sum_{i \in K_{2,0}^+} \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & b \\ c & c & D \end{bmatrix}_i - \sum_{i \in K_{2,0}^-} \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & b \\ c & c & D \end{bmatrix}_i \quad (2.36)$$

são vectores-linha de zeros, uns e menos uns. Em particular $\theta, \gamma, \rho, \omega \in \{0, \pm 1\}$. Vamos supôr, sem perda de generalidade, que $0 \in K_{1,0}^-$. Se isso não acontecer, invertam-se os papeis de $K_{1,0}^+$ e $K_{1,0}^-$ e isso já passa a acontecer sem contrariar o que foi dito antes.

Do mesmo modo, vamos supôr que $0 \in K_{2,0}^+$. Caso contrário, inverta-se os papeis de $K_{2,0}^+$ e $K_{2,0}^-$. Por construção, exactamente um dos elementos de $\{\theta, \gamma\}$ é igual a zero e exactamente um dos elementos de $\{\rho, \omega\}$ é igual a zero. Dito de outro modo, para algum $\alpha \in \{0, \varepsilon\}$ e para algum $\beta \in \{0, \varepsilon\}$,

$$\sum_{i \in K_{1,0}^+} \begin{bmatrix} a \\ \alpha \end{bmatrix}_i - \sum_{i \in K_{1,0}^-} \begin{bmatrix} a \\ \alpha \end{bmatrix}_i = 0 \quad (2.37)$$

e

$$\sum_{i \in K_{2,0}^+} \begin{bmatrix} \beta \\ c \end{bmatrix}_i - \sum_{i \in K_{2,0}^-} \begin{bmatrix} \beta \\ c \end{bmatrix}_i = 0. \quad (2.38)$$

Por (2.31) e (2.32), temos que a coluna j de $\begin{bmatrix} B \\ ab \end{bmatrix}$ e a coluna j de $\begin{bmatrix} \beta d \\ C \end{bmatrix}$ são tais que

$$\begin{bmatrix} B \\ ab \end{bmatrix}_j = \begin{cases} \begin{bmatrix} a \\ \alpha \end{bmatrix} & \text{se } b_j = 1 \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \text{se } b_j = 0 \\ -\begin{bmatrix} a \\ \alpha \end{bmatrix} & \text{se } b_j = -1 \end{cases}, \quad \begin{bmatrix} \beta d \\ C \end{bmatrix}_j = \begin{cases} \begin{bmatrix} \beta \\ c \end{bmatrix} & \text{se } d_j = 1 \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \text{se } d_j = 0 \\ -\begin{bmatrix} \beta \\ c \end{bmatrix} & \text{se } d_j = -1 \end{cases} \quad (2.39)$$

Juntando as observações (2.37), (2.38) e (2.39), concluímos que

$$\sum_{i \in K_{1,0}^+} \begin{bmatrix} B \\ ab \end{bmatrix}_i - \sum_{i \in K_{1,0}^-} \begin{bmatrix} B \\ ab \end{bmatrix}_i = 0, \quad \sum_{i \in K_{2,0}^+} \begin{bmatrix} \beta d \\ C \end{bmatrix}_i - \sum_{i \in K_{2,0}^-} \begin{bmatrix} \beta d \\ C \end{bmatrix}_i = 0. \quad (2.40)$$

Por isso,

$$\sum_{i \in K_{1,0}^+} \begin{bmatrix} A & B \\ d & ab \end{bmatrix}_i - \sum_{i \in K_{1,0}^-} \begin{bmatrix} A & B \\ d & ab \end{bmatrix}_i = [u \ 0] \quad (2.41)$$

e

$$\sum_{i \in K_{2,0}^+} \begin{bmatrix} \beta d & b \\ C & D \end{bmatrix}_i - \sum_{i \in K_{2,0}^-} \begin{bmatrix} \beta d & b \\ C & D \end{bmatrix}_i = [0 \ z]. \quad (2.42)$$

De (2.41),

$$\sum_{i \in K_{1,0}^+} [A \ B]_i - \sum_{i \in K_{1,0}^- \setminus \{0\}} [A \ B]_i = [u \ 0] + [d \ \alpha b] = [u + d \ \alpha b] \quad (2.43)$$

e, de (2.42),

$$\sum_{i \in K_{2,0}^+ \setminus \{0^*\}} [C \ D]_i - \sum_{i \in K_{2,0}^-} [C \ D]_i = [0 \ z] - [\beta d \ b] = [-\beta d \ z - b]. \quad (2.44)$$

Para finalizar, sejam r e s o número de linhas não-nulas da matriz B e C , resp., isto é, o número de componentes não-nulas de a e c , resp. Consideremos quatro casos: i) r e s são ambos pares; ii) r e s são ambos ímpares; iii) r é par e s é ímpar; iv) r é ímpar e s é par.

Se estamos no caso i) então, de (2.33) e (2.34), $v = w = 0$ porque r e s são ambos pares (o resultado da soma e subtração de um certo número de “ ± 1 ’s” tem a mesma paridade que este número). Para a partição (K^+, K^-) de K , com $K^+ = K_1^+ \cup K_2^+$ e $K^- = K_1^- \cup K_2^-$, por (2.33) e (2.34), temos que

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in K^+} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}_i - \sum_{i \in K^-} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}_i = \\ & = \left(\sum_{i \in K_1^+} [A \ B]_i - \sum_{i \in K_1^-} [A \ B]_i \right) + \left(\sum_{i \in K_2^+} [C \ D]_i - \sum_{i \in K_2^-} [C \ D]_i \right) \\ & = [u \ 0] + [0 \ z] = [u \ z] \end{aligned}$$

que é um vector de zeros, uns e menos uns.

Suponhamos que estamos no caso ii). Como r e s são ambos ímpares, nem o valor de θ em (2.35) nem o valor de ω em (2.36) pode ser 0. Por esse facto, $\alpha = \beta = \varepsilon$. Consideremos ainda dois casos, consoante $\varepsilon = 1$ ou $\varepsilon = -1$. Se $\varepsilon = 1$ então considere-se a partição (K^+, K^-) de K definida por

$$K^+ = K_{1,0}^+ \cup K_{2,0}^+ \setminus \{0^*\}, \quad K^- = K_{1,0}^- \setminus \{0\} \cup K_{2,0}^-.$$

Para esta partição,

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in K^+} \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}_i - \sum_{i \in K^-} \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}_i = \\ & = \left(\sum_{i \in K_{1,0}^+} [A \ B]_i - \sum_{i \in K_{1,0}^- \setminus \{0\}} [A \ B]_i \right) + \left(\sum_{i \in K_{2,0}^+ \setminus \{0^*\}} [C \ D]_i - \sum_{i \in K_{2,0}^-} [C \ D]_i \right) \\ & = [u + d \ b] + [-d \ z - b] = [u \ z], \end{aligned}$$

que é um vector de zeros, uns e menos uns. Se $\varepsilon = -1$ então considere-se a partição (K^+, K^-) de K definida por

$$K^+ = K_{1,0}^+ \cup K_{2,0}^-, \quad K^- = K_{1,0}^- \setminus \{0\} \cup K_{2,0}^+ \setminus \{0^*\}.$$

Para esta partição,

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in K^+} \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}_i - \sum_{i \in K^-} \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}_i = \\ & = \left(\sum_{i \in K_{1,0}^+} [A \ B]_i - \sum_{i \in K_{1,0}^- \setminus \{0\}} [A \ B]_i \right) - \left(\sum_{i \in K_{2,0}^+ \setminus \{0^*\}} [C \ D]_i - \sum_{i \in K_{2,0}^-} [C \ D]_i \right) \\ & = [u + d \ -b] - [d \ z - b] = [u \ -z], \end{aligned}$$

que é um vector de zeros, uns e menos uns.

Suponhamos que estamos no caso iii). Como r é par, de (2.35), $\theta = 0$. Por isso, em (2.37), $\alpha = 0$. Por outro lado, como s é ímpar $w \in \{-d, d\}$. Se $w = d$ então considere-se a partição (K^+, K^-) de K definida por

$$K^+ = K_{1,0}^+ \cup K_2^-, \quad K^- = K_{1,0}^- \setminus \{0\} \cup K_2^+.$$

Para esta partição,

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in K^+} \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}_i - \sum_{i \in K^-} \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}_i = \\ & = \left(\sum_{i \in K_{1,0}^+} [A \ B]_i - \sum_{i \in K_{1,0}^- \setminus \{0\}} [A \ B]_i \right) - \left(\sum_{i \in K_2^+} [C \ D]_i - \sum_{i \in K_2^-} [C \ D]_i \right) \\ & = [u + d \ 0] - [d \ z] = [u \ -z], \end{aligned}$$

que é um vector de zeros, uns e menos uns. Se $w = -d$ então considere-se a partição (K^+, K^-) de K definida por

$$K^+ = K_{1,0}^+ \cup K_2^+, \quad K^- = K_{1,0}^- \setminus \{0\} \cup K_2^-.$$

Para esta partição,

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in K^+} \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}_i - \sum_{i \in K^-} \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}_i = \\ & = \left(\sum_{i \in K_{1,0}^+} [A \ B]_i - \sum_{i \in K_{1,0}^- \setminus \{0\}} [A \ B]_i \right) + \left(\sum_{i \in K_2^+} [C \ D]_i - \sum_{i \in K_2^-} [C \ D]_i \right) \\ & = [u + d \ 0] + [-d \ z] = [u \ z], \end{aligned}$$

que é um vector de zeros, uns e menos uns.

Suponhamos que estamos no caso iv). Como r é ímpar $v \in \{-b, b\}$. Por outro lado, como s é par, de (2.36), $w = 0$. Por isso, em (2.38), $\beta = 0$. Se $v = b$ então considere-se a partição (K^+, K^-) de K definida por

$$K^+ = K_1^+ \cup K_{2,0}^+ \setminus \{0^*\}, \quad K^- = K_1^- \cup K_{2,0}^-.$$

Para esta partição, e de forma análoga ao caso iii),

$$\sum_{i \in K^+} \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}_i - \sum_{i \in K^-} \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}_i$$

é um vector de zeros, uns e menos uns. Se $v = -b$ então considere-se a partição (K^+, K^-) de K definida por

$$K^+ = K_1^- \cup K_{2,0}^+ \setminus \{0^*\}, \quad K^- = K_1^+ \cup K_{2,0}^-.$$

Para esta partição, e de forma análoga ao caso iii),

$$\sum_{i \in K^+} \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}_i - \sum_{i \in K^-} \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}_i$$

também é um vector de zeros, uns e menos uns. Pelo Teorema de Ghouila-Houri, M é TU. \square

O recíproco do corolário anterior também é verdadeiro. A demonstração é ligeiramente complexa. Achámos mais próprio incluí-la na Secção 4.2 com o Teorema 46. Com o lema que apresentamos a seguir, retomaremos o estudo de outras caracterizações de matrizes TU.

Lema 5 *Seja A uma matriz quadrada de zeros, uns e menos uns e com determinante em módulo maior do que 2. Então,*

A possui uma submatriz quadrada com determinante igual a ± 2 .

Prova: Denotemos por n a dimensão de A . Consideremos a matriz $B = [A \ I]$ com I a matriz identidade de ordem n e seja B^* a matriz que se obtém de B após uma das seguintes operações elementares: (a) substituir uma linha pela sua soma ou subtração com outra linha; (b) multiplicar uma coluna por -1 ; (c) trocar duas linhas entre si. Estas operações elementares preservam o módulo do determinante de qualquer submatriz $n \times n$ de C . Isto é, se $B_J(B_J^*, \text{resp.})$ é uma submatriz $n \times n$ de $B(B^*, \text{resp.})$, indexada pelas colunas $J \subseteq \{1, 2, \dots, 2n\}$, então $|\det(B_J)| = |\det(B_J^*)|$.

Denote-se por B' a matriz que se obtém de C após aplicação sucessiva destas operações e que satisfaz as seguintes propriedades: (I) B' é uma matriz de zeros, uns e menos uns; (II) B' contém todas as n colunas da matriz identidade; (III) B' contém o maior número possível de colunas da matriz identidade entre as primeiras n , digamos k .

Sem perda de generalidade, a matriz B' tem o seguinte aspecto:

$$B' = \left[\begin{array}{c|c|c} I_k & & 0 \\ - & A' & - \\ 0 & & I_{n-k} \end{array} \right] \quad (2.45)$$

para uma certa matriz quadrada A' de ordem n , e onde I_k e I_{n-k} representam as matrizes identidade de ordem k e $n - k$, resp.

Seja C a submatriz de B' formada pelas primeiras n colunas. Claramente, $|\det(C)| = |\det(A)|$ e, por isso, $|\det(C)| > 2$. Em particular, isto implica que $k < n$. Como $\det(C) \neq 0$, existe um elemento ± 1 na posição (i, j) , digamos b'_{ij} , com $i \geq k + 1$ e $n \geq j \geq k + 1$. Sem perda de generalidade, suponhamos que $b'_{ij} = 1$.

Seja $b'_{mj} = 1$ um qualquer elemento não-nulo da coluna j com $m \neq i$ e suponhamos que existe uma coluna $l \neq j$, com $k + 1 \leq l \leq n + k$, tal que b'_{ml} e b'_{il} são não-nulos. Se b'_{ml} e b'_{il} são simétricos então, existe uma submatriz 2×2 de B' que tem o aspecto

$$\begin{bmatrix} 1 & \pm 1 \\ 1 & \mp 1 \end{bmatrix}.$$

Se $b'_{mj} = -1$ e $b'_{ml} = b'_{il}$ então, de modo análogo, existe uma submatriz 2×2 de B' que tem o aspecto

$$\begin{bmatrix} -1 & \pm 1 \\ 1 & \pm 1 \end{bmatrix}$$

e, de igual modo, se concluiria a existência de uma submatriz de B' com determinante ± 2 . A submatriz de B' constituída pela coluna j , coluna l e colunas da matriz identidade distintas de e^j e e^l tem determinante ± 2 .

Nos restantes casos, é possível eliminar todos os elementos não-nulos da coluna j de B' , à excepção de b'_{ij} , efectuando operações elementares do tipo (a) ou (b) e sem que as matrizes transformadas deixem de ter a propriedade (I), e destruindo apenas o facto da coluna $n + i$ ser a coluna e^i da matriz identidade. No final dessa série de operações a j -ésima coluna ficaria e^i , obtendo-se assim a propriedade (II). A ordem pela qual as operações se efectuam não tem qualquer relevância (tal como na eliminação de Gauss). Por isso, obter-se-ia uma matriz com o aspecto (2.45) com k incrementado de uma unidade. Chegámos a um absurdo por definição de k .

Concluimos que existe pelo menos uma submatriz M' $n \times n$ de B' com determinante ± 2 . Então as correspondentes colunas de B formam uma matriz M com determinante ± 2 . Usando a regra de Laplace ao longo de cada uma das colunas de M que sejam colunas da submatriz I de B , concluimos que $\det(M) = \pm \det(A')$ em que A' é uma submatriz de A . Logo, a matriz A tem uma submatriz com determinante ± 2 . \square

Teorema 16 (Teorema de Gomory) *Uma matriz A de zeros, uns e menos uns é Totalmente Unimodular se e só se*

$$\text{não existe nenhuma submatriz quadrada de } A \text{ com determinante } \pm 2. \quad (2.46)$$

Prova: (\Rightarrow) Toda a submatriz quadrada de uma matriz TU possui determinante zero, um ou menos um.

(\Leftarrow) Se todas as submatrizes quadradas de A têm módulo do determinante menor do que 2 então, como A é uma matriz de inteiros, esse valor só pode ser zero, um ou menos um. Então, A seria TU.

Suponhamos, por absurdo, que existe uma submatriz quadrada B de A com módulo do determinante maior do que 2. Pelo Lema 5, B possui uma submatriz quadrada com determinante igual a ± 2 . Logo, A também possui uma submatriz quadrada com determinante igual a ± 2 , o que contradiz a hipótese (2.46) do Teorema. \square

Corolário 9 *Seja $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ e considere-se a seguinte matriz de zeros, uns e menos uns:*

$$\begin{bmatrix} A & a & a \\ b & 0 & \varepsilon \end{bmatrix}, \quad (2.47)$$

em que A é uma matriz, a é um vector-coluna e b é um vector-linha, ambos de dimensão adequada. A matriz (2.47) é TU se e só se ambas as matrizes abaixo são TU,

$$\begin{bmatrix} A & a \\ b & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} A & a \\ b & \varepsilon \end{bmatrix}. \quad (2.48)$$

Prova: Denotemos por M a matriz em (2.47). Denotemos por M_1 a matriz do lado esquerdo de (2.48) e por M_2 a matriz do lado direito.

(\Rightarrow) Como M é TU e M_1, M_2 são submatrizes de M , então M_1 e M_2 também são TU.

(\Leftarrow) Por hipótese, M_1 e M_2 são TU. Vamos provar que não existe nenhuma submatriz quadrada de M com determinante ± 2 . Pelo Teorema de Gomory (Teorema 16), M será TU.

Seja S uma submatriz quadrada de M . Se S é submatriz de M_1 ou M_2 então, por hipótese e pelo Teorema de Gomory, $\det(S) \neq \pm 2$. Por isso, suponhamos que os índices das duas últimas colunas de M fazem parte dos índices de coluna de S . Se o índice da última linha de M não faz parte dos índices de linha de S , então $\det(S) \neq \pm 2$, porque é zero. Por isso, suponhamos que o índice da última linha de M faz parte dos índices de linha de S . Então,

$$S = \begin{bmatrix} A' & a' & a' \\ b' & 0 & \varepsilon \end{bmatrix}$$

em que A' é uma adequada submatriz de A , a' é uma sub-coluna do vector-coluna a e b' é uma sub-linha do vector-linha b . Subtraindo à última coluna de S a penúltima, vem que

$$\det(S) = \det\left(\begin{bmatrix} A' & a' & 0 \\ b' & 0 & \varepsilon \end{bmatrix}\right) = \pm \det([A' \ a']) \neq \pm 2,$$

por hipótese. Em qualquer caso, concluímos que $\det(S) \neq \pm 2$, o que termina a demonstração. \square

Como a propriedade de Unimodularidade Total é preservada por troca de linhas e colunas, a veracidade do Corolário 9 implica também a veracidade do seguinte (o Corolário 9 e o resultado que vamos expôr de seguida, serão usados, oportunamente, numa outra secção): Seja $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ qualquer e considere-se uma matriz de zeros, uns e menos uns definida por

$$\begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & d \\ c & c & D \end{bmatrix}, \quad (2.49)$$

em que D é uma matriz, c é um vector-coluna e d é um vector-linha, ambos de dimensão adequada. Então, a matriz (2.49) é TU se e só se ambas as matrizes

$$\begin{bmatrix} 0 & d \\ c & D \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} \varepsilon & d \\ c & D \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

são TU.

Lema 6 *Seja B uma matriz de zeros, uns e menos uns, quadrada invertível com determinante par. Se nenhuma submatriz própria de B quadrada e invertível possui determinante par então, a soma dos elementos de cada linha e de cada coluna de B é par.*

Prova: Suponhamos que B é de ordem m . Seja $b = \det(B)e^1$, com e^1 o primeiro vector da base canónica. Como $\det(B) \neq 0$, então a única solução \bar{x} do sistema $Bx = b$ é caracterizada pela regra de Cramer por

$$\bar{x}_j = \frac{\det(B_j)}{\det(B)}, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

com B_j uma matriz que resulta de B por substituição da j -ésima coluna por b . Aplicando a regra de Laplace na coluna substituída, observamos que $\det(B_j) = \pm \det(B) \cdot \det(B'_j)$, com B'_j uma submatriz quadrada própria de B , e, por isso,

$$\bar{x}_j = \pm \det(B'_j).$$

Como nenhuma submatriz quadrada, invertível e própria de B possui determinante par, \bar{x} é um vector tal que todas as suas componentes não nulas são ímpares. Não podem ser todas nulas porque $b \neq 0$. Seja \bar{x}_I o vector constituído pelas componentes não-nulas de \bar{x} e seja B_I a submatriz de B correspondente a essas componentes não nulas. Então

$$B\bar{x} = B_I\bar{x}_I = b \equiv 0 \pmod{2}. \quad (2.51)$$

Como B_I tem característica completa por colunas e como a dimensão do espaço das colunas de uma matriz é igual à dimensão do espaço das suas linhas, então existe uma submatriz Q de B_I invertível tal que $Q\bar{x}_I \equiv 0 \pmod{2}$. Logo, $Q\bar{x}_I \equiv c$ em que c é um vector com todas as componentes pares. Então, pela regra de Cramer, cada componente j de \bar{x}_I é tal que

$$(\bar{x}_I)_j = \frac{2 \det(Q'_j)}{\det(Q)}, \quad \forall j = 1, 2, \dots \quad (2.52)$$

com Q'_j a matriz que resulta de Q por substituição da j -ésima coluna por $\frac{1}{2}c$. Como $(\bar{x}_I)_j$ é ímpar, então, por (2.52), $\det(Q)$ é par. Como, por hipótese, Q não pode ser submatriz própria de B então $Q = B = B_I$. Logo, I é o índice de todas as colunas de B , ou seja, todas as componentes de \bar{x} são ímpares. Como, por (2.51),

De $B\bar{x} \equiv 0 \pmod{2}$ então, para todo $i = 1, 2, \dots, m$

$$\sum_{j: b_{ij} \neq 0} b_{ij}\bar{x}_j \quad \text{é par} \quad (2.53)$$

Como B é uma matriz de zeros, uns e menos uns, então (2.53) é um somatório de parcelas ímpares. Como este somatório é par, então o seu número de parcelas (que é igual ao número de elementos não-nulos de B na linha i) é par, o que implica que a soma de todos os elementos de qualquer linha de B é par. É óbvio que B^T satisfaz a hipótese deste Teorema. Logo, a mesma argumentação aplicada a B^T prova que a soma de todos os elementos de qualquer coluna de B é par. \square

Teorema 17 (de Camion I) *Uma matriz A de zeros, uns e menos uns é Totalmente Unimodular se e só se*

$$\textit{toda a submatriz não singular de } A \textit{ tem uma linha com um número ímpar de componentes não nulas} \quad (2.54)$$

Prova:

(\Rightarrow) Seja $B = [b_{ij}]$ uma qualquer submatriz de A com colunas $\{b_1, b_2, \dots, b_p\}$. Como A é TU então B também é TU. Pelo Teorema de Ghouila-Houri, existe uma partição (U, V) das colunas de B tal que

$$\sum_{j \in U} b_j - \sum_{j \in V} b_j \equiv Bx \in \{-1, 0, 1\}$$

sendo x um vector cujas componentes x_j são $+1$ se $j \in U$ e -1 se $j \in V$. Então, em cada linha i de Bx , temos

$$(Bx)_i = \sum_{j=1}^p b_{ij}x_j = \sum_{j: b_{ij} \neq 0} b_{ij}x_j \in \{-1, 0, 1\}$$

e, portanto, $(Bx)_i$ é a soma de ± 1 's em número igual ao número de componentes não nulas na linha i de B . Se toda as linhas de B tivessem um número par de componentes não nulas então o vector Bx teria que ser o vector nulo, pois a soma de um número par de ± 1 's é sempre um número par. Mas, então, B não poderia ser invertível porque $x \neq 0$. Concluimos (2.54).

(\Leftarrow) Suponhamos, por absurdo, que A satisfaz (2.54) e não é TU. Como A não é TU, A possui uma submatriz B com $|\det(B)| \geq 2$. Temos que $\det(B) = \pm 2$ ou $|\det(B)| > 2$. Se $|\det(B)| > 2$ então, pelo Lema 5, B possui uma submatriz C quadrada tal que $\det(C) = \pm 2$. Portanto, em qualquer caso, A possui uma submatriz A' com determinante par e não-nulo. Consideremos A' de ordem mínima. Então A' satisfaz a hipótese do Lema 6. Logo, a soma de todos os elementos de qualquer linha de A' é par e, como A' é uma matriz de zeros, uns e menos uns, todas as linhas de A' têm um número par de componentes não-nulas, o que contradiz (2.54). \square

Corolário 10 *Todas as matrizes com entradas 0,1 e no máximo 3 linhas e 3 colunas são Totalmente Unimodulares, à exceção da matriz*

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

e das matrizes que resultam de M por trocas de linhas e/ou colunas.

Prova: É óbvio que todas as matrizes com entradas 0,1 e com menos que 3 linhas e/ou colunas são TU porque todas as matrizes quadradas de ordem 1 ou 2 têm determinante igual a $0, \pm 1$. Consideremos uma matriz A quadrada com entradas 0,1 e ordem 3. É óbvio que as submatrizes próprias não-singulares

de A verificam (2.54). Logo, pelo Teorema 17, A é TU se e só se, sendo A não-singular, A tem uma linha com um número ímpar de uns ou, dito de forma equivalente, A não é TU se e só se A é não-singular e todas as linhas de A têm um número par (0 ou 2) de uns. Se alguma das linhas de A tem 0 uns, ou seja, se alguma das linhas de A é a linha-nula, então A é singular. Logo,

$$\begin{aligned} &A \text{ não é TU se e só se } A \text{ é não-singular e} \\ &\text{todas as linhas de } A \text{ têm 2 uns.} \end{aligned} \quad (2.56)$$

Se houverem linhas repetidas, então A é singular. Logo, a única “candidata” a matriz não TU é, a menos de trocas de linhas e/ou colunas, a matriz de M de (2.55). Como $\det(M) = 2$, então M é não-singular e, por (2.56), M não é TU. \square

Teorema 18 (de Camion II) *Uma matriz A de zeros, uns e menos uns é Totalmente Unimodular se e só se*

$$\begin{aligned} &\text{para toda a submatriz quadrada de } A \text{ cuja soma dos elemen-} \\ &\text{tos de cada linha e de cada coluna é par, a soma de todos os} \\ &\text{elementos dessa submatriz é divisível por quatro.} \end{aligned} \quad (2.57)$$

Prova: (\Rightarrow) Seja $B = [b_{ij}]$ uma submatriz $p \times p$ de A cuja soma dos elementos de cada linha e de cada coluna é par. Como A é TU então B também é TU. Logo, pelo Teorema de Ghouila-Houri, existe uma partição (U, V) das colunas de B tal que

$$v_k \equiv \sum_{j \in U} b_{kj} - \sum_{j \in V} b_{kj} = \sum_{j=1}^p b_{kj} - 2 \sum_{j \in V} b_{kj} \in \{-1, 0, 1\} \quad (k = 1, 2, \dots, p).$$

Como $\sum_{j=1}^p b_{kj}$ é par, concluímos que v_k é par. Por isso, $v_k = 0$ ou, de modo equivalente,

$$\sum_{j \in U} b_{kj} = \sum_{j \in V} b_{kj} \quad (k = 1, 2, \dots, p). \quad (2.58)$$

Sejam

$$\sigma_1 = \sum_{j \in U} \sum_{k=1}^p b_{kj} \quad \text{e} \quad \sigma_2 = \sum_{j \in V} \sum_{k=1}^p b_{kj}.$$

Então, por (2.58),

$$\sigma_1 = \sum_{k=1}^p \left(\sum_{j \in U} b_{kj} \right) = \sum_{k=1}^p \left(\sum_{j \in V} b_{kj} \right) = \sigma_2$$

Além disso, como $\sum_{k=1}^p b_{kj}$ é um número par, σ_1 e σ_2 são ambos pares e, portanto, $\sigma_1 = \sigma_2 = 2r$, para algum inteiro r . Então, a soma de todos os elementos

de B , que é igual a $\sigma_1 + \sigma_2 = 4r$, é um múltiplo de 4. Portanto, concluímos (2.57).

(\Leftarrow) Vamos mostrar através do princípio de indução matemática que (2.57) \Rightarrow (2.46) no conjunto de todas as matrizes de zeros, uns e menos uns. Assim sendo, uma matriz A de zeros, uns e menos uns, que satisfaz (2.57), também satisfaz (2.46). Pelo Teorema de Gomory essa matriz A é TU, o que permite concluir a demonstração.

Seja $\{-1, 0, 1\}^{m \times n}$ o conjunto de todas as matrizes de zeros, uns e menos uns com m linhas e n colunas. Então, $A \in \{-1, 0, 1\}^{1 \times 1}$ significa que A é um escalar $\alpha \in \{-1, 0, 1\}$. Neste caso, as proposições (2.57) e (2.46) são trivialmente verdadeiras. Por isso, (2.57) \Rightarrow (2.46) no conjunto das matrizes $\{-1, 0, 1\}^{1 \times 1}$.

Sejam $m, n \geq 1$ com $m + n > 2$, quaisquer. Supondo que (2.57) \Rightarrow (2.46) para qualquer matriz de $\{-1, 0, 1\}^{k \times l}$, com $k \leq m$, $l \leq n$ e $k + l < m + n$, vamos provar que também (2.57) \Rightarrow (2.46) para qualquer matriz de $\{-1, 0, 1\}^{m \times n}$.

Suponhamos, por absurdo, que existe uma matriz $A \in \{-1, 0, 1\}^{m \times n}$ que satisfaz (2.57) e não satisfaz (2.46). Como $A = [a_{ij}]$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, não satisfaz (2.46), existe uma submatriz quadrada A' de A com determinante ± 2 . Uma vez que A satisfaz (2.57), é óbvio que A' também satisfaz (2.57). Se A não é quadrada ou o seu determinante não é ± 2 , então A' é uma submatriz própria de A que satisfaz (2.57) e não satisfaz (2.46). Pela hipótese de indução, isto é absurdo.

Por isso, suponhamos que A é quadrada e $\det(A) = \pm 2$. Por hipótese de indução, as submatrizes próprias de A que satisfazem (2.57) também satisfazem (2.46). Pelo Teorema de Gomory, essas submatrizes são TU. Logo, A satisfaz a hipótese do Lema 6 e, portanto, o vector constituído pela soma dos elementos de cada linha de A , que é igual a $A1$, e o vector constituído pela soma dos elementos de cada coluna de A , que é igual a $1^T A$, sendo 1 um vector-coluna de tudo uns, são ambos vectores com componentes pares.

Seja $B = [b_{ij}]$ a matriz que se obtém de A retirando-lhe a primeira linha e suponhamos que B tem p colunas. Por hipótese de indução, B é TU e, pelo Teorema de Ghouila-Houri, existe um vector x com entradas ± 1 tal que Bx é um vector de zeros, uns e menos uns. Para toda a componente i de Bx , tem-se

$$(Bx)_i = \sum_{j=1}^p b_{ij} x_j = \sum_{j: x_j=1} b_{ij} - \sum_{j: x_j=-1} b_{ij} = \sum_{j=1}^p b_{ij} - 2 \sum_{j: x_j=-1} b_{ij}. \quad (2.59)$$

Como $(Bx)_i \in \{-1, 0, 1\}$ e como $\sum_{j=1}^p b_{ij}$ é par, então $(Bx)_i$ é par, o que implica que $Bx = 0$. Seja l a primeira linha de A . Então

$$Ax = \begin{bmatrix} l \\ B \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} lx \\ Bx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

para algum α inteiro. Seja A' a matriz que se obtém de A retirando-lhe a primeira coluna e sejam C e D as matrizes definidas por

$$C = \left[\begin{array}{c|ccc} & 0 & \cdots & 0 \\ x & & & \\ \hline & & I & \end{array} \right], \quad D = \left[\begin{array}{c|c} \alpha & \\ 0 & \\ \vdots & \\ 0 & \end{array} \middle| A' \right]$$

Como C é triangular inferior e x é um vector de uns e menos uns, $\det(C) = \pm 1$. Usando a regra de Laplace, concluímos que

$$\det(D) = \alpha \cdot \det(A'') \quad (2.61)$$

sendo A'' a submatriz que se obtém de A' por eliminação da primeira linha. Como A' , por hipótese de indução, é TU, então $\det(A'') \in \{0, \pm 1\}$. Por outro lado, como $AC = D$ então (2.61) fica

$$(\pm 2) \cdot (\pm 1) = \alpha \cdot \det(A'').$$

Concluímos que $\alpha \in \{-2, 2\}$. A soma de todos os elementos de A é igual a

$$1^T A 1 = 1^T A(1 - x) + 1^T A x. \quad (2.62)$$

Já vimos que o vector $1^T A$ é um vector de componentes pares. Como o vector $1 - x$ tem componentes apenas iguais a 0 ou 2, concluímos que $1^T A(1 - x) \equiv 0 \pmod{4}$. Como $1^T A x = \alpha = \pm 2$ então, por (2.62) $1^T A 1 \equiv 2 \pmod{4}$, ou seja, $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} \equiv 2 \pmod{4}$, o que contradiz (2.57). \square

Na secção 2.2 definimos matriz-ciclo como uma matriz de zeros, uns e menos uns que contém exactamente duas entradas não-nulas por linha e por coluna mas tal que nenhuma sua submatriz própria tem esta propriedade. Obviamente, a soma de todas as entradas não-nulas de uma matriz-ciclo é $0 \pmod{4}$ ou $2 \pmod{4}$. Dir-se-á equilibrada no primeiro caso e desequilibrada no segundo caso.

Corolário 11 *Seja A uma matriz-ciclo. Então, A é TU se e só se A é uma matriz-ciclo equilibrada.*

Prova: Seja δ o somatório de todos os elementos não-nulos da matriz A . Vamos mostrar que (2.57) verifica-se para A se e só se A é uma matriz-ciclo equilibrada. Seja A' uma submatriz quadrada própria de A cuja soma dos elementos não-nulos de cada linha e de cada coluna é par. Pela Proposição 3, A' é TU e, por isso, (2.57) verifica-se para A' . Em particular, a soma de todos os elementos

não-nulos de A' é divisível por quatro (independentemente do valor de δ). Por isso, (2.57) verifica-se para A (que, em particular é uma submatriz quadrada de A cuja soma dos elementos não-nulos de cada linha e de cada coluna é par - por ser matriz-ciclo) se e só se a soma de todos os seus elementos não-nulos é divisível por quatro, isto é, se e só se A é uma matriz-ciclo equilibrada. \square

Pela Proposição 2 e pelo Corolário 11, as seguintes matrizes

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

são TU por serem matrizes-ciclo equilibradas.

Corolário 12 *Seja A uma matriz-ciclo e δ o somatório de todas as suas entradas não-nulas. Então,*

$$\det(A) = \begin{cases} 0 & \text{se } \delta \equiv 0 \pmod{4} \\ \pm 2 & \text{se } \delta \equiv 2 \pmod{4} \end{cases} \quad (2.63)$$

Prova: Suponhamos que $\delta \equiv 0 \pmod{4}$. Pelo Corolário 11, A é TU e pela Proposição 4, $\det(A) = 0$. Suponhamos que $\delta \equiv 2 \pmod{4}$. Pelo Corolário 11, A não é TU. Pela Proposição 3, $\det(A) \notin \{0, \pm 1\}$ e pela Proposição 4, $\det(A) = \pm 2$. \square

Existe uma generalização do conceito de matriz Totalmente Unimodular que é o conceito de matriz Equilibrada. Uma matriz de zeros, uns e menos uns diz-se Equilibrada se para toda a sua submatriz quadrada com exactamente duas entradas não nulas por linha e por coluna, a soma de todos os elementos dessa submatriz é divisível por 4. Dito de outro modo, uma matriz de zeros, uns e menos uns, é Equilibrada se e só se não contém qualquer submatriz que seja uma matriz-ciclo desequilibrada. Qualquer matriz de zeros, uns e menos uns que não seja Equilibrada dir-se-á naturalmente, Desequilibrada. Pelo Teorema de Camion II, toda a matriz Totalmente Unimodular é uma matriz Equilibrada. Tal como as matrizes Totalmente Unimodulares, as matrizes Equilibradas também são muito importantes em Programação Linear mas o seu estudo sai fora do âmbito deste trabalho.

Teorema 19 *Uma matriz A de inteiros é Totalmente Unimodular se e só se para todos os vectores inteiros b , y , e para todo natural k , tal que $y \geq 0$ e $Ay \leq kb$, existem vectores inteiros x_1, x_2, \dots, x_k em $\{x: Ax \leq b, x \geq 0\}$ tal que $y = x_1 + x_2 + \dots + x_k$.*

(2.64)

Prova: (\Leftarrow) Pelo Teorema 13 de Hoffman e Kruskal, A é TU se e só se para todo o vector inteiro b o poliedro $P = \{x: Ax \leq b, x \geq 0\}$ tem todos os seus pontos extremos inteiros. Uma vez que P tem pontos extremos é esta última afirmação que vamos mostrar.

Seja x_0 um ponto extremo não inteiro de P . Como A e b são inteiros, x_0 é um vector racional. Seja k o m.m.c dos denominadores das componentes de x_0 . Então, $y = kx_0$ é um vector inteiro que satisfaz $y \geq 0$ e $Ay \leq kb$. Por hipótese, existem vectores inteiros x_1, x_2, \dots, x_k de P tal que $y = x_1 + x_2 + \dots + x_k$. Então

$$x_0 = \frac{1}{k}x_1 + \frac{1}{k}x_2 + \dots + \frac{1}{k}x_k \quad (2.65)$$

Se os vectores x_1, x_2, \dots, x_k são todos iguais então $x_0 = x_1 = x_2 = \dots = x_k$. Portanto, x_0 é inteiro, o que é absurdo. Caso contrário, (2.65) significa que x_0 se escreve como combinação convexa de dois ou mais pontos distintos de P , o que também é absurdo porque x_0 é ponto extremo de P .

(\Rightarrow) Seja A uma matriz TU. Mostramos por indução matemática que, para todo o inteiro $k \geq 1$, o seguinte se verifica

Para todo b, y inteiros tais que $y \geq 0$ e $Ay \leq kb$ existem vectores inteiros x_1, x_2, \dots, x_k de $P = \{x: Ax \leq b, x \geq 0\}$ tal que $y = x_1 + x_2 + \dots + x_k$. (2.66)

Se $k = 1$, então (2.66) verifica-se trivialmente com $x_1 = y$. Suponhamos que (2.66) é verdade para algum $k - 1 \geq 1$. Vamos mostrar que (2.66) também é verdade para k . Sejam b, y inteiros tais que $y \geq 0$ e $Ay \leq kb$. Consideremos o poliedro

$$Q = \{x: 0 \leq x \leq y, \quad Ay - (k - 1)b \leq Ax \leq b\}.$$

Primeiro, mostramos que Q é não-vazio mostrando que $y/k \in Q$. Claramente, $0 \leq y/k \leq y$ e, como $Ay \leq kb$, $A(y/k) \leq b$. Além disso,

$$A\left(\frac{1}{k}y\right) = Ay - \frac{k-1}{k}Ay \geq Ay - (k-1)b$$

Portanto, pelo Teorema 14 (corolário do Teorema de Hoffman e Kruskal), todos os pontos extremos de Q são inteiros. Seja x_k um qualquer ponto extremo de Q . Para $y' = y - x_k$, tem-se $y' \geq 0$ porque $x_k \in Q$. Além disso,

$$Ay' = Ay - Ax_k \leq (k-1)b.$$

Pela hipótese de indução, existem vectores inteiros x_1, x_2, \dots, x_{k-1} de P tal que $y' = x_1 + x_2 + \dots + x_{k-1}$, e portanto, $y = x_1 + x_2 + \dots + x_k$. Como $x_k \in Q \subseteq P$ e é inteiro, concluímos a veracidade de (2.66) para k . Pelo método de indução matemática concluímos a veracidade de (2.66) para qualquer k . \square

Teorema 20 *Uma matriz A com entradas $0, \pm 1$ é Totalmente Unimodular se e só se para cada submatriz não-singular B e para cada vector-linha y não nulo com componentes $0, \pm 1$, o m.d.c das componentes do vector-linha yB é 1.*

Prova: (\Rightarrow) Seja B uma submatriz não-singular de A e y um vector-linha não nulo de zeros, uns e menos uns. Como A é TU então $\det(B) = \pm 1$. Por isso,

$$B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} \text{adj}(B) = \pm \text{adj}(B)$$

e como A é uma matriz inteira então B^{-1} também é uma matriz inteira. Seja k o m.d.c. das componentes do vector-linha yB . Então $(yB)/k$ é inteiro e, portanto, também $y/k = (yB/k)B^{-1}$ é um vector-linha inteiro, o que implica que $k = 1$.

(\Leftarrow) Seja B uma submatriz não-singular de A . Por hipótese, o m.d.c. das componentes do vector-linha $1B$ é igual a 1. Por isso, existe pelo menos uma das componentes de $1B$ que é ímpar. Como cada componente de $1B$ representa o somatório das componentes de uma coluna de B , então concluímos que existe pelo menos uma coluna c de B cuja soma das suas componentes não-nulas é ímpar. Mas como c tem apenas componentes não-nulas ± 1 então o número de componentes não-nulas de c é ímpar (ou par) se e só se o número de parcelas desse somatório for ímpar (ou par), resp. Pelo Teorema 17 (de Camion I) concluímos que A é TU. \square

Capítulo 3

Aplicações da Unimodularidade Total

Neste capítulo veremos diversas aplicações da Unimodularidade Total relacionadas com problemas de otimização em grafos.

Começamos por mostrar, na Secção 3.1, que a matriz de incidência vértice-aresta de um grafo não dirigido é TU se e só se o grafo é bipartido. Na Secção 3.2, mostraremos ainda que a matriz de incidência vértice-arco de um grafo dirigido é TU. Consideraremos ainda a matriz que decorre daquelas matrizes de incidência por acréscimo de uma linha de tudo-uns e veremos em que casos a matriz permanece TU. A análise desta secção sugere uma demonstração alternativa para os bem conhecidos Teorema do Fluxo Máximo-Corte Mínimo, que abordaremos na Secção 3.2, e Teorema de König, que abordaremos na Secção 3.1.

Dado um grafo dirigido $G = (V, E)$ onde a cada arco $(i, j) \in E$ é associado um escalar $h_{ij} \geq 0$ não-negativo denominado *capacidade* desse arco, e destacando dois vértices $s, t \in V$, o problema do fluxo máximo de s para t é um problema de otimização linear, cuja variável é um vector tal que cada componente é associada a um arco de G , e que consiste, de acordo com a definição de fluxo, em obter uma solução num adequado sistema de igualdades (são as igualdades de conservação de fluxo em cada vértice) e desigualdades (são as restrições de não-negatividade e de capacidade h_{ij} de cada componente da variável) que torne máximo o valor do *excesso de fluxo* do vértice t . Como a matriz de incidência vértice-arco de G é Totalmente Unimodular, se as capacidades h_{ij} dos arcos forem valores inteiros então, este problema, bem como o seu dual, possuem ambos soluções óptimas inteiras sempre que o respectivo valor óptimo for finito. Aliás, o problema dual é a formulação de um problema de optimização combinatoria, que é a determinação da capacidade mínima de um corte $(s - t)$ de G . A dualidade forte entre estes dois problemas é que é o Teorema do Fluxo

Máximo-Corte Mínimo. Este teorema é importante sobretudo pela quantidade de resultados que dele derivam e porque muitos problemas, formulados adequadamente, são problemas de determinação de um fluxo máximo. Veremos, não exaustivamente, algumas aplicações deste Teorema. Uma bem conhecida e contida nesta secção é o Teorema de Menger para grafos dirigidos.

Um exemplo relevante de matrizes Totalmente Unimodulares é o das matrizes de rede. Dado um grafo dirigido $G = (V, E)$ e uma árvore dirigida $T = (V, E_0)$, cada coluna de uma matriz de rede está associado a um arco $(v, w) \in E$ pois é o vector de incidência (nos arcos percorridos) do caminho dirigido de v para w na árvore dirigida. Toda a matriz de rede é TU mas nem toda a matriz TU é de rede. Dois exemplos de matrizes TU que não são de rede são as matrizes 5×5

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

Seymour (Seymour, 1980) (ver também (Seymour, 1985)) mostrou que, toda a matriz TU pode ser obtida a partir de matrizes de rede e as duas matrizes (3.1) através de três operações que preservam Unimodularidade Total — tal como veremos no Capítulo 4. Na Secção 3.3 veremos algumas das propriedades das matrizes de rede. Por exemplo, a mais notável é a de que uma matriz de rede continua de rede após pivotação. Essas propriedades serão úteis para demonstrar que toda a matriz de rede é Totalmente Unimodular. Veremos ainda uma outra caracterização das matrizes de rede.

Na Secção 3.4, definiremos e estudaremos as matrizes de incidência de cortes nos dois sentidos e também em apenas um sentido. Nem todas estas matrizes são Totalmente Unimodulares mas veremos que existe uma classe de matrizes de cada tipo (cortes num ou nos dois sentidos) constituídas ambas apenas por matrizes Totalmente Unimodulares. No caso das matrizes de cortes nos dois sentidos, a classe exibida é precisamente o conjunto das matrizes de rede. Por fim, no Teorema 36, daremos um exemplo de uma classe de matrizes Totalmente Unimodulares fora do contexto da Teoria de Grafos, mas que tem a ver com pares laminares (U, \mathcal{F}) (U é um conjunto finito não vazio e \mathcal{F} uma família de subconjuntos de U).

3.1 Matrizes de incidência de grafos não-dirigidos

Teorema 21 *A matriz de incidência vértice-aresta de um grafo não dirigido $G = (V, E)$ é Totalmente Unimodular se e só se G é bipartido.*

Prova: (\Leftarrow) Suponhamos que G é bipartido e $\{V_1, V_2\}$ é a respectiva bipartição dos vértices. Vamos mostrar que toda a colecção de linhas de A se pode particionar em duas partes tal que a soma das linhas de uma parte menos a soma das linhas da outra parte é um vector de zeros, uns e menos uns. Atendendo a (2.19), fica demonstrado que a matriz A^T é TU, o que implica que também A é TU.

No que se segue usamos indistintamente índices de linha e índices de vértices. Seja $L \subseteq V$ uma qualquer colecção de linhas de A e seja $L_1 = L \cap V_1$ e $L_2 = L \cap V_2$. Como G é bipartido, cada aresta $e \in E$ tem exactamente uma extremidade em V_1 e a outra em V_2 . Como $L_1 \subseteq V_1$ e $L_2 \subseteq V_2$,

$$\sum_{i \in L_1} a_{ie} \in \{0, 1\}, \quad \sum_{i \in L_2} a_{ie} \in \{0, 1\},$$

para todo $e \in E$. Por isso, $\sum_{i \in L_1} a_{ie} - \sum_{i \in L_2} a_{ie} \in \{-1, 0, 1\}$, para todo $e \in E$, como pretendíamos demonstrar.

(\Rightarrow) Suponhamos que A é TU. Atendendo a (2.19), o conjunto de todas as linhas de A pode particionar-se em duas partes, diga-se V_1 e V_2 , tal que a soma das linhas de V_1 menos a soma das linhas de V_2 é um vector de zeros, uns e menos uns. Por outro lado, atendendo à definição de matriz de incidência,

$$\sum_{i \in V_1} a_{ie} - \sum_{i \in V_2} a_{ie} \in \{-2, 0, 2\},$$

para cada $e \in E$. Por isso, $\sum_{i \in V_1} a_{ie} - \sum_{i \in V_2} a_{ie} = 0$, para cada $e \in E$. Isto significa que toda a aresta $e \in E$ tem uma extremidade em V_1 e a outra extremidade em V_2 . Concluimos que G é bipartido. \square

Num grafo $G = (V, E)$, um coclique é um conjunto de vértices dois a dois não adjacentes; uma cobertura por arestas é um conjunto de arestas incidentes em todos os vértices de G . O próximo resultado é conhecido como o Teorema de König para coberturas.

Teorema 22 *Num grafo bipartido $G = (V, E)$, a cardinalidade máxima de um coclique de G é igual à cardinalidade mínima de uma cobertura por arestas de G .*

Prova: Um vector(-linha) $y \in \{0, 1\}^V$ é vector característico de um coclique de G se e só se $yA \leq 1$, sendo A a matriz de incidência vértice-aresta de G . Por isso, a cardinalidade máxima de um coclique de G é o valor óptimo do seguinte problema de optimização

$$\max\{y1: yA \leq 1, y \geq 0, y \text{ inteiro}\}. \quad (3.2)$$

Um vector(-coluna) $x \in \{0, 1\}^E$ é vector característico de uma cobertura por arestas de G se e só se $Ax \geq 1$. Por isso, a cardinalidade mínima de uma cobertura por arestas de G é o valor óptimo do seguinte problema de optimização

$$\min\{1x: Ax \geq 1, x \geq 0, x \text{ inteiro}\}. \quad (3.3)$$

Pelo Teorema 21, a matriz A é TU. Decorre de aplicarmos o Teorema 12 e Corolário 2 aos problemas de optimização (3.2) e (3.3) a verificação de que ambos possuem o mesmo valor óptimo. \square

Num grafo $G = (V, E)$, um emparelhamento é um conjunto de arestas dois a dois não incidentes num mesmo vértice; uma cobertura por vértices é um conjunto de vértices no qual todas as arestas têm alguma extremidade. No próximo resultado, conhecido como Teorema de König para emparelhamentos, a prova é idêntica à demonstração do teorema anterior.

Teorema 23 *Num grafo bipartido $G = (V, E)$, a cardinalidade máxima de um emparelhamento de G é igual à cardinalidade mínima de uma cobertura por vértices de G .*

Dado um grafo bipartido $G = (V_1, V_2, E)$ com pesos nas arestas considere-se o problema de determinar o emparelhamento de peso mínimo. Este problema pode ser formulado por

$$\begin{aligned} \min \quad & cx \\ \text{s.a} \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \\ & x \in \mathbb{Z}^n \end{aligned} \quad (3.4)$$

sendo A a matriz de incidência vértice-aresta de G e b um vector de tudo-uns. Pelo Teorema 21, A é uma matriz TU e, pelo Teorema de Hoffman-Kruskal, todos os pontos extremos do poliedro

$$\{x \in \mathbb{R}^n: Ax \leq b, x \geq 0\}, \quad (3.5)$$

são inteiros, ou seja, são vectores característicos de emparelhamentos em G . Por isso, no problema (3.4), o valor óptimo não se altera se substituirmos a restrição

“ $x \in \mathbb{Z}^n$ ” por “ $x \in \mathbb{R}^n$ ”. Assim, uma solução óptima para ambos os problemas pode ser obtida com o método de Simplex resolvendo o problema (3.4) mas com a relaxação “ $x \in \mathbb{R}^n$ ”.

Agora, consideremos uma restrição adicional no número de arestas do emparelhamento. Pretende-se encontrar o emparelhamento de peso mínimo com pelo menos k arestas. Este problema pode ser formulado acrescentando ao problema (3.4) a restrição “ $ex \geq k$ ”, onde e denota um vector-linha de tudo-uns, isto é,

$$\begin{aligned} \min \quad & cx \\ \text{s.a} \quad & Ax \leq b \\ & ex \geq k \quad , \\ & x \geq 0 \\ & x \in \mathbb{Z}^n \end{aligned} \tag{3.6}$$

em que A é a matriz de incidência vértice-aresta do grafo bipartido G . Vamos mostrar que a matriz A' definida por

$$A' = \begin{bmatrix} A \\ -e \end{bmatrix}, \tag{3.7}$$

é TU. Isso implicará, pelo Teorema de Hoffman e Kruskal, que todos os pontos extremos do poliedro

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, ex \geq k, x \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n : A'x \leq b', x \geq 0\}, \tag{3.8}$$

com

$$A' = \begin{bmatrix} A \\ -e \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b' = \begin{bmatrix} b \\ -k \end{bmatrix}$$

são inteiros e, como é fácil de ver, são vectores característicos de emparelhamentos de G com pelo menos k arestas.

Seja B uma qualquer submatriz $p \times p$ quadrada invertível de A' . Vamos mostrar que B possui uma coluna ou uma linha com um número ímpar de elementos não-nulos. Pelo Teorema de Camion I, A' é TU.

Se B também é submatriz de A , então todas as suas colunas têm no máximo dois uns. Se não existisse pelo menos uma coluna de B com um número ímpar de elementos não-nulos então B seria singular pois somando as linhas associadas aos vértices de V_1 e subtraindo as restantes todas obteríamos o vector nulo.

Se B não é submatriz de A , então a última linha de B está contida na última linha de A' . Se B é de ordem ímpar, existe uma linha de B (a última) com um número ímpar de componentes não nulas. Se B é de ordem par, consideremos a submatriz B' de B de dimensão $(p - 1) \times p$ que se obtém retirando de B a última linha. Suponhamos que todas as colunas de B' têm exactamente uma componente igual a um. Então, B' contém n uns. Neste caso B é singular

pois a soma das primeiras linhas de B é igual ao simétrico da última linha de B . Portanto, existe pelo menos uma coluna de B' com 0 ou 2 uns. Então, a correspondente coluna de B contém 1 ou 3 componentes não-nulas.

Concluimos que qualquer submatriz quadrada invertível de A' contém pelo menos uma coluna com um número ímpar de componentes não-nulas.

Assim, no problema (3.6), o valor óptimo não se altera se substituirmos a restrição “ $x \in \mathbb{Z}^n$ ”, por “ $x \in \mathbb{R}^n$ ”, pois algum dos vértices do poliedro (3.8) é solução óptima (inteira) deste novo problema. Por isso, uma solução óptima para ambos os problemas pode ser obtida computacionalmente com o método de Simplex, resolvendo o problema (3.6) mas com a relaxação “ $x \in \mathbb{R}^n$ ”.

3.2 Matrizes de incidência de grafos dirigidos

Seja $G = (V, E)$ um grafo dirigido com m vértices e n arcos do qual destacamos dois vértices $s, t \in V$ distintos. Consideremos que a cada arco $(i, j) \in E$ está associado um escalar $h_{ij} \geq 0$ denominado *capacidade do arco* (i, j) . Um *fluxo de s para t* é o número real v tal que para alguma afectação de valores às variáveis x_{ij} , $(i, j) \in E$, o seguinte sistema de igualdades e desigualdades é admissível

$$e_s(x) = v, \quad (3.9)$$

$$e_i(x) = 0 \quad (i \in V \setminus \{s, t\}), \quad (3.10)$$

$$e_t(x) = -v, \quad (3.11)$$

$$0 \leq x_{ij} \leq h_{ij} \quad ((i, j) \in E). \quad (3.12)$$

onde $e_i(x)$ denota o *excesso de fluxo* do vértice $i \in V$, definido por

$$e_i(x) \equiv \sum_{(j,i) \in \delta^-(i)} x_{ji} - \sum_{(i,j) \in \delta^+(i)} x_{ij} = -A[i]x, \quad (3.13)$$

onde $A[i]$ denota a i -ésima linha da matriz de incidência vértice-arco do grafo G . As restrições (3.10) são conhecidas por restrições de conservação de fluxo pois impõem que o *fluxo que entra em i é igual ao fluxo que sai de i* seja verdade para todo o vértice $i \neq s, t$ - relação também conhecida por lei de Kirchoff. Note-se que qualquer x que satisfaça (3.10) satisfaz também (3.9) e (3.11) pois

$$e_s(x) + \sum_{i \in V \setminus \{s, t\}} e_i(x) + e_t(x) = \sum_{i \in V} e_i(x) = \sum_{i \in V} (-A[i]x) = - \left(\sum_{i \in V} A[i] \right) x = 0.$$

O problema do fluxo máximo de s para t consiste em obter x que torne máximo o valor de $e_t(x)$. Matematicamente, consiste em maximizar a função linear $e_t(x)$ sujeita às restrições (3.10) e (3.12). Assumindo, sem perda de generalidade, que

existe o arco $(t, s) \in E$ com capacidade $h_{ts} = +\infty$ então o problema do fluxo máximo de s para t pode formular-se de uma forma mais compacta como o seguinte problema linear

$$f(s, t) \equiv \begin{array}{ll} \text{maximizar} & cx \\ \text{sujeito a} & Ax = 0 \\ & 0 \leq x \leq h \end{array} \quad (3.14)$$

sendo $c \in \mathbb{R}^n$ um vector com componentes todas nulas excepto $c_{ts} = 1$. O dual de (3.14) é o seguinte problema linear

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{ll} \text{minimizar} & wh \\ \text{sujeito a} & uA + w \geq c \\ & w \geq 0 \end{array} \right\} = \\ & = \left\{ \begin{array}{ll} \text{minimizar} & \sum_{(i,j) \in E} h_{ij} w_{ij} \\ \text{sujeito a} & u_i - u_j + w_{ij} \geq 0 \quad ((i, j) \in E \setminus \{(t, s)\}) \\ & u_t - u_s \geq 1 \\ & w_{ij} \geq 0 \quad ((i, j) \in E) \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Atendendo a que a matriz A é TU (pelo Corolário 5), se h for um vector de números inteiros então ambos os problemas (3.14) e (3.15) possuem soluções óptimas inteiras sempre que o respectivo valor óptimo for finito (conforme Teorema 3 deste trabalho).

O próximo teorema, de Ford e Fulkerson, apresenta um resultado de dualidade forte entre o problema do fluxo máximo e um conhecido problema de optimização combinatória. Um corte- $(s - t)$ de G é um conjunto de arcos de G que se removidos fazem com que deixe de existir um caminho (orientado) de s para t . A capacidade de um corte é a soma das capacidades h_{ij} dos arcos que o compõem.

Teorema 24 (Teorema do Fluxo Máximo-Corte Mínimo) *Num grafo dirigido $G = (V, E)$ no qual, a cada arco (i, j) , está associado uma capacidade não-negativa h_{ij} , o fluxo máximo de s para t , com $s, t \in V$, é igual à capacidade mínima de um corte- $(s - t)$ de G .*

Prova: Primeiro, observamos que no problema do corte- $(s - t)$ de capacidade mínima existe uma solução óptima que é da forma $\delta^+(S)$ para algum $S \subseteq V$ tal que $s \in S$ e $t \in V \setminus S$. Isto é consequência do facto de que $h_{ij} \geq 0$, para todo (i, j) . Por isso, o teorema fica demonstrado se provarmos

$$f(s, t) = \begin{array}{ll} \text{minimizar} & \sum_{(i,j) \in \delta^+(S)} h_{ij} \\ \text{sujeito a} & s \in S, t \in V \setminus S. \end{array} \quad (3.16)$$

Como a matriz A é TU e c é um vector de números inteiros então existe uma solução óptima (\bar{u}, \bar{w}) para o dual (3.15) que é inteira. Seja $\bar{S} = \{j \in V : \bar{u}_j \leq \bar{u}_s\}$. Note-se que $s \in \bar{S}$ e $t \in V \setminus \bar{S}$ porque $\bar{u}_t \geq 1 + \bar{u}_s$ e $\bar{u}_j - \bar{u}_i \geq 1$, para todo $i \in \bar{S}, j \in V \setminus \bar{S}$, porque \bar{u} é um vector inteiro. Então,

$$f(s, t) = \sum_{(i,j) \in E} h_{ij} \bar{w}_{ij} \geq \sum_{(i,j) \in \delta^+(\bar{S})} h_{ij} \bar{w}_{ij} \geq \sum_{(i,j) \in \delta^+(\bar{S})} h_{ij} (\bar{u}_j - \bar{u}_i) \geq \sum_{(i,j) \in \delta^+(\bar{S})} h_{ij},$$

onde, a primeira desigualdade decorre de $\bar{w} \geq 0$ e $h \geq 0$; a segunda desigualdade decorre da admissibilidade de (\bar{u}, \bar{w}) ; e, a terceira desigualdade decorre da definição de \bar{S} . Por isso, o fluxo máximo de s para t é maior ou igual do que o valor óptimo de (3.16).

O valor óptimo de (3.16) é um valor finito alcançado em algum conjunto $\bar{S} \subset V$. Defina-se um vector (\bar{u}, \bar{w}) do seguinte modo

$$\bar{u}_j = \begin{cases} 0 & \text{se } j \in \bar{S}, \\ 1 & \text{se } j \in V \setminus \bar{S}, \end{cases} \quad \bar{w}_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } (i, j) \in E \setminus \delta^+(\bar{S}), \\ 1 & \text{se } (i, j) \in \delta^+(\bar{S}). \end{cases}$$

O vector (\bar{u}, \bar{w}) é admissível para o dual (3.15) porque, para todo $(i, j) \in E \setminus (t, s)$, tem-se

$$\begin{aligned} i \in \bar{S}, \quad j \in \bar{S} &\Rightarrow \bar{u}_i - \bar{u}_j + \bar{w}_{ij} = 0 - 0 + 0 = 0 \\ i \in \bar{S}, \quad j \in V \setminus \bar{S} &\Rightarrow \bar{u}_i - \bar{u}_j + \bar{w}_{ij} = 0 - 1 + 1 = 0 \\ i \in V \setminus \bar{S}, \quad j \in \bar{S} &\Rightarrow \bar{u}_i - \bar{u}_j + \bar{w}_{ij} = 1 - 0 + 0 = 1 \\ i \in V \setminus \bar{S}, \quad j \in V \setminus \bar{S} &\Rightarrow \bar{u}_i - \bar{u}_j + \bar{w}_{ij} = 1 - 1 + 0 = 0, \end{aligned}$$

e $\bar{u}_t - \bar{u}_s = 1 - 0 = 1$. Para além disso,

$$\sum_{(i,j) \in \delta^+(\bar{S})} h_{ij} = \sum_{(i,j) \in E} h_{ij} \bar{w}_{ij}$$

pelo que concluímos que o valor óptimo de (3.16) é maior ou igual do que o valor óptimo de (3.15), que é igual ao fluxo máximo de s para t . \square

Pelo Teorema 24, o problema linear (3.15) é uma formulação algébrica do problema do corte $s - t$ de capacidade mínima com o mesmo valor óptimo.

Corolário 13 (Teorema de Menger para grafos dirigidos) *Num grafo dirigido $G = (V, E)$, o número de caminhos de s para t disjuntos nos arcos atravessados, com $s, t \in V$ distintos, é igual ao menor número de arcos que se retirados de G faz com que deixe de existir caminho de s para t .*

Prova: Assumindo, sem perda de generalidade, que a aresta $(t, s) \in E$, começamos por mostrar que (3.14) com h um vector com componentes todas iguais a 1 excepto $h_{ts} = +\infty$ é uma formulação para o problema de determinar o número de caminhos de s para t disjuntos nos arcos atravessados.

Sejam $\{p^1, p^2, \dots, p^q\}$ o conjunto de todos os caminhos de s para t disjuntos nos arcos atravessados e seja $\bar{x} \in \{0, 1\}^m$ o vector característico dos caminhos. Então, \bar{x} é admissível e óptimo em (3.14). É admissível devido à conservação de fluxo nos vértices. É óptimo porque se não o fosse então, atendendo a que h é inteiro, existiria uma solução inteira melhor do que \bar{x} . Uma tal solução inteira teria que ser um vector característico de caminhos de s para t e chegaríamos a um absurdo porque não existem mais do que q caminhos de s para t disjuntos nos arcos atravessados.

Agora, pelo Teorema do Fluxo Máximo-Corte Mínimo,

$$q = \begin{array}{l} \text{minimizar} \\ \text{sujeito a} \end{array} \left. \begin{array}{l} |\delta^+(S)| \\ s \in S, t \in V \setminus S. \end{array} \right\} \quad (3.17)$$

cuja solução óptima identifica o menor número de arcos que removidos de G faz com que deixe de existir caminho de s para t . \square

Corolário 14 (Teorema do Fluxo Máximo-Corte Mínimo Global) *Seja $G = (V, E)$ um grafo dirigido no qual, a cada arco, está associado uma capacidade h_{ij} não-negativa. Então,*

$$\left. \begin{array}{l} \text{minimizar} \\ \text{sujeito a} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} f(s, t) \\ s, t \in V, s \neq t \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{minimizar} \\ \text{sujeito a} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \sum_{(i,j) \in \delta^+(S)} h_{ij} \\ S \subset V, S \neq \emptyset \end{array} \right\} \quad (3.18)$$

Em que $f(s, t)$ denota o fluxo em G do vértice s para o vértice t .

Prova: Pelo Teorema do Fluxo Máximo-Corte Mínimo,

$$\left. \begin{array}{l} \text{mín} \\ \text{s.a.} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} f(s, t) \\ s, t \in V, s \neq t \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{mín} \\ \text{s.a.} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{mín} \\ \text{s.a.} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \sum_{(i,j) \in \delta^+(S)} h_{ij} \\ s \in S, t \in V \setminus S \\ s, t \in V, s \neq t \end{array} \right\} \quad (3.19)$$

cuja igualdade coincide com (3.18) \square

O problema da direita em (3.18) consiste na identificação de um subconjunto minimal de arcos cuja remoção do grafo G faz com que deixe de existir caminho de um conjunto de vértices para o seu complementar em V , e que minimiza a soma das capacidades dos arcos que o constituem. Por esse facto, esse problema é designado por *corte global de capacidade mínima*.

Seja $G = (V, E)$ um digrafo com distâncias c_{ij} em cada arco (i, j) . Consideremos o problema de determinar o trilha mais curto de um vértice s para um

vértice t . Este problema pode formular-se do seguinte modo:

$$\left. \begin{array}{l} \min \quad cx \\ \text{s.a} \quad Ax = b \\ \quad \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \quad \quad x \in \mathbb{Z}^n \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \min \quad cx \\ \text{s.a} \quad A'x \leq b' \\ \quad \quad x \geq 0 \\ \quad \quad x \in \mathbb{Z}^n \end{array} \right., \quad (3.20)$$

em que A é a matriz de incidência vértice-arco do digrafo G , b é um vector de tudo-zeros, excepto $b_s = -b_t = 1$, e

$$A' = \begin{bmatrix} A \\ -A \\ I \end{bmatrix}, \quad b' = \begin{bmatrix} b \\ -b \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Pelo Corolário 5, a matriz A é Totalmente Unimodular pelo que A' também o é. Por isso, pelo Teorema de Hoffman-Kruskal, podemos substituir a restrição “ $x \in \mathbb{Z}^n$ ”, pela restrição “ $x \in \mathbb{R}^n$ ” sem alterar o valor óptimo do problema.

Agora, consideremos o problema de determinar o trilha mais curto de um vértice s para um vértice t com pelo menos k arcos. Este problema pode formular-se como (3.20) com o acréscimo da restrição “ $ex \geq k$ ”, onde e denota um vector-linha de tudo-uns. No entanto, a matriz definida por

$$\begin{bmatrix} A \\ -e \end{bmatrix},$$

pode não ser TU pois pode admitir

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

como submatriz e isso acontece se e só se existe algum vértice de G de onde simultaneamente entram e saem arcos. Por isso, não podemos substituir no problema a restrição “ $x \in \mathbb{Z}^n$ ”, por “ $x \in \mathbb{R}^n$ ”, sem correr o risco de não existirem soluções óptimas inteiras no novo problema. Isto significa que não podemos, de forma simples, solucionar o nosso problema através da resolução do problema “relaxado” da forma descrita (com o método de Simplex, por exemplo, e, portanto, computacionalmente) pois a solução encontrada poderia não ser inteira e, assim, não ser solução do problema inicial.

3.3 Matrizes de rede

Definição 7 *Sejam $G = (V, E)$ um grafo dirigido com n vértices e m arcos e $T = (V, E_0)$ uma árvore dirigida. Chama-se matriz de rede gerada por G e por T a uma matriz M com $|E_0| (= n - 1)$ linhas e $|E| (= m)$ colunas, cujo elemento*

genérico $M_{a'a}$ com $a' \in E_0$ e $(v, w) \in E$ é definido por:

$$M_{a',(v,w)} = \begin{cases} 1 & \text{se o caminho de } v \text{ para } w \text{ em } T \text{ passa por } a' \text{ da origem} \\ & \text{para a extremidade;} \\ -1 & \text{se o caminho de } v \text{ para } w \text{ em } T \text{ passa por } a' \text{ da ex-} \\ & \text{tremidade para a origem;} \\ 0 & \text{se o caminho de } v \text{ para } w \text{ em } T \text{ não usa } a', \end{cases}$$

onde a palavra 'caminho' denota 'caminho não orientado'.

Por exemplo, a matriz de rede gerada pelo digrafo G da Figura 3.1 e pela árvore dirigida T da Figura 3.2 é a matriz

$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} (v_1, v_2) & (v_2, v_4) & (v_3, v_2) & (v_4, v_3) & (v_3, v_5) \end{matrix} \\ \begin{matrix} \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel \\ a & b & c & d & e \\ \left[\begin{matrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{matrix} \right] & \begin{matrix} a' = (v_1, v_2) \\ b' = (v_1, v_3) \\ c' = (v_4, v_1) \\ d' = (v_5, v_2) \end{matrix} \end{matrix} & (3.22)$$

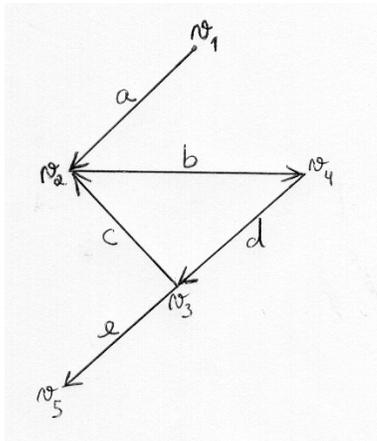


Figura 3.1: O digrafo G

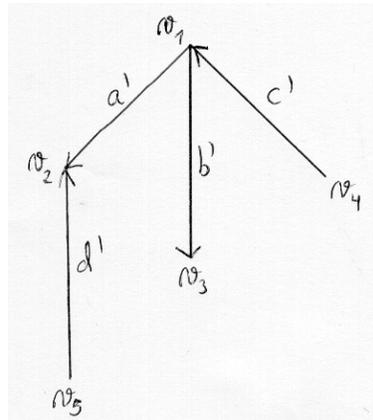


Figura 3.2: A árvore T

Interpretando por colunas, uma matriz de rede é uma matriz contendo em cada coluna genericamente indexada por $a = (v, w) \in E$, o vector incidência do caminho não orientado de v para w em T indicando para cada arco desse caminho se ele é percorrido com a orientação correcta ($= 1$) ou a orientação contrária ($= -1$).

Propriedade 2 Consideremos uma árvore T , dois vértices u, v dessa árvore e (s, t) um arco qualquer do caminho não-orientado em T de u para v . Se $\begin{bmatrix} \varepsilon \\ b \end{bmatrix}$, com $\varepsilon = \pm 1$, é o vector incidência deste caminho em T (a primeira componente

está associada ao arco (s, t)) então, $\begin{bmatrix} \varepsilon \\ -\varepsilon b \end{bmatrix}$ é o vector incidência do caminho na árvore $T - \{(s, t)\} + \{(u, v)\}$ de s para t (a primeira componente está associada ao arco (u, v)).

Prova: Denotemos o digrafo $T - \{(s, t)\} + \{(u, v)\}$ por T' e provemos, primeiro, que T' é uma árvore. Com efeito, como T não contém ciclos, cada ciclo de $T + \{(u, v)\}$ terá que conter o arco (u, v) juntamente com os arcos de um caminho em T de u para v . Como T é uma árvore, existe um único caminho em T de u para v e, por isso, o digrafo $T + \{(u, v)\}$ contém um único ciclo que é precisamente a junção do caminho em T de u para v (que contém o arco (s, t)) com o arco (u, v) . Por isso, T' (que não contém o arco (s, t)) não contém ciclos. Falta só mostrar que é conexo. Sejam i, j dois quaisquer vértices de T' e consideremos o caminho em T de i para j , digamos C_{ij} . Se C_{ij} não contém o arco (s, t) , então C_{ij} também é um caminho em T' de i para j . Caso contrário, C_{ij} e o caminho em T de u para v , digamos C_{uv} , passam ambos pelo arco (s, t) (ver Figura 3.3(a)). Seja i' o primeiro vértice comum a C_{uv} e a C_{ij} (i' pode ser o

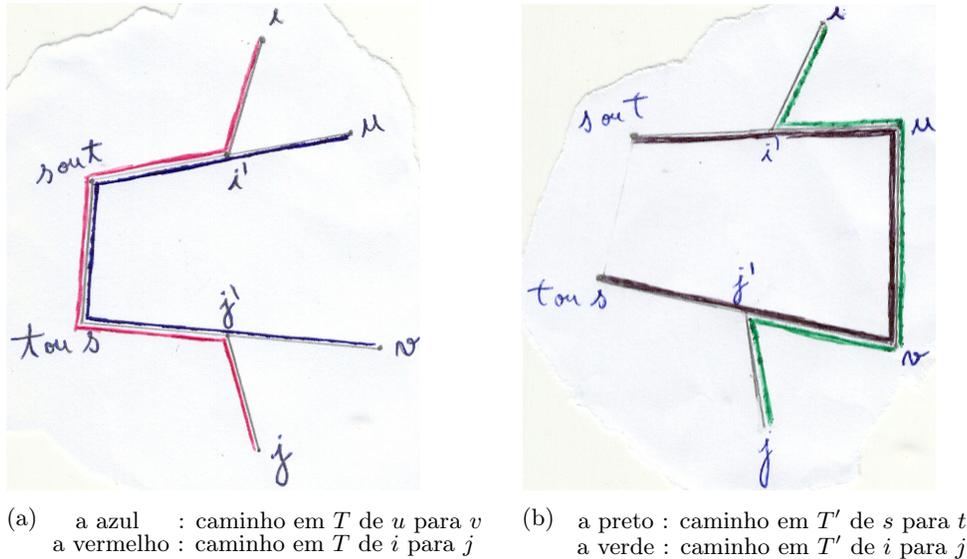


Figura 3.3: Caminhos nas árvores T e T'

primeiro vértice do arco (s, t) a ser percorrido por C_{uv}) e seja j' o último vértice comum a C_{uv} e a C_{ij} (j' pode ser o outro vértice do arco (s, t)). Agora, é óbvio que o caminho em T' que é a junção dos caminhos em T' de i para i' , i' para u , u para v (isto é, o arco (u, v)), v para j' e j' para j é um caminho em T' de i para j (ver Figura 3.3(b)). Assim, provámos que T' é conexo.

A seguir, provemos o enunciado desta propriedade propriamente dito. Pela Figura 3.3, o caminho em T de u para v , C_{uv} , e o caminho em T' de s para t ,

digamos C'_{st} , incidem nos mesmos arcos, com excepção de que o primeiro passa pelo arco (s, t) e não pelo arco (u, v) (que não existe em T) enquanto o segundo passa por (u, v) mas não por (s, t) (que não existe em T'). É fácil verificar que C_{uv} incide no arco (s, t) do mesmo modo que C'_{st} incide no arco (u, v) (isto é, C_{uv} passa por (s, t) da origem para a extremidade se e só se C'_{st} passa por (u, v) da origem para a extremidade). Além disso, se $\varepsilon = 1$ (isto é, se C_{uv} passa pelo arco (s, t) de s para t) então os arcos comuns aos dois caminhos são percorridos em sentidos contrários por C_{uv} e por C'_{st} . Se $\varepsilon = -1$ (isto é, se C_{uv} passa pelo arco (s, t) de t para s) então os arcos comuns aos dois caminhos são percorridos no mesmo sentido por C_{uv} e por C'_{st} . Com estas observações fica provado o pretendido. \square

O próximo teorema permite interpretar uma matriz de rede segundo uma definição por linhas. As diferentes interpretações são relevantes nos resultados que se seguirão.

Teorema 25 *Se M é a matriz de rede gerada por um dígrafo $G = (V, E)$ e por uma árvore dirigida $T = (V, E_0)$ então o elemento genérico $M_{(x,y),a}$ com $(x, y) \in E_0$ e $a \in E$ é também definido por:*

$$M_{(x,y),a} = \begin{cases} +1 & \text{se } a \in \delta_G^-(S_{(x,y)}); \\ -1 & \text{se } a \in \delta_G^+(S_{(x,y)}); \\ 0 & \text{se } a \notin \delta_G^-(S_{(x,y)}) \cup \delta_G^+(S_{(x,y)}), \end{cases}$$

sendo $S_{(x,y)} \subseteq V$ o conjunto de vértices que estão com y na mesma componente conexa de $T - \{(x, y)\}$.

Prova: Seja M' a matriz de rede gerada por $G = (V, E)$ e por $T = (V, E_0)$, conforme a definição 7. Sejam $(x, y) \in E_0$ e $(v, w) \in E$ quaisquer.

Se $M_{(x,y),(v,w)} = +1$ então $(v, w) \in \delta_G^-(S_{(x,y)})$. Então, $v \notin S_{(x,y)}$ e $w \in S_{(x,y)}$. Por isso, o caminho de v para w em T usa o arco (x, y) com o sentido correcto, pelo que $M_{(x,y),(v,w)} = M'_{(x,y),(v,w)} = +1$.

Se $M_{(x,y),(v,w)} = -1$ então $(v, w) \in \delta_G^+(S_{(x,y)})$. Então, $v \in S_{(x,y)}$ e $w \notin S_{(x,y)}$. Por isso, o caminho de v para w em T usa o arco (x, y) com o sentido contrário, pelo que $M_{(x,y),(v,w)} = M'_{(x,y),(v,w)} = -1$.

Se $M_{(x,y),(v,w)} = 0$ então $(v, w) \notin \delta_G^-(S_{(x,y)}) \cup \delta_G^+(S_{(x,y)})$. Então, $v, w \in S_{(x,y)}$ ou $v, w \notin S_{(x,y)}$. Por isso, o caminho de v para w em T não usa o arco (x, y) , pelo que $M_{(x,y),(v,w)} = M'_{(x,y),(v,w)} = 0$. Concluimos que $M = M'$. \square

Seguidamente, identificamos algumas propriedades de matrizes de rede algumas das quais serão usadas na demonstração de que toda a matriz de rede é TU.

Propriedade 3 *Se M é uma matriz de rede gerada por um grafo dirigido $G = (V, E)$ e uma árvore dirigida $T = (V, E_0)$, então multiplicando por -1 a coluna de M indexada pelo arco $(u, v) \in E$ obtemos uma matriz M^* que é a matriz de rede gerada pelo digrafo $G - \{(u, v)\} + \{(v, u)\}$ e pela mesma árvore T .*

Prova: Seja M' a matriz de rede gerada por $G - \{(u, v)\} + \{(v, u)\}$ e por T . Cada coluna de M' distinta da coluna indexada por (v, u) coincide com a respectiva coluna de M (porque a árvore dirigida é a mesma). Relativamente à coluna indexada por (v, u) , o vector incidência do caminho em T que vai de v para u é o simétrico do vector incidência do caminho em T que vai de u para v . Concluimos que $M' = M^*$. \square

Propriedade 4 *Se M é uma matriz de rede gerada por um grafo dirigido $G = (V, E)$ e uma árvore dirigida $T = (V, E_0)$, então se multiplicarmos por -1 a linha de M indexada pelo arco $(s, t) \in E_0$, obtemos uma matriz de rede M^* gerada pelo mesmo digrafo G e pela árvore $T - \{(s, t)\} + \{(t, s)\}$.*

Prova: Seja M' a matriz de rede gerada por G e por $T - \{(s, t)\} + \{(t, s)\}$. Para todo o arco $(v, w) \in E$, o vector incidência do caminho em $T - \{(s, t)\} + \{(t, s)\}$ de v para w coincide com o vector incidência do caminho em T de v para w com a excepção de que arco (s, t) , se percorrido, é percorrido em sentido contrário. Concluimos que $M' = M^*$. \square

Observação 1 *Se A é uma matriz de rede representada por uma árvore dirigida T e um digrafo D , então, estes digrafos não estão unicamente determinados. A título exemplificativo, se invertermos o sentido de todos os arcos de T e de D (isto corresponde a multiplicar por -1 todas as linhas e todas as colunas de A), a matriz A permanece uma matriz de rede representada por estas novas estruturas.*

Observação 2 *se duas subcolunas (podendo ser colunas) de uma matriz de rede forem iguais em módulo então, essas subcolunas são iguais ou simétricas.*

Observação 3 *Se M é uma matriz de rede gerada por um grafo dirigido $G = (V, E)$ e uma árvore dirigida $T = (V, E_0)$, então se removermos a coluna $a \in E$ à matriz M , obtemos uma matriz M^* que é a matriz de rede gerada pelo digrafo $G - \{a\}$ e pela mesma árvore T .*

Propriedade 5 *Se M é uma matriz de rede gerada por um grafo dirigido $G = (V, E)$ e uma árvore dirigida $T = (V, E_0)$, então se removermos a linha $a' = (u, v) \in E_0$ à matriz M obtemos uma matriz M^* que é a matriz de rede gerada pelo digrafo $G_{a'}$ e pela árvore $T_{a'}$.*

Prova: Seja M' a matriz de rede gerada pelo digrafo $G_{a'}$ e pela árvore $T_{a'}$. Recordamos que o digrafo $G_{a'}$ é o digrafo que resulta de G por remoção do vértice v de V e do arco $(u, v) \in E$, caso exista, e por substituição de cada arco $(v, x) \in \delta^+(v)$ pelo arco (u, x) e de cada arco $(y, v) \in \delta^-(v)$ pelo arco (y, u) . A árvore dirigida $T_{a'}$ é definida do mesmo modo.

Seja $(r, s) \in E(G_{a'})$ qualquer. Por definição $r, s \neq v$. Consideramos distintamente três situações: (1) $u \notin \{r, s\}$; (2) $r = u$; (3) $s = u$. Denotemos por p o caminho em T de r para s . Note-se que, se p atravessa ambos os vértices u e v então estes vértices são consecutivos em p .

Suponhamos que $u \notin \{r, s\}$ e consideremos ainda quatro situações: (A1) p não passa por v ; (B1) p visita u e v , por esta ordem; (C1) p visita v e u , por esta ordem; (D1) p não passa por u mas passa por v .

No caso (A1), o caminho de r para s em $T_{a'}$ coincide com p . No caso (B1), o caminho de r para s em $T_{a'}$ coincide com a porção de p até u acrescido do arco (u, x) ou (x, u) , para x o vértice imediatamente posterior a v , e da restante porção de p a partir de x . No caso (C1), o caminho de r para s em $T_{a'}$ coincide com a porção de p até y , o vértice imediatamente anterior a v , acrescido do arco (u, y) ou (y, u) e da restante porção de p a partir de u . No caso (D1), o caminho de r para s em $T_{a'}$ coincide com a porção de p até y acrescida dos arcos (y, u) ou (u, y) , e (u, x) ou (x, u) , e da restante porção de p a partir de x .

Suponhamos que $r = u$ e consideremos ainda duas situações: (A2) p não passa por v ; (B2) p visita u e v , por esta ordem. No caso (A2), o caminho de r para s em $T_{a'}$ coincide com p . No caso (B2), o caminho de r para s em $T_{a'}$ coincide com o arco (u, x) ou (x, u) , para x o vértice imediatamente posterior a v , e da restante porção de p a partir de x .

Suponhamos que $s = u$ e consideremos ainda duas situações: (A3) p não passa por v ; (B3) p visita v e u , por esta ordem. No caso (A3), o caminho de r para s em $T_{a'}$ coincide com p . No caso (B3), o caminho de r para s em $T_{a'}$ coincide a porção de p até y , o vértice imediatamente anterior a v , acrescido do arco (u, y) ou (y, u) .

Em todos os casos analisados, o vector incidência do caminho de r para s em $T_{a'}$ coincide com o vector incidência de p , o caminho de r para s em T , excluído da componente relativa ao arco (u, v) .

□

Vejamos um exemplo de aplicação da Propriedade 5. Consideremos a matriz de rede em (3.22). Se lhe retirarmos a linha indexada por a' , obtemos a matriz

$$\begin{matrix} & a^* & b^* & c^* & d & e \\ \begin{matrix} b' \\ c' \\ d' \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} & = M' \end{matrix}$$

que, pela Propriedade 5, é a matriz de rede gerada pelo digrafo $G_{a'}$ e pela árvore $T_{a'}$ que representamos na Figura 3.4.

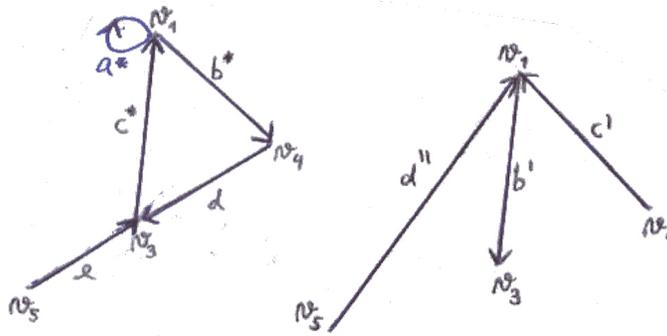


Figura 3.4: os digrafos $G_{a'}$ e $T_{a'}$

Por aplicação sucessiva das Propriedades 3 e 5 concluímos que toda a submatriz de uma matriz de rede também é uma matriz de rede.

Propriedade 6 *Seja M uma matriz de rede gerada por um digrafo $G = (V, E)$ e por uma árvore dirigida $T = (V, E_0)$, e seja M^* uma matriz que resulta de M por substituição de uma coluna indexada por $(u, v) \in E$ pela sua subtração com outra coluna indexada por $(u, v_1) \in E$. Esta matriz M^* é a matriz de rede gerada pelo digrafo*

$$G' = G - \{(u, v)\} + \{(v_1, v)\}$$

e pela mesma árvore dirigida $T = (V, E_0)$.

Prova: Seja M' a matriz de rede gerada pelo digrafo G' e por $T = (V, E_0)$. Como a árvore dirigida é a mesma, as colunas de M' associadas aos arcos de $G - \{(u, v)\}$ coincidem com as respectivas colunas de M (e de M^*).

Seja p_1 o caminho em T de u para v e seja p_2 o caminho em T de u para v_1 . Os seus vectores incidência são precisamente as colunas de M indexadas por $(u, v) \in E$ e $(u, v_1) \in E$, resp.

Se p_1 e p_2 são caminhos disjuntos nos arcos percorridos, então o caminho de v_1 para v coincide com a união destes caminhos e o seu vector incidência

coincide com o vector incidência de p_1 subtraído do vector incidência de p_2 pois, neste caso, estes dois vectores são complementares. Portanto, a coluna de M' indexada por (v_1, v) coincide com a correspondente coluna de M^* .

Suponhamos que p_1 e p_2 não são caminhos disjuntos nos arcos percorridos. Seja w o último vértice que é visitado simultaneamente por p_1 e por p_2 . Como T é uma árvore dirigida só pode existir um caminho em T de u para w . Por isso, a porção de p_1 de u para w coincide com a porção de p_2 de u para w .

Assim, a porção de p_1 de w para v e a porção de p_2 de w para v_1 são caminhos disjuntos nos arcos percorridos. A sua união define o caminho em T de v_1 para v . Por isso, o caminho em T de v_1 para v e o seu vector incidência coincide com o vector incidência de p_1 subtraído do vector incidência de p_2 pois, embora não sendo vectores complementares, as componentes que são não nulas em ambos os vectores têm o mesmo valor e por isso cancelam-se. Concluimos que, a coluna de M' indexada por (v_1, v) coincide com a correspondente coluna de M^* . \square

Vejamos um exemplo de aplicação da Propriedade 6. Consideremos de novo a matriz de rede em (3.22). Se substituirmos a coluna indexada por $c = (v_3, v_2)$ pela sua subtracção com a coluna indexada por $e = (v_3, v_5)$ obtemos a matriz

$$\begin{array}{c} a \quad b \quad \bar{c} \quad d \quad e \\ \begin{array}{l} a' \\ b' \\ c' \\ d' \end{array} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right] \end{array}$$

que, pela Propriedade 6, é uma matriz de rede gerada pelo digrafo $G - \{(v_3, v_2)\} + \{(v_5, v_2)\}$ e pela mesma árvore T que representamos na Figura 3.5.

Propriedade 7 *Seja M uma matriz de rede gerada por um digrafo $G = (V, E)$ e por uma árvore dirigida $T = (V, E_0)$, e seja M^* uma matriz que resulta de M por substituição de uma coluna indexada por $(u, v) \in E$ pela sua subtracção com outra coluna indexada por $(u_1, v) \in E$. Esta matriz M^* é a matriz de rede gerada pelo digrafo*

$$G' = G - \{(u, v)\} + \{(u, u_1)\}$$

e pela mesma árvore dirigida $T = (V, E_0)$.

Prova: Seja M^1 a matriz que resulta de M por multiplicação por -1 das colunas indexadas por (u, v) e (u_1, v) . Pela primeira das propriedades anteriores, M^1 é uma matriz de rede cuja árvore geradora é T e cujas novas colunas são indexadas por (v, u) e (v, u_1) , resp. Seja M^2 a matriz que resulta de M^1 por

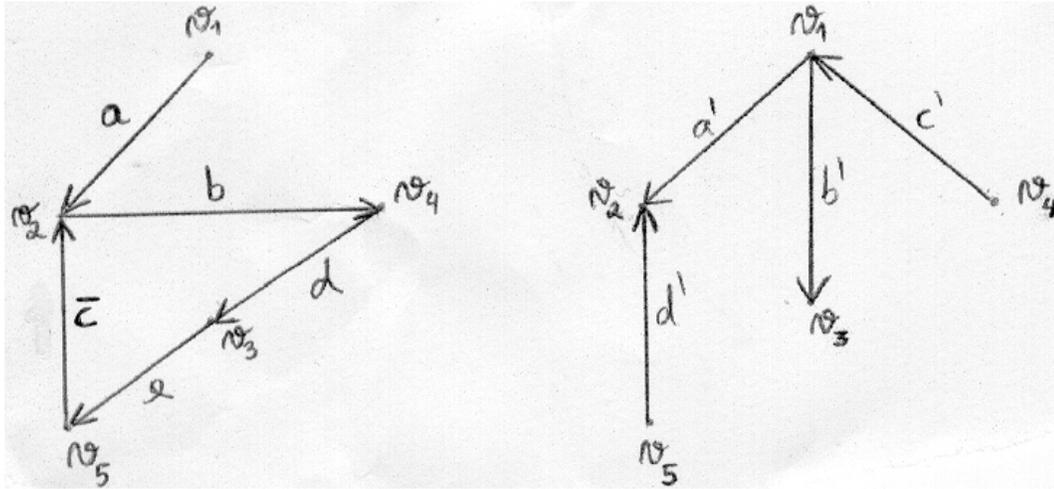


Figura 3.5: os digrafos $G - \{(v_3, v_2)\} + \{(v_5, v_2)\}$ e T

substituição da coluna indexada por (v, u) pela sua subtração com a coluna indexada por (v, u_1) . Pela propriedade anterior, M^2 é uma matriz de rede cuja árvore geradora é T e cuja nova coluna é indexada por (u_1, u) . Seja M^3 a matriz que resulta de M^2 por multiplicação por -1 das colunas indexadas por (u_1, u) e (v, u_1) . Pela primeira das propriedades anteriores, M^3 é uma matriz de rede cuja árvore geradora é T e cujas novas colunas são indexadas por (u, u_1) e (u_1, v) . Nesta sucessão de matrizes não foram alterados os índices das colunas correspondentes às colunas de M não indexadas em M por (u, v) e (u_1, v) . Logo, o digrafo que representa M^3 é $G - \{(u, v)\} + \{(u, u_1)\}$, ou seja, $M^3 = M'$. É fácil verificar que também $M^3 = M^*$. Então $M^* = M'$. \square

Propriedade 8 *Se A é uma matriz de zeros e uns tal que em cada coluna de A os uns aparecem consecutivamente, então A é uma matriz de rede.*

Prova: Vamos mostrar que A é a matriz de rede gerada por um adequado digrafo $G = (V, E)$ e de uma adequada árvore dirigida $T = (V, E_0)$. Suponhamos que A é uma matriz $m \times n$.

Seja

$$V = \{0, 1, 2, 3, \dots, m\} \quad \text{e} \quad E_0 = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), \dots, (m-1, m)\}.$$

Claramente $T = (V, E_0)$ é uma árvore dirigida porque E_0 é um caminho Hamiltoniano. Para uma qualquer coluna j de A , seja i_j o índice de linha do primeiro elemento não-nulo dessa coluna e seja k_j o último elemento não-nulo dessa coluna. O vector característico do caminho de $i_j - 1$ para k_j em T é um vector

de tudo-uns nas posições i_j, i_{j+1}, \dots, k_j e zeros nas restantes posições. Por isso, concluímos que A é a matriz de rede gerada por $G = (V, E)$, com

$$E = \{(i_j - 1, k_j), j = 1, 2, \dots, n\},$$

e pela árvore T definida antes. \square

Teorema 26 *Seja M uma matriz de rede representada por uma árvore dirigida $T = (V, E_0)$ e um digrafo $D = (V, E)$. Então,*

$$LM = N \quad (3.23)$$

sendo L a matriz de incidência vértice-arco de T e N a matriz de incidência vértice-arco de D .

Prova: O produto LM está bem definido porque, denotando $m = |V|$ e $n = |E|$, temos que L é uma matriz $m \times (m - 1)$ e M é uma matriz $(m - 1) \times n$. O resultado é uma matriz $m \times n$. Seja $v \in V$ e $a \equiv (u, w) \in E$ qualquer. Então,

$$(LM)_{va} = \sum_{a' \in E_0} (L)_{va'} (M)_{a'a}, \quad (3.24)$$

onde, recorde-se,

$$(L)_{va'} = \begin{cases} +1 & \text{se } a' \in \delta_T^+(v) \\ -1 & \text{se } a' \in \delta_T^-(v) \\ 0 & \text{se caso contrário} \end{cases}$$

e

$$(M)_{a'a} = \begin{cases} +1 & \text{se o caminho em } T \text{ de } v_1 \text{ para } v_2 \text{ passa por } a' \text{ da origem} \\ & \text{para a extremidade} \\ -1 & \text{se o caminho em } T \text{ de } v_1 \text{ para } v_2 \text{ passa por } a' \text{ da extremi-} \\ & \text{dade para a origem} \\ 0 & \text{se o caminho em } T \text{ de } v_1 \text{ para } v_2 \text{ não passa por } a' \end{cases}$$

Denote-se por $c(u, w)$ o caminho em T de u para w . Então, (3.24) fica

$$\sum_{a' \in \delta_T(v) \cap c(u, w)} (L)_{va'} (M)_{a'a} \quad (3.25)$$

onde, note-se, $|\delta_T(v) \cap c(u, w)| \leq 2$. Consideremos distintamente os casos $|\delta_T(v) \cap c(u, w)| \in \{0, 1, 2\}$.

Se $|\delta_T(v) \cap c(u, w)| = 0$ então, de (3.25), $(LM)_{va} = 0$. Por outro lado, isso também implica que $u, v \neq v$ pelo que $(N)_{va} = 0$. Se $|\delta_T(v) \cap c(u, w)| = 1$ então $u = v$ ou $w = v$. No primeiro caso ($u = v$), tem-se

$$(LM)_{va} = (L)_{va'} (M)_{a'a}$$

para algum $a' \in E_0$, que terá de ser da forma (v, \bullet) ou (\bullet, v) . Assim,

$$(LM)_{v_1a} = \begin{cases} (+1).(+1) = +1 & \text{se } a' = (v, \bullet) \\ (-1).(-1) = +1 & \text{se } a' = (\bullet, v) \end{cases}$$

Por outro lado, $(N)_{va} = +1$ atendendo a que $a' = (v, \bullet)$. No segundo caso, $w = v$ e de forma análoga se concluiria que $(LM)_{va} = -1$ e que $(N)_{va} = -1$.

Finalmente, suponhamos que $|\delta_T^+(v) \cap c(u, w)| = 2$. Neste caso, $u, w \neq 0$ pelo que $(N)_{va} = 0$. Para mostrar que $(LM)_{va} = 0$ há que considerar os três casos: $|\delta_T^+(v) \cap c(u, w)| \in \{0, 1, 2\}$. Se $|\delta_T^+(v) \cap c(u, w)| = 0$ então

$$(LM)_{va} = (-1)(+1) + (-1)(-1) = 0.$$

Se $|\delta_T^+(v) \cap c(u, w)| = 1$ então há apenas duas possibilidades,

$$(LM)_{va} = \begin{cases} (+1)(+1) + (-1)(+1) = 0 \\ (+1)(-1) + (-1)(-1) = 0 \end{cases},$$

consoante $c(u, w)$ passa por ambos os dois arcos em $\delta_T(v)$ da origem para a extremidade ou ao contrário. Finalmente, se $|\delta_T^+(v) \cap c(u, w)| = 2$ então

$$(LM)_{va} = (+1)(+1) + (+1)(-1) = 0.$$

Fica assim demonstrado que $(LM)_{va} = N_{va}$. □

Corolário 15 *Seja $T = (V, E_0)$ uma árvore dirigida e $D = (V, E)$ um digrafo. Seja L a matriz de incidência vértice-arco de T e seja N a matriz de incidência vértice-arco de D . Então, existe uma única matriz M a satisfazer (3.23).*

Prova: De facto, seja \tilde{L} a submatriz de L que se obtém por eliminação de uma linha qualquer de L , e seja \tilde{N} a submatriz de N que se obtém por eliminação em N da linha com o mesmo índice. Como, pelo Teorema 2, $\text{car}(L) = |V| - k(T)$, sendo $k(T)$ o número de componentes conexas do grafo não-dirigido subjacente a T , então, \tilde{L} é não-singular. Por isso, (3.23), implica que

$$M = \tilde{L}^{-1}\tilde{N},$$

que fica assim unicamente determinada. □

Corolário 16 *Seja M uma matriz de rede representada pelo digrafo $D = (V, E)$ e pela árvore $T = (V, E_0)$. Então, a característica de M é igual a $|V| - k(D)$, sendo $k(D)$ o número de componentes conexas do grafo não-dirigido subjacente a D .*

Prova: Seja L a matriz de incidência vértice-arco de T e N a matriz de incidência vértice-arco de D . Seja \tilde{L} a submatriz que resulta de L por eliminação de uma linha qualquer e seja \tilde{N} a submatriz que resulta de N por eliminação da linha correspondente. Note-se que $\text{car}(\tilde{N}) = \text{car}(N)$ pois $N^T x = 0$ se x for um vector de tudo-uns. Pelo Teorema 26, $LM = N$ e, portanto, $\tilde{L}M = \tilde{N}$. Como \tilde{L} é não-singular então, $\text{car}(M) = \text{car}(\tilde{N}) = \text{car}(N)$. Mas $\text{car}(N) = |V| - k(D)$, com $k(D)$ tal como definido no enunciado deste Corolário. \square

Corolário 17 *Seja M uma matriz de rede representada pelo digrafo $D = (V, E)$ e pela árvore $T = (V, E_0)$. Se M é não-singular então, D é uma árvore dirigida. Além disso, M^{-1} é uma matriz de rede representada pelo digrafo $T = (V, E_0)$ e pela árvore dirigida $D = (V, E)$.*

Prova: D é uma árvore abrangente em V é uma consequência do Corolário 16. Pelo Teorema 26, $LM = N$ e, como M é não-singular,

$$NM^{-1} = L.$$

Como N é a matriz de incidência de uma árvore dirigida $D = (V, E)$ e L é a matriz de incidência de um digrafo $T = (V, E_0)$, então, pelo Corolário 15, M^{-1} é a matriz de rede representada pelo digrafo T e pela árvore dirigida D . \square

Teorema 27 *Seja M uma matriz de rede de característica completa por linhas, representada pelo digrafo $D = (V, E)$ e pela árvore dirigida $T = (V, E_0)$ e seja B uma base de M . Então,*

- (a). *os arcos de D associados às colunas de B formam uma árvore abrangente em D , digamos, $T' = (V, E')$, com $E' \subseteq E$.*
- (b). *B^{-1} é uma matriz de rede representada pelo digrafo $T = (V, E_0)$ (que é uma árvore) e pela árvore dirigida $T' = (V, E')$.*
- (c). *$B^{-1}M$ é uma matriz de rede representada pelo digrafo $D = (V, E)$ e pela árvore dirigida $T' = (V, E')$.*

Prova: Primeiro, provemos (a). Seja L a matriz de incidência vértice-arco da árvore dirigida T , e N a matriz de incidência vértice-arco do digrafo D . Sejam \tilde{L} e \tilde{N} as submatrizes de L e N , resp., que se obtêm por eliminação de uma linha qualquer em L e da sua correspondente em N . Pelo Teorema 26, $LM = N$

e, portanto, $\tilde{L}M = \tilde{N}$. Como \tilde{L} é não-singular então $M = \tilde{L}^{-1}\tilde{N}$. Por hipótese, B é uma base $\tilde{L}^{-1}\tilde{N}$ e, portanto, também de $[I \tilde{L}^{-1}\tilde{N}]$ (mas sendo B submatriz de $\tilde{L}^{-1}\tilde{N}$). Por isso, $\tilde{L}B$ é uma base de $[\tilde{L} \tilde{N}]$ (mas sendo $\tilde{L}B$ submatriz de \tilde{N}). Temos que $[L \ N]$ é a matriz de incidência vértice-arco do digrafo $(V, E_0 \cup E)$. Além disso, $(V, E_0 \cup E)$ é conexo porque resulta de juntarmos a $T = (V, E_0)$ (já conexo) arcos que ligam em V . Os arcos de $E \subseteq E_0 \cup E$ associados às colunas de $\tilde{L}B$ (ou, equivalentemente, de B) formam uma árvore abrangente em $(V, E_0 \cup E)$ e, portanto, em $D = (V, E)$ (pois todos estes arcos são arcos em E), o que prova (a). Denotemos esta árvore por $T' = (V, E')$, com $E' \subseteq E$, e provemos (b) e (c).

Como $LM = N$ e B é uma base de M então, LB é uma submatriz de colunas de N . Como N é a matriz de incidência vértice-arco de D então, LB é a matriz de incidência vértice-arco do subgrafo $T' = (V, E')$ de D . Como $(LB)B^{-1} = L$ e $(LB)(B^{-1}M) = N$ então, pelo Teorema 15, B^{-1} é uma matriz de rede representada pelo digrafo T (que é uma árvore) e pela árvore dirigida T' , e $B^{-1}M$ é uma matriz de rede representada ainda por D e T' , o que prova (b) e (c). Note-se que (b) é uma generalização do Corolário 17. \square

Corolário 18 *Seja M uma matriz de rede representada por um digrafo $D = (V, E)$ e uma árvore dirigida $T = (V, E_0)$. Seja M' a matriz que resulta de M após pivotação no elemento da posição (i, j) e seja (s, t) $((u, v)$, resp.) o arco de T (D , resp.) associado à linha i (coluna j , resp.) de M . Então, M' é uma matriz de rede representada pelo digrafo $D' = (V, (E \setminus \{(u, v)\}) \cup \{(t, s)\})$ e pela árvore dirigida $T' = (V, (E_0 \setminus \{(s, t)\}) \cup \{(v, u)\})$.*

Prova: Seja M uma matriz de rede nas condições referidas e seja ε a entrada de M na posição ij . Denotemos $a'_i \equiv (s, t)$ e $a_j \equiv (u, v)$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que M tem o seguinte aspecto,

$$a_j \ E \setminus \{a_j\} \\ a'_i \begin{bmatrix} \varepsilon & c \\ b & D \end{bmatrix} \\ E_0 \setminus \{a'_i\}$$

para um adequado vector-coluna b , um adequado vector-linha c e uma adequada submatriz D . Consideremos a matriz $[I \ M]$, bem como a submatriz B de $[I \ M]$ constituída pela coluna indexada por a_j de M e pelas colunas da matriz I à excepção da coluna que tem a entrada não-nula na posição correspondente ao índice a'_i . Claramente, $[I \ M]$ é uma matriz de rede de característica completa por linhas representada pela árvore T e pelo digrafo $(V, E \cup E_0)$, e B , por ser submatriz, também é uma matriz de rede. Sem perda de generalidade, as

matrizes $[I \ M]$ e B têm o seguinte aspecto:

$$E_0 \setminus \{a'_i\} \begin{array}{c} a'_i \ E_0 \setminus \{a'_i\} \ a_j \ E \setminus \{a_j\} \\ \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & \cdots & 0 & \varepsilon & c \\ 0 & & & & b & D \\ \vdots & & I & & & \\ 0 & & & & & \end{array} \right], \quad E_0 \setminus \{a'_i\} \begin{array}{c} a_j \ E \setminus \{a_j\} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} \varepsilon & 0 & \cdots & 0 \\ b & & & I \end{array} \right],$$

resp. Como B é uma base da matriz $[I \ M]$ então, por (c) do Teorema 27, $B^{-1}[I \ M]$, que é a matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \varepsilon & 0 & \cdots & 0 \\ -\varepsilon b & & & I \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc|cc} I & & & \varepsilon & c \\ & & & b & D \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|cc} \varepsilon & 0 & \cdots & 0 & 1 & \varepsilon c \\ -\varepsilon b & & & I & \vdots & D - \varepsilon bc \\ & & & & 0 & \end{array} \right],$$

é uma matriz de rede representada pelo digrafo $(V, E \cup E_0)$ e pela árvore $T^* = (V, (E_0 \setminus \{a'_i\}) \cup \{a_j\})$. Fazendo corresponder a cada linha e a cada coluna o arco respectivo, então, pela Propriedade 2, $B^{-1}[I \ M]$ tem o seguinte aspecto:

$$E_0 \setminus \{a'_i\} \begin{array}{c} a'_i \ E_0 \setminus \{a'_i\} \ a_j \ E \setminus \{a_j\} \\ \left[\begin{array}{ccc|cc} \varepsilon & 0 & \cdots & 0 & 1 & \varepsilon c \\ -\varepsilon b & & & I & \vdots & D - \varepsilon bc \\ & & & & 0 & \end{array} \right],$$

Se na submatriz de $B^{-1}[I \ M]$,

$$E_0 \setminus \{a'_i\} \begin{array}{c} a'_i \ E \setminus \{a_j\} \\ \left[\begin{array}{cc} \varepsilon & \varepsilon c \\ -\varepsilon b & D - \varepsilon bc \end{array} \right],$$

multiplicarmos por -1 a primeira linha e a primeira coluna, obtemos precisamente a matriz M' . Pelas Propriedades 3 e 4, concluímos que M' é a matriz de rede representada pelo digrafo $D' = (V, (E \setminus \{(u, v)\}) \cup \{(t, s)\})$ e pela árvore dirigida $T' = (V, (E_0 \setminus \{(s, t)\}) \cup \{(v, u)\})$. \square

Corolário 19 *Seja \bar{M} a matriz que resulta de uma dada matriz M por uma operação pivotal. Então, M é matriz de rede se e só se \bar{M} é matriz de rede.*

Prova: Se M é matriz de rede então, pelo Corolário 18, \bar{M} também é matriz de rede. Suponhamos agora que \bar{M} é uma matriz de rede. Como se pivotarmos em \bar{M} no *pivot* da operação pivotal que originou \bar{M} tornamos a obter M , então, de novo pelo Corolário 18, M também é uma matriz de rede. \square

Teorema 28 *Toda a matriz de rede é Totalmente Unimodular.*

Prova: Como toda a submatriz de uma matriz de rede é uma matriz de rede, se conseguirmos provar que toda a matriz de rede quadrada é TU, fica provado que toda a submatriz quadrada de uma matriz de rede é TU. O resultado desejado ficaria demonstrado.

Provamos por indução matemática forte que toda a matriz de rede quadrada é TU. Toda a matriz de rede de ordem 1 é TU, trivialmente.

Suponhamos que toda a matriz de rede de ordem inferior a p , com $p > 1$, é TU e seja M uma matriz de rede de ordem p gerada por um grafo dirigido $G = (V, E)$ e por uma árvore dirigida $T = (V, E_0)$.

Como toda a submatriz de uma matriz de rede é uma matriz de rede, pela hipótese de indução, o determinante de qualquer submatriz própria quadrada de M é $0, \pm 1$. Falta provar que $\det(M) = 0, \pm 1$.

Seja u um qualquer vértice terminal de T . Seja $G' = (V, E')$ o digrafo que resulta de G invertendo o sentido de todos os arcos $(x, u) \in \delta^-(u)$ e seja $T' = (V, E'_0)$ o digrafo que resulta de T invertendo o sentido do único arco T se este for da forma (y, u) . Pelas Propriedades 3 e 4, se M' denotar a matriz de rede gerada por G' e T' , $|\det(M')| = |\det(M)|$. Mais, atendendo às condições impostas ao vértice u em G' e T' , a linha de M' indexada pelo arco $b' \equiv (u, z) \in E_0$ é um vector de zeros e uns.

Sejam $a_1 \equiv (u, v_1), a_2 \equiv (u, v_2) \in E'$ tais que $M'_{b'a_1} = M'_{b'a_2} = 1$. Pela Propriedade 6, a matriz M'' que resulta de substituir a coluna indexada por $a_1 \equiv (u, v_1)$ pela sua diferença com a coluna indexada por $a_2 \equiv (u, v_2)$ é uma matriz de rede. Além disso, $\det(M'') = \det(M')$ e a linha indexada por b' ficou com menos um elemento não nulo, permanecendo um vector de zeros e uns.

Ao fim de um número finito de passos deste tipo, alcançamos uma matriz de rede que tem exactamente um ou nenhum elemento não nulo na linha indexada por b' . Pela Regra de Laplace e pela hipótese de indução uma tal matriz tem determinante $0, \pm 1$. Concluimos que $\det(M) = 0, \pm 1$ e, por isso, M é TU. O teorema fica demonstrado pelo princípio de indução matemática forte. \square

Portanto, pela Propriedade 8 e pelo Teorema 28, se A é uma matriz de zeros e uns tal que em cada coluna de A os uns aparecem consecutivamente então, A é uma matriz Totalmente Unimodular. Como vimos antes, este resultado também decorre do Teorema de Ghouila-Houri. Nem toda a matriz TU é de rede conforme se ilustra com o seguinte resultado:

Lema 7 *As matrizes*

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

são matrizes TU mas não são matrizes de rede.

Prova: Primeiro, mostremos que as matrizes (3.26) são TU, começando pela matriz do lado direito que denotaremos por B (a outra, denotaremos por A): a submatriz que resulta de B por eliminação da linha 1 e da coluna 1 é, claramente, uma matriz-ciclo equilibrada e, pelo Corolário 11, é uma matriz TU. Como esta submatriz também é matriz de incidência vértice-aresta de um determinado digrafo G , então, pelo Teorema 21, G é bipartido. Como vimos na página 73, se acrescentarmos uma linha só de uns ou só de menos uns à matriz de incidência vértice-aresta de um grafo bipartido, a matriz permanece TU. Por isso, a submatriz que resulta de B por eliminação da coluna 1, digamos B' , é uma matriz TU. Como a submatriz que resulta de B por eliminação da linha 1, digamos B^* , é tal que $B^* = PB'^T$, com $P \equiv (13452)$, então B^* também é TU. Usemos o Teorema de Camion I (Teorema 17) para mostrar que B também é TU. Seja então, S uma qualquer submatriz de B não-singular. Queremos mostrar que S tem pelo menos uma linha com um número ímpar de componentes não-nulas. Se S é uma submatriz de B' ou B^* então, como B' e B^* são TU, S tem uma linha com um número ímpar de componentes não-nulas. Suponhamos então que S indexa a linha 1 e a coluna 1 de B . Se S é de ordem ímpar, a linha 1 de S contém um número ímpar de componentes não-nulas. Suponhamos que S é de ordem par, isto é, de ordem 2 ou 4: se S é de ordem 2 então, como S é não-singular e é uma matriz só de zeros e uns, S tem uma linha com exactamente uma componente não-nula. Se S é de ordem 4 então, S obteve-se de B por eliminação de uma linha diferente da linha 1 e de uma coluna diferente da coluna 1. Ao eliminar essa linha, a matriz obtida tem três linhas com exactamente três componentes não-nulas cada. Quando, em seguida, eliminamos a referida coluna então, no máximo duas dessas três linhas perdem uma componente não-nula cada, isto é, existe pelo menos uma linha das três que não perde qualquer componente não-nula, ou seja, S tem uma linha com exactamente três componentes não-nulas. Em qualquer caso, S tem sempre uma linha com um número ímpar de componentes não-nulas. Pelo Teorema de Camion I, B é TU. Como

$$D_{124}P_{45}P_{15}p_{23}(B)D_{14} = A$$

(em que p_{23} denota a matriz que resulta de B após pivotação no elemento da posição 23 e D_{14}, D_{124} representam matrizes diagonais em que os elementos da diagonal principal são tudo-uns à exceção dos elementos das linhas 1,4 e das linhas 1,2,4, resp., que são menos uns), então, pelo Teorema 10 e pelas propriedades das matrizes TU, A também é TU.

Agora, mostremos que A e B não são matrizes de rede, mostrando primeiro para B : suponhamos, por absurdo, que B é uma matriz de rede representada por uma árvore dirigida T e um digrafo D . Como a primeira coluna de B é uma coluna que não contém qualquer elemento não-nulo, então, existe um caminho não-dirigido em T que passa por todos os arcos de T . Por isso, T não contém qualquer bifurcação, isto é, T é um caminho dirigido. As restantes colunas são vectores característicos de quatro caminhos dirigidos em T diferentes, nos arcos percorridos, de comprimento três. Mas, isto é absurdo, porque no caminho T , constituído por cinco arcos, existem no máximo três subcaminhos dirigidos diferentes, nos arcos percorridos, de comprimento três. Logo, B não é matriz de rede. Pelo Corolário 19, $p_{23}(B)$ também não é matriz de rede pelo que, pelas propriedades das matrizes de rede, $A = D_{124}P_{145}P_{15}p_{23}(B)D_{14}$ também não o é. \square

Lema 8 *Se pivotarmos num elemento não-nulo qualquer das matrizes (3.26), a matriz obtida continua a ser uma das matrizes (3.26), a menos de trocas de linhas e/ou colunas e multiplicação de linhas e/ou colunas por -1 .*

Prova: Primeiro, fixemos alguma notação. Denotemos por A a matriz do lado esquerdo em (3.26) e por B a matriz do lado direito. Designemos por $P(a_1a_2\dots a_n)$, $a_1, a_2, \dots, a_n \in \{1, 2, \dots, n\}$ a matriz de permutação constituída pelas colunas, por esta ordem, a_1, a_2, \dots, a_n da matriz identidade de ordem n . Designemos também por D_{a_1, a_2, \dots, a_m} , $\{a_1, a_2, \dots, a_m\} \in \mathcal{P}(\{1, 2, \dots, n\})$, uma matriz diagonal de ordem n cujos elementos da diagonal principal situados nas linhas a_1, a_2, \dots, a_m são iguais a -1 e os restantes iguais a 1. Por fim, seja $\varepsilon = a_{ij}$ uma entrada não-nula qualquer de uma dada matriz A e designemos por $p_\varepsilon(A)$ ou $p_{ij}(A)$ a matriz que resulta de A por pivotação no elemento ε . Primeiro, provemos que este teorema é verdadeiro caso pivotemos num elemento não-nulo qualquer da matriz B . É fácil verificar que

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{11}(\mathbf{B})P(14523)D_{2345} &= D_{125}P_{25}\mathbf{p}_{12}(\mathbf{B})P_{14}D_2 = P_{14}\mathbf{p}_{21}(\mathbf{B})P_{23}D_{23} = B \quad \text{e} \\ D_{25}P_{23}P_{34}P_{35}P_{45}\mathbf{p}_{22}(\mathbf{B})P_{14}P_{15}D_{235} &= D_{124}P_{45}P_{15}\mathbf{p}_{23}(\mathbf{B})D_{14} = A, \end{aligned} \tag{3.27}$$

o que prova que o lema é verdadeiro caso pivotemos nos elementos $b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}$ e b_{23} da matriz B . Consideremos as matrizes de permutação

$$P_1 \equiv P(13452), \quad P_2 \equiv P(14523) \quad \text{e} \quad P_3 \equiv P(15234)$$

cujos índices de coluna, à exceção de 1, são as permutações cíclicas de 2345. Tem-se que $P_1BP_1 = P_2BP_2 = P_3BP_3 = B$ e os elementos de B nas posições 13, 31, 33 e 34/ 14, 41, 44 e 45/ 15, 51, 55 e 52 são “transportados” para as posições 12, 21, 22 e 23 (resp.) em P_1BP_1, P_2BP_2 e P_3BP_3 , resp. Como, para qualquer matriz de permutação P e para qualquer entrada não-nula ε de uma dada matriz M , $p_\varepsilon(PM) = Pp_\varepsilon(M)$ e $p_\varepsilon(MP) = p_\varepsilon(M)P$, então, por exemplo, $p_{12}(B) = p_{12}(P_1BP_1) = P_1p_{13}(B)P_1$ e também

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{12}(\mathbf{B}) &= P_1p_{13}(B)P_1 = P_2p_{14}(B)P_2 = P_3p_{15}(B)P_3 \\ \mathbf{p}_{21}(\mathbf{B}) &= P_1p_{31}(B)P_1 = P_2p_{41}(B)P_2 = P_3p_{51}(B)P_3 \\ \mathbf{p}_{22}(\mathbf{B}) &= P_1p_{33}(B)P_1 = P_2p_{44}(B)P_2 = P_3p_{55}(B)P_3 \\ \mathbf{p}_{23}(\mathbf{B}) &= P_1p_{34}(B)P_1 = P_2p_{45}(B)P_2 = P_3p_{52}(B)P_3 \end{aligned} \quad (3.28)$$

Por (3.27) e (3.28), concluímos que o lema é verdadeiro caso pivotemos num elemento não-nulo qualquer da matriz B .

Provemos que este lema também é verdadeiro caso pivotemos num elemento não-nulo qualquer da matriz A . É fácil verificar que

$$D_{34}P_{34}\mathbf{p}_{11}(\mathbf{A})P_{25}D_{25} = A \quad \text{e} \quad (3.29)$$

$$D_{235}P_{45}P_{13}\mathbf{p}_{12}(\mathbf{A})P(53214)D_{45} = D_{245}P_{15}\mathbf{p}_{21}(\mathbf{A})P_{13}P_{23}D_{34} = B$$

o que prova que o lema é verdadeiro caso pivotemos nos elementos a_{11}, a_{12} e a_{21} da matriz A . Consideremos as matrizes

$$P_4 \equiv P(23451), \quad P_5 \equiv P(34512), \quad P_6 \equiv P(45123) \quad \text{e} \quad P_7 \equiv P(51234)$$

cujos índices de coluna são as permutações cíclicas de 12345. Tem-se que $P_4AP_4 = P_5AP_5 = P_6AP_6 = P_7AP_7 = A$ e os elementos de A nas posições 22, 23 e 32/ 33, 34 e 43/ 44, 45 e 54/ 55, 51 e 15 são transportados para as posições 11, 12 e 21 (resp.) em $P_4AP_4, P_5AP_5, P_6AP_6$ e P_7AP_7 , resp. Então,

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{11}(\mathbf{A}) &= P_4p_{22}(A)P_4 = P_5p_{33}(A)P_5 = P_6p_{44}(A)P_6 = P_7p_{55}(A)P_7 \\ \mathbf{p}_{12}(\mathbf{A}) &= P_4p_{23}(A)P_4 = P_5p_{34}(A)P_5 = P_6p_{45}(A)P_6 = P_7p_{51}(A)P_7 \\ \mathbf{p}_{21}(\mathbf{A}) &= P_4p_{32}(A)P_4 = P_5p_{43}(A)P_5 = P_6p_{54}(A)P_6 = P_7p_{15}(A)P_7 \end{aligned} \quad (3.30)$$

Por (3.29) e (3.30), concluímos que o lema também é verdadeiro caso pivotemos num elemento não-nulo qualquer da matriz A , o que prova o lema. \square

Sendo verdade que nem todas as matrizes TU são matrizes de rede, o próximo teorema (de Seymour) prova que, em certo sentido, todas as matrizes TU podem ser obtidas a partir de matrizes de rede e das duas matrizes (3.26). Para podermos enunciar o Teorema de Seymour, observe-se que a Unimodularidade Total de uma matriz é preservada mediante a aplicação de uma qualquer das seguintes operações:

- (i) troca de linhas ou colunas.
- (ii) transposição da matriz inicial.
- (iii) multiplicação de uma linha ou coluna por -1 .
- (iv) operação pivotal num elemento não-nulo da matriz inicial. (3.31)
- (v) adição de uma nova linha ou coluna com no máximo uma entrada não-nula, igual a ± 1 .
- (vi) repetição de uma linha ou coluna.

Pelos Corolários 6, 7 e 8, podemos concluir que a Unimodularidade Total é uma propriedade que é preservada quando aplicamos uma das seguintes composições a duas matrizes TU, A e B , de dimensões adequadas:

$$\begin{aligned}
 A \oplus_1 B &\equiv \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \\
 [A \ a] \oplus_2 \begin{bmatrix} b \\ B \end{bmatrix} &\equiv \begin{bmatrix} A & ab \\ 0 & B \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} A & a & a \\ c & 0 & 1 \end{bmatrix} \oplus_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & b \\ d & d & B \end{bmatrix} &\equiv \begin{bmatrix} A & ab \\ dc & B \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

(a e d são vectores-coluna, b e c são vectores-linha, ambos de dimensão adequada), que se denotam por 1-soma, 2-soma e 3-soma, resp., em (Schrijver, 1986).

Teorema 29 (Seymour, 1985) *Uma matriz M é TU se e só se M se obtém de entre o conjunto das matrizes de rede e das duas matrizes (3.26) após alguma sequência de operações (3.31) e/ou (3.32), em que as operações (3.32) são eventualmente aplicadas apenas se, quer para A quer para B , a soma do número de linhas com o número de colunas é pelo menos 4.*

Como já referimos, a prova deste teorema usa um conjunto de resultados de matrôides demasiadamente vastos para serem incluídos nesta dissertação.

Estes resultados podem ser vistos em (Seymour, 1980). A prova deste teorema, enquanto aplicação dos resultados referidos, pode ser vista em (Seymour, 1985).

O Teorema 29 tem um corolário muito interessante, que apresentaremos a seguir, que permitirá estabelecer um algoritmo polinomial para reconhecimento de matrizes TU, como veremos no Capítulo 4.

Corolário 20 *Seja M uma matriz TU. Então, verifica-se pelo menos um dos seguintes casos:*

- (a). M ou M^T é uma matriz de rede.
- (b). M é uma das matrizes em (3.26), possivelmente após trocas de linhas e colunas, ou multiplicação de linhas e colunas por -1 .
- (c). M tem uma linha ou uma coluna com, no máximo, uma entrada não-nula, ou então M tem duas linhas ou duas colunas iguais ou simétricas.
- (d). As linhas e as colunas de M podem ser trocadas de modo a obter uma matriz com o seguinte aspecto:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \quad (3.33)$$

com $\rho(B) + \rho(C) \leq 2$ e em que, quer para A quer para D , a soma do número de linhas com o número de colunas é pelo menos 4.

A prova deste corolário será feita mais adiante. Antes, precisamos de dois lemas.

Lema 9 *Seja M uma matriz de zeros, uns e menos uns e seja ε uma qualquer entrada não-nula de M . Consideremos a matriz M' que resulta de M através de uma operação pivotal usando ε como pivot. Sejam, ainda, $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ quaisquer. Então, as duas seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a). As linhas e as colunas de M podem ser trocadas de modo a obter

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

sendo A, B, C, D matrizes de dimensão adequada tais que

$$m(A) + n(A) = k_1 \quad e \quad \rho(B) + \rho(C) = k_2.$$

- (b). As linhas e as colunas de M' podem ser trocadas de modo a obter

$$M' = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

sendo A', B', C', D' matrizes de dimensão adequada tais que

$$m(A') + n(A') = k_1 \quad e \quad \rho(B') + \rho(C') = k_2.$$

Prova: Primeiro, provemos que (a) \Rightarrow (b). Suponhamos, pois que se verifica (a). Temos 4 casos: (i) ε é uma entrada de A ; (ii) ε é uma entrada de B ; (iii) ε é uma entrada de C ; (iv) ε é uma entrada de D . Suponhamos que ε é uma entrada de A . Sem perda de generalidade, M tem o seguinte aspecto:

$$M = \left[\begin{array}{cc|c} \varepsilon & a_2 & b \\ a_1 & \bar{A} & \bar{B} \\ \hline c & \bar{C} & D \end{array} \right]$$

para adequadas submatrizes $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ de A, B e C , resp., adequados vectores-linha a_2, b e adequados vectores-coluna a_1 e c . Então,

$$M' = \left[\begin{array}{cc|c} \varepsilon & -\varepsilon a_2 & -\varepsilon b \\ \varepsilon a_1 & \bar{A} - \varepsilon a_1 a_2 & \bar{B} - \varepsilon a_1 b \\ \hline \varepsilon c & \bar{C} - \varepsilon c a_2 & D - \varepsilon c b \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A' & B' \\ \hline C' & D' \end{array} \right] \quad (3.36)$$

com $m(A') + n(A') = m(A) + n(A) = k_1$,

$$\rho(B') = \rho \left(\left[\begin{array}{c} -\varepsilon b \\ \bar{B} - \varepsilon a_1 b \end{array} \right] \right) = \rho \left(\left[\begin{array}{cccc} -\varepsilon & 0 & \cdots & 0 \\ -\varepsilon a_1 & & & I \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} b \\ \bar{B} \end{array} \right] \right) = \rho(B) \quad e$$

$$\rho(C') = \rho([\varepsilon c \quad \bar{C} - \varepsilon c a_2]) = \rho \left([\varepsilon c \quad \bar{C} - \varepsilon c a_2] \left[\begin{array}{c} \varepsilon & a_2 \\ \mathbf{0} & I \end{array} \right] \right) = \rho([c \quad \bar{C}]) = \rho(C).$$

Portanto, $\rho(B') + \rho(C') = k_2$. Se ε é uma entrada de D , a conclusão é análoga.

Suponhamos que ε é uma entrada de B e, portanto, $\rho(B) \geq 1$. Como $\rho(B) = 1$, então, sem perda de generalidade, M tem o seguinte aspecto:

$$\left[\begin{array}{c|cc} a & \varepsilon & b_2 \\ \bar{A} & b_1 & \bar{B} \\ \hline C & d & \bar{D} \end{array} \right]$$

para adequadas submatrizes \bar{A}, \bar{B} e \bar{D} de A, B e D , resp., adequados vectores-linha a, b_2 e adequados vectores-coluna b_1 e d . Então,

$$M' = \left[\begin{array}{cc|c} -\varepsilon a & \varepsilon & -b_2 \\ \bar{A} - \varepsilon b_1 a & \varepsilon b_1 & \bar{B} - \varepsilon b_1 b_2 \\ \hline C - \varepsilon d a & \varepsilon d & \bar{D} - \varepsilon d b_2 \end{array} \right]. \quad (3.37)$$

Em seguida, trocam-se as linhas da matriz (3.37) de modo a obter a matriz

$$\left[\begin{array}{cc|c} \bar{A} - \varepsilon b_1 a & \varepsilon b_1 & \bar{B} - \varepsilon b_1 b_2 \\ -\varepsilon a & \varepsilon & -b_2 \\ \hline C - \varepsilon d a & \varepsilon d & \bar{D} - \varepsilon d b_2 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A' & B' \\ \hline C' & D' \end{array} \right]$$

com $m(A') + n(A') = (m(A) - 1) + (n(A) + 1) = k_1$,

$$\begin{aligned}\rho(B') &= \rho(\bar{B} - \varepsilon b_1 b_2) = \rho\left(\begin{bmatrix} 1 & \varepsilon b_2 \\ \mathbf{0} & \bar{B} - \varepsilon b_1 b_2 \end{bmatrix}\right) - 1 \\ &= \rho\left(\begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & \dots & 0 \\ -\varepsilon b_1 & & & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon & b_2 \\ b_1 & \bar{B} \end{bmatrix}\right) - 1 \\ &= \rho\left(\begin{bmatrix} \varepsilon & b_2 \\ b_1 & \bar{B} \end{bmatrix}\right) - 1 = \rho(B) - 1\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\rho(C') &= \rho\left(\begin{bmatrix} -\varepsilon a & \varepsilon \\ C - \varepsilon da & \varepsilon d \end{bmatrix}\right) = \rho\left(\begin{bmatrix} \varepsilon & \mathbf{0} \\ \varepsilon d & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a & 1 \\ C & \mathbf{0} \end{bmatrix}\right) \\ &= \rho\left(\begin{bmatrix} -a & 1 \\ C & \mathbf{0} \end{bmatrix}\right) = \rho(C) + 1.\end{aligned}$$

Portanto, $\rho(B') + \rho(C') = (\rho(B) - 1) + (\rho(C) + 1) = k_2$. Concluimos que se verifica (b). Se ε é uma entrada de C , a conclusão é análoga. Assim, terminamos a prova de que (a) implica (b).

(b) \Rightarrow (a) Suponhamos que se verifica (b). Como ε também é uma entrada da matriz M' , então, se efectuarmos uma operação pivotar em M' usando ε como *pivot*, obtemos a matriz M . Pela implicação anterior, tem-se que (b) implica (a). \square

Corolário 21 *Operações pivotais preservam a propriedade (d) do Corolário 20.*

Prova: Seja M uma matriz que satisfaz a propriedade (d) do Corolário 20, isto é, as linhas e as colunas de M podem ser trocadas tal que

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

com $\rho(B) + \rho(C) \leq 2$ e $m(A) + n(A), m(D) + n(D) \geq 4$. Seja M' a matriz que resulta de M após uma operação pivotar num elemento não-nulo qualquer de M . Pelo Lema 9, as linhas e as colunas de M podem ser trocadas tal que

$$M' = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix},$$

com $\rho(B') + \rho(C') = \rho(B) + \rho(C) \leq 2$ e $m(A') + n(A') = m(A) + n(A) \geq 4$. Além disso, como

$$\begin{aligned}m(D) + n(D) &= m(M) + n(M) - (m(A) + n(A)) \quad \text{e} \\ m(D') + n(D') &= m(M') + n(M') - (m(A') + n(A'))\end{aligned}\tag{3.38}$$

então, $m(D') + n(D') = m(D) + n(D) \geq 4$. Logo, M' satisfaz a propriedade (d) do Corolário 20. \square

Observação 4 *Em relação às matrizes M e M' do enunciado do Lema 9, consideremos todas as decomposições (3.34) de M com $m(A) + n(A) \geq k_A$, $m(D) + n(D) \geq k_D$, onde $k_A, k_D \in \mathbb{N}$ e seja m_1 o valor mínimo de $\rho(B) + \rho(C)$. De igual modo, consideremos todas as decomposições (3.35) de M' nas mesmas condições e seja m_2 o valor mínimo de $\rho(B') + \rho(C')$. Tem-se que $m_1 = m_2$. Com efeito, consideremos uma qualquer decomposição (3.34) de M nas condições referidas com $\rho(B) + \rho(C) = m_1$. Pelo Teorema 9, existe uma decomposição (3.35) de M' com*

$$m(A') + n(A') = m(A) + n(A) \geq k_A \quad e \quad \rho(B') + \rho(C') = m_1.$$

Além disso, como se verifica (3.38), então, $m(D') + n(D') = m(D) + n(D) \geq k_D$. Logo, $m_2 \leq m_1$. De modo semelhante concluiríamos que $m_1 \leq m_2$.

Prova: (do Corolário 20 do Teorema de Seymour) Pelo Teorema de Seymour (Teorema 29), M é TU se e só se M se obtém de entre o conjunto das matrizes de rede e das duas matrizes (3.26) após alguma sequência de operações (3.31) e/ou (3.32), em que as operações (3.32) são eventualmente aplicadas apenas se, quer para A quer para B , a soma do número de linhas com o número de colunas é pelo menos 4.

Suponhamos que, para obter M , aplicámos pelo menos uma vez alguma das operações binárias em (3.32) e situemo-nos no momento em que o fizemos pela última vez. Nessa altura, a matriz-soma satisfaz a propriedade (d). Claramente, esta propriedade é preservada toda a vez que efectuarmos alguma das operações (i), (ii) ou (iii) de (3.31). Se efectuarmos (v) ou (vi) de (3.31), a propriedade (d) também é preservada, apenas aumentando a dimensão de uma das matrizes A ou B . Por último, se efectuarmos a operação (iv) então, pelo Corolário 21, a propriedade (d) também é preservada. Por isso, no final, M satisfaz (d).

Suponhamos então que nunca aplicámos nenhuma das operações binárias em (3.32) para obter M . Agora, suponhamos também que aplicámos pelo menos uma vez (v) ou (vi) de (3.31) e situemo-nos no momento em que o fizemos pela última vez. Nessa altura, a matriz final satisfaz a propriedade (c). Claramente, esta propriedade é preservada se efectuarmos várias operações (i), (ii) ou (iii). Por último, mostramos que a propriedade (c) também é preservada se efectuarmos alguma operação pivotal numa matriz A qualquer que satisfaça (c). Temos dois casos: (i) A tem uma linha ou coluna com, no máximo, uma componente não-nula; (ii) A tem duas linhas, ou colunas, iguais ou simétricas. No caso (i), se a linha i (coluna j , resp.) de A tem no máximo um elemento $a_{ik} \neq 0$ ($a_{lj} \neq 0$, resp.) então, se pivotarmos nesse elemento ou fora da coluna k (linha l , resp.), a linha i (coluna j , resp.) não é alterada. Se pivotarmos na coluna k (linha

l , resp.) mas não no *pivot*, digamos em $a_{i'k}$ ($a_{lj'}$, resp.), então as linhas i e i' (colunas j e j' , resp.) ficam iguais ou simétricas. Portanto, a propriedade (c) continua a verificar-se. No caso (ii), se pivotarmos fora das duas linhas (colunas, resp.) que são iguais, essas duas linhas (colunas, resp.) continuam iguais ou simétricas. Se pivotarmos numa delas, a outra passa a ter no máximo uma componente não-nula. Portanto, também neste caso a propriedade (c) é preservada. Por isso, no final, M satisfaz (c).

Suponhamos então que apenas aplicámos as operações (i), (ii), (iii) ou (iv) de (3.31) para obter M . Temos dois casos: (i) a matriz inicial era uma matriz de rede; (ii) a matriz inicial era uma das matrizes (3.26).

No caso (i), a matriz inicial já satisfaz a propriedade (a). Claramente, esta propriedade é preservada toda a vez que efectuarmos alguma das operações (i), (ii) ou (iii). Mostremos que a propriedade (a) também é preservada se efectuarmos alguma operação pivotal numa matriz A qualquer que satisfaça (a): se A é matriz de rede então, pelo Corolário 19, se pivotarmos num elemento não-nulo de A , a matriz obtida ainda é uma matriz de rede. Se A^T é que é uma matriz de rede, então, pelo Corolário 19, para qualquer entrada $\varepsilon \neq 0$ de A^T , $p_\varepsilon(A^T)$ é matriz de rede e, pela alínea (c) da Propriedade 1, a transposta da matriz $p_\varepsilon(A)$ também o é. Concluimos que a operação (iv) também preserva a propriedade (a). Por isso, no caso (i), a matriz final, M , satisfaz (a).

No caso (ii), a matriz inicial já satisfaz a propriedade (b). Claramente, esta propriedade é preservada toda a vez que efectuarmos alguma das operações (i) ou (iii). Se designarmos por B e por C a matriz do lado esquerdo e do lado direito em (3.26), resp., então é fácil verificar que $B^T = B$ e $C^T = CP$ com $P \equiv P(13452)$. Por isso, se uma dada matriz Q satisfaz (b), i.e,

$$D_1 P_1 Q P_2 D_2 = B \quad \text{ou} \quad D_3 P_3 Q P_4 D_4 = C \quad (3.39)$$

(para adequadas matrizes de permutação P_1, P_2, P_3, P_4 e adequadas matrizes diagonais D_1, D_2, D_3, D_4 em que, todos os elementos da diagonal principal são uns ou menos uns), então

$$D_2 P_2^T Q^T P_1^T D_1 = B \quad \text{ou} \quad D_4 P_4^T Q^T P_3^T D_3 P^T = C,$$

ou seja, Q^T satisfaz (b). Concluimos que a operação (ii) também preserva a propriedade (b). Mostremos que a operação (iv) também preserva (b). Se Q satisfaz a primeira igualdade de (3.39) então, de acordo com as alíneas (a) e (b) da Propriedade 1, para qualquer elemento $\varepsilon \neq 0$,

$$\begin{aligned} p_\varepsilon(Q) &= p_\varepsilon(P_1^{-1} D_1 B D_2 P_2^{-1}) \\ &= P_1^{-1} D_1^* p_\varepsilon(B) D_2^* P_2^{-1} \\ &= P_1^{-1} D_1^* [D_3 P_3 (B \text{ ou } C) P_4 D_4] D_2^* P_2^{-1} \end{aligned} \quad (3.40)$$

para adequadas matrizes diagonais D_1^* , D_2^* (em que todos os elementos da diagonal principal são uns ou menos uns) e, pelo Lema 8, para adequadas matrizes diagonais D_3 e D_4 do mesmo tipo e adequadas matrizes de permutação P_3 e P_4 . Por (3.40), concluímos que $p_\varepsilon(Q)$ satisfaz (b). De modo semelhante, se Q satisfaz a segunda igualdade de (3.39) então, concluímos também que $p_\varepsilon(Q)$ satisfaz (b). Portanto, provamos que a operação (iv) ainda preserva (b). Por isso, no caso (ii), a matriz final, M , satisfaz (b).

Assim, concluímos que, em qualquer caso, M satisfaz pelo menos alguma das propriedades (a), (b), (c) ou (d), o que prova o Corolário. \square

3.4 Matrizes de incidência de cortes

Nesta secção seguimos como principal referência o livro de Bernhard Korte, *Combinatorial Optimization: Theory and Algorithms* (ver (Korte & Vygen, 2000)).

Definição 8 *Seja $G = (V, E)$ um digrafo e $\mathcal{F} \subseteq 2^V$. A matriz de incidência de cortes num sentido de \mathcal{F} relativamente a G é uma matriz M com $|\mathcal{F}|$ linhas e $|E|$ colunas cujo elemento genérico m_{Xe} é caracterizado por*

$$m_{Xe} = \begin{cases} 1 & \text{se } e \in \delta^-(X), \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

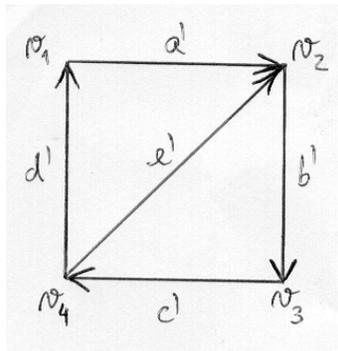


Figura 3.6: digrafo G

Por exemplo, se considerarmos o digrafo $G = (V, E)$ da Figura 3.6 com $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ e $E = \{a', b', c', d'\}$ e a família \mathcal{F} de subconjuntos de V com

$$\mathcal{F} = \{\{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\}, \{v_1, v_2, v_3\}, \{v_4\}\},$$

a matriz M de incidência de cortes num sentido de \mathcal{F} relativamente a G é a seguinte matriz, construída por linhas:

$$M = \begin{array}{ccccc} a' & b' & c' & d' & e' \\ \left[\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] & \begin{array}{l} \{v_1, v_2\} \\ \{v_3, v_4\} \\ \{v_1, v_2, v_3\} \\ \{v_4\} \end{array} \end{array}$$

Definição 9 *Seja $G = (V, E)$ um digrafo e $\mathcal{F} \subseteq 2^V$. A matriz de incidência de cortes nos dois sentidos de \mathcal{F} relativamente a G é uma matriz M com $|\mathcal{F}|$ linhas e $|E|$ colunas, cujo elemento genérico m_{Xe} definido por*

$$m_{Xe} = \begin{cases} +1 & \text{se } e \in \delta^-(X) \\ -1 & \text{se } e \in \delta^+(X) \\ 0 & \text{se } e \notin \delta^-(X) \cup \delta^+(X) \end{cases}$$

Considerando de novo o digrafo da Figura 3.6 e a mesma família \mathcal{F} do exemplo da definição anterior, então a matriz M de incidência de cortes nos 2 sentidos de \mathcal{F} relativamente a G é a seguinte matriz, construída por linhas:

$$M = \begin{array}{ccccc} a' & b' & c' & d' & e' \\ \left[\begin{array}{ccccc} 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right] & \begin{array}{l} \{v_1, v_2\} \\ \{v_3, v_4\} \\ \{v_1, v_2, v_3\} \\ \{v_4\} \end{array} \end{array}$$

Se considerarmos um digrafo $G = (V, E)$ e $\mathcal{F} \subseteq 2^V$, a matriz de cortes num sentido de \mathcal{F} , ao ser construída por linhas, indica, para cada índice de linha $X \subseteq \mathcal{F}$, quais os arcos e de E que entram em X ($M_{X,e} = 1$) e quais os que não entram em X ($M_{X,e} = 0$). A matriz de cortes nos dois sentidos de \mathcal{F} indica, para cada índice de linha $X \subseteq \mathcal{F}$, quais os arcos e de E que entram em X ($M_{X,e} = 1$), quais os que saem de X ($M_{X,e} = -1$) (e, por isso, dizemos “cortes nos 2 sentidos”) e quais os que não entram em X ($M_{X,e} = 0$).

É óbvio que nem todas as matrizes de incidência de cortes são TU. Por exemplo, se considerarmos o digrafo $G = (V, E)$, com $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ e $E = \{(v_1, v_2), (v_3, v_4), (v_5, v_6)\}$, e $\mathcal{F} = \{\{v_2, v_4\}, \{v_2, v_6\}, \{v_4, v_6\}\}$, então a matriz-ciclo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

é a matriz de incidência de cortes num sentido de \mathcal{F} relativamente a G e não é TU, pelo Corolário 11. Se considerarmos agora o digrafo $G' = (V', E')$, com

$V' = \{v'_1, v'_2, v'_3, v'_4\}$ e $E' = \{\{v'_1, v'_2\}, \{v'_3, v'_4\}\}$, e $\mathcal{F} = \{\{v'_1, v'_4\}, \{v'_2, v'_4\}\}$, então a matriz

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

é a matriz de incidência de cortes nos dois sentidos de \mathcal{F} relativamente a G e não é TU.

Veremos no Teorema 35 que existe uma classe de matrizes de incidência de cortes num sentido e uma classe de matrizes de incidência de cortes nos dois sentidos, constituídas ambas por matrizes TU.

Definição 10 *Seja U um conjunto finito não vazio e \mathcal{F} uma família de subconjuntos de U . O par (U, \mathcal{F}) diz-se sem cruzamentos se, para todo $X, Y \in \mathcal{F}$, um dos seguintes conjuntos é vazio:*

$$X \setminus Y, \quad Y \setminus X, \quad X \cap Y, \quad U \setminus (X \cup Y). \tag{3.41}$$

Pode demonstrar-se que (U, \mathcal{F}) é sem cruzamentos se e só se pelo menos uma das seguintes condições se verificar para todo $X, Y \in \mathcal{F}$:

$$X \subseteq Y, \quad Y \subseteq X, \quad X \cap Y = \emptyset, \quad X \cup Y = U. \tag{3.42}$$

No exemplo ilustrado na Figura 3.7, o par (U, \mathcal{F}) é sem cruzamentos para $U = \{a, b, c, d, e, f\}$ e $\mathcal{F} = \{\{b, c, d, e, f\}, \{c\}, \{a, b, c\}, \{e\}, \{a, b, c, d, f\}, \{e, f\}\}$

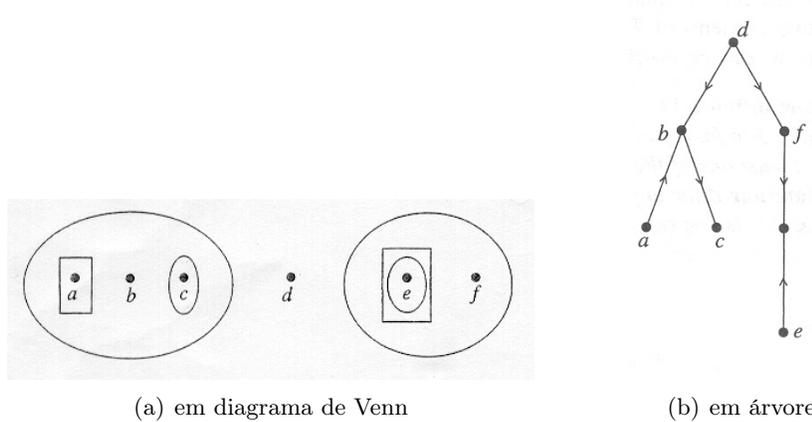


Figura 3.7: Representação de um par (U, \mathcal{F}) sem cruzamentos

Definição 11 *Seja U um conjunto finito não vazio e \mathcal{F} uma família de subconjuntos de U . O par (U, \mathcal{F}) diz-se laminar se para quaisquer $X, Y \in \mathcal{F}$, um dos seguintes conjuntos é vazio:*

$$X \setminus Y, \quad Y \setminus X, \quad X \cap Y. \tag{3.43}$$

Pode demonstrar-se que (U, \mathcal{F}) é laminar se e só se pelo menos uma das seguintes condições se verificar para todo $X, Y \in \mathcal{F}$:

$$X \subseteq Y, \quad Y \subseteq X, \quad X \cap Y = \emptyset. \quad (3.44)$$

No exemplo ilustrado na Figura 3.8, o par (U, \mathcal{F}) é laminar para

$$U = \{a, b, c, d, e, f, g\} \quad \text{e} \quad \mathcal{F} = \{\{a\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \{a, b, c, d\}, \{f\}, \{f, g\}\}.$$

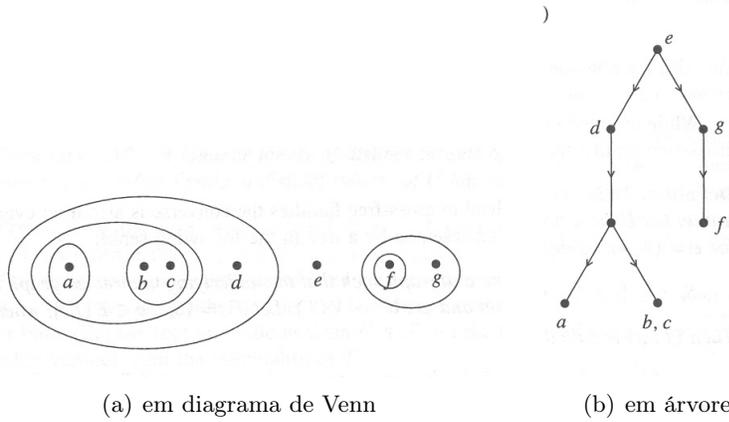


Figura 3.8: Representação de um par (U, \mathcal{F}) laminar

Em geral, se (U, \mathcal{F}) é laminar então (U, \mathcal{F}) é sem cruzamentos. O recíproco nem sempre é verdade pois, conforme se pode observar no exemplo da Figura 3.7, o par $X = \{b, c, d, e, f\}$ e $Y = \{a, b, c, d, f\}$ é tal que

$$X \setminus Y = \{e\}, \quad Y \setminus X = \{f\}, \quad X \cap Y = \{a, b, c, d\}.$$

Como nenhum destes conjuntos é vazio, concluímos que (U, \mathcal{F}) não é laminar. O próximo teorema relaciona os dois conceitos.

Teorema 30 *Seja U um conjunto finito não vazio, \mathcal{F} uma família de subconjuntos de U e r um elemento arbitrário de U . Para*

$$\mathcal{F}' = \{X \in \mathcal{F} : r \notin X\} \cup \{U \setminus X : X \in \mathcal{F}, r \in X\},$$

o par (U, \mathcal{F}) é sem cruzamentos se e só se o par (U, \mathcal{F}') é laminar.

Prova: (\Leftarrow) Suponhamos que o par (U, \mathcal{F}') é laminar. Sejam $X, Y \in \mathcal{F}$ quaisquer e consideremos três casos distintos: $r \in U \setminus (X \cup Y)$, $r \in X \cap Y$ e $r \in X \setminus Y$. Sem perda de generalidade podemos ignorar o caso $r \in Y \setminus X$.

Se $r \in U \setminus (X \cup Y) = (U \setminus X) \cap (U \setminus Y)$ então $r \notin X, Y$. Por isso, $X, Y \in \mathcal{F}'$. Atendendo a que um dos conjuntos (3.43) é vazio então também um dos conjuntos (3.41) é vazio.

Se $r \in X \cap Y$ então $r \in X, Y$. Por isso, $U \setminus X, U \setminus Y \in \mathcal{F}'$. Portanto, um dos seguintes conjuntos é vazio:

$$(U \setminus X) \setminus (U \setminus Y) \equiv Y \setminus X, \quad (U \setminus Y) \setminus (U \setminus X) \equiv X \setminus Y, \quad (U \setminus X) \cap (U \setminus Y) \equiv U \setminus (X \cap Y),$$

e, portanto, um dos conjuntos (3.41) é vazio.

Finalmente, se $r \in X \setminus Y$ então $U \setminus X, Y \in \mathcal{F}'$. Portanto, um dos seguintes conjuntos é vazio:

$$(U \setminus X) \setminus Y \equiv U \setminus (X \cup Y), \quad Y \setminus (U \setminus X) \equiv X \cap Y, \quad (U \setminus X) \cap Y \equiv Y \setminus X.$$

e, portanto, um dos conjuntos (3.41) é vazio. Concluimos que o par (U, \mathcal{F}) é sem cruzamentos.

(\Rightarrow) Suponhamos que o par (U, \mathcal{F}') é sem cruzamentos. Sejam $X, Y \in \mathcal{F}'$ quaisquer. Primeiro, observe-se que $r \notin X, Y$, porque nenhum subconjunto de U contendo r pertence a \mathcal{F}' . Consideremos três casos distintos: $X, Y \in \mathcal{F}$, $X \in \mathcal{F}$ e $Y \notin \mathcal{F}$, $X, Y \notin \mathcal{F}$. Sem perda de generalidade ignoramos o caso de $X \notin \mathcal{F}$ e $Y \in \mathcal{F}$.

Se $X, Y \in \mathcal{F}$ então um dos conjuntos (3.41) é vazio. O conjunto $U \setminus (X \cup Y)$ é não vazio porque $r \in U \setminus (X \cup Y)$. Por isso, um dos conjuntos (3.43) é vazio. Se $X \in \mathcal{F}$ e $Y \notin \mathcal{F}$ então $X, U \setminus Y \in \mathcal{F}$. Portanto, um dos seguintes conjuntos é vazio:

$$X \setminus (U \setminus Y) \equiv X \cap Y, \quad (U \setminus Y) \setminus X \equiv U \setminus (X \cup Y),$$

$$X \cap (U \setminus Y) \equiv U \setminus (X \cup Y), \quad U \setminus (X \cup (U \setminus Y)) \equiv Y \setminus X$$

e, portanto, um dos conjuntos (3.43) é vazio. Se $X, Y \notin \mathcal{F}$ então $U \setminus X, U \setminus Y \in \mathcal{F}$. Portanto, um dos seguintes conjuntos é vazio:

$$(U \setminus X) \setminus (U \setminus Y) \equiv Y \setminus X, \quad (U \setminus Y) \setminus (U \setminus X) \equiv X \setminus Y,$$

$$(U \setminus (U \setminus X)) \cap (U \setminus Y) \equiv X \setminus Y, \quad U \setminus ((U \setminus X) \cup (U \setminus Y)) \equiv X \cap Y$$

e, portanto, um dos conjuntos (3.43) é vazio. Concluimos que o par (U, \mathcal{F}') é laminar. \square

Definição 12 *Seja U um conjunto finito não vazio e \mathcal{F} uma família de subconjuntos de U . Seja $T = (V, E)$ uma árvore dirigida e $\varphi: U \rightarrow V$. O par (T, φ) diz-se uma representação em árvore de \mathcal{F} se*

$$\mathcal{F} = \{S_{(x,y)} : (x,y) \in E\}$$

com

$$S_{(x,y)} = \{s \in U : \varphi(s) \text{ e } y \text{ estão na mesma componente conexa de } T - \{(x,y)\}\}. \quad (3.45)$$

Portanto, o par (T, φ) caracteriza o par (U, \mathcal{F}) . Por exemplo, consideremos $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ e sejam $T = (V, E)$ a árvore da Figura 3.9 que tem 8

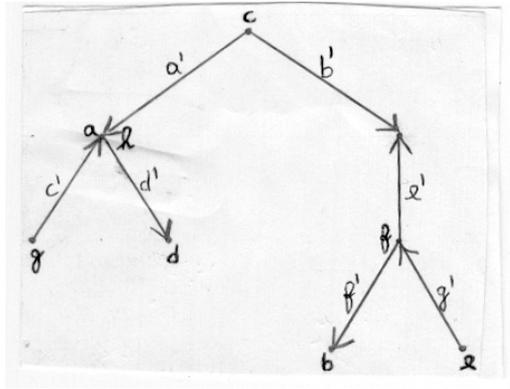


Figura 3.9: Ilustração de uma representação em árvore.

vértices e 7 arcos e $\varphi: U \rightarrow V$ que a Figura 3.9 sugere. Então, (T, φ) é uma representação em árvore de

$$\mathcal{F} = \{\{a, d, g, h\}, \{b, e, f\}, \{d\}, \{b\}, \{a, b, c, d, e, f, h\}, \{a, c, d, g, h\}, \{a, b, c, d, f, g, h\}\}.$$

porque

$$S_{a'} = \{a, d, g, h\}; \quad S_{b'} = \{b, e, f\}; \quad S_{d'} = \{d\};$$

$$S_{f'} = \{b\}; \quad S_{e'} = \{a, b, c, d, e, f, h\};$$

$$S_{c'} = \{a, c, d, g, h\} \quad \text{e} \quad S_{g'} = \{a, b, c, d, f, g, h\}$$

Teorema 31 *Seja U um conjunto finito não vazio e seja (T, φ) uma representação em árvore (T, φ) de uma família \mathcal{F} de subconjuntos de U . Então, o par (U, \mathcal{F}) é sem cruzamentos. Mais, se T é uma arborescência então o par (U, \mathcal{F}) é laminar.*

Prova: Por hipótese, $\mathcal{F} = \{S_e : e \in E(T)\}$. Sejam $S_e, S_f \in \mathcal{F}$ quaisquer com $e = (u, w)$ e $f = (x, y)$. Então,

$$S_e = \{s \in U : \varphi(s) \text{ e } w \text{ estão na mesma componente conexa de } T - e\} \quad \text{e}$$

$$S_f = \{s \in U : \varphi(s) \text{ e } w \text{ estão na mesma componente conexa de } T - f\}.$$

Queremos provar que S_e e S_f verificam (3.42). Seja P o caminho não dirigido em T de u para x . Temos os seguintes quatro casos: (1) $w, y \notin V(P)$; (2) $w \notin V(P)$, $y \in V(P)$ (3) $w \in V(P)$, $y \notin V(P)$ (4) $w, y \in V(P)$.

Se $w, y \notin V(P)$ então o único caminho não-dirigido em T de w para y usa ambos os arcos e e f . Por isso, $S_e \cap S_f = \emptyset$. Caso contrário, existiria um vértice que pertenceria simultaneamente à componente conexa de $T - e$ à qual w pertence, e à componente conexa de $T - f$ à qual w pertence. Isso implicaria a existência de um caminho alternativo de w para y , o que é absurdo!

Se $w \notin V(P)$ e $y \in V(P)$ então $S_e \subseteq S_f$. De facto, neste caso, P está totalmente contido na componente conexa de $T - f$ à qual y pertence. Por isso, existe um caminho de w para y totalmente contido nessa componente conexa. De facto, para todo o vértice v pertencente à componente conexa de $T - e$ à qual w pertence, existe um caminho não-dirigido em T de v para y que não passa por x . Esse caminho é constituído por um caminho de v para w (que existe pois v e w estão na mesma componente conexa em $T - e$), pelo arco (u, w) e pelo caminho P excluído do arco (x, y) . Como este caminho não contém x , então v e y estão na mesma componente conexa em $T - f$.

Se $w \in V(P)$ e $y \notin V(P)$ então $S_f \subseteq S_e$ pela razão análoga à invocada no parágrafo anterior.

Se $w, y \in V(P)$ então $S_e \cup S_f = U$. De facto, seja $s \in U$ qualquer e seja $v = \varphi(s)$. Se v pertence à componente de $T - e$ à qual w pertence, então $s \in S_e$. Caso contrário, existe um caminho de v para u que não usa o arco $e = (u, w)$ e, portanto, existe um caminho de v para y que não usa o arco (x, y) , que é constituído esse caminho de v para u acrescido do caminho P excluído do arco (x, y) . Por isso, v pertence à componente de $T - f$ à qual y pertence. Concluímos que $s \in S_f$. Em ambos os casos concluímos que $s \in S_e \cup S_f$.

Para a segunda parte da demonstração, vamos supor que T é uma arborecência para fora. Isto é, T é uma árvore dirigida tal que existe um vértice r com $\delta^-(r) = \emptyset$ e existe um caminho dirigido de r para todo o restante vértice.

Se $w, y \in V(P)$ então $r \notin V(P)$. Com efeito, se $r \in V(P)$ e $r \neq x$, então o sub-caminho não-dirigido de P de r para x usa o arco (x, y) que parte de x , e o caminho dirigido de r para x (que sabemos existir porque T é uma arborecência para fora) usa um arco dirigido para x . Estes dois caminhos são, pois, dois caminhos distintos de r para x em T , o que é absurdo porque T é uma árvore e, portanto, não existem ciclos. Se $r \in V(P)$ e $r = x$, então P é um caminho não-dirigido de r para u que usa o arco (u, w) que parte de u , e o caminho dirigido de r para u (que sabemos existir porque T é uma r -arborecência para fora) usa um arco dirigido para u . Estes dois caminhos são, pois, dois caminhos distintos de r para u em T , o que é absurdo.

Como $r \notin V(P)$, o caminho de r para x , o caminho de r para u e P definem um circuito, o que é absurdo porque T é uma árvore dirigida. \square

Teorema 32 *Seja \mathcal{F} uma família de subconjuntos de U . Se o par (U, \mathcal{F}) é sem cruzamentos então existe uma representação em árvore (T, φ) de (U, \mathcal{F}) . Mais, se (U, \mathcal{F}) é um par laminar então (T, φ) é uma arborescência para fora.*

Prova: Primeiro, consideremos que o par (U, \mathcal{F}) é laminar. Seja $V(T) = \mathcal{F} \cup \{r\}$ com r um vértice adicional, e seja

$$E = \{(r, X) : X \text{ é maximal em } \mathcal{F}\} \cup \{(X, Y) : \emptyset \neq Y \subset X \text{ e } \nexists Z \in \mathcal{F} : Y \subset Z \subset X\}$$

Por construção, $T = (V, E)$ é uma arborescência para fora. Seja $\varphi : U \rightarrow V$ definida por

$$\varphi(u) = \begin{cases} r & \text{se } \nexists X \subseteq \mathcal{F} : u \in X \\ X & \text{se } u \in X \text{ e } X \text{ é minimal em } \mathcal{F} \end{cases}$$

Consideremos, por exemplo, o par laminar (U, \mathcal{F}) com

$$\begin{aligned} U &= \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, l, m, n\} \text{ e} \\ \mathcal{F} &= \{\{a\}, \{b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \{e\}, \{f\}, \{d, f\}, \{d, e, f\}, \\ &\quad \{a, b, c, d, e, f, g\}, \{j\}, \{j, l\}, \{h, i\}, \{h, i, j, l, m\}\}. \end{aligned}$$

Então T é a árvore da Figura 3.10. Para ilustrar como se define a função φ ,

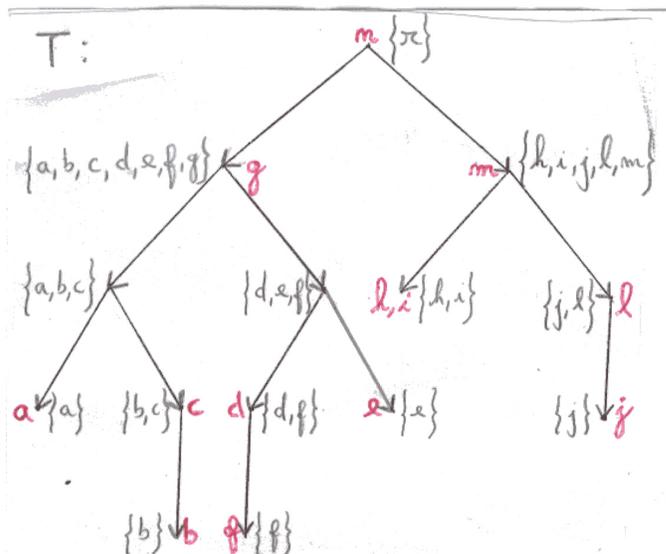


Figura 3.10: representação em árvore do par (U, \mathcal{F}) .

note-se, por exemplo, que $\{a, b, c, d, e, f, g\}$ e $\{j, l\}$ são os menores conjuntos que contêm g e l , resp. Logo, $\varphi(g) = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ e $\varphi(l) = \{j, l\}$. Seja $\mathcal{F}' = \{S_e : e \in E(T)\}$. Queremos mostrar que $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$. Antes de demonstrar a mútua inclusão entre \mathcal{F} e \mathcal{F}' , mostramos o seguinte: para todo $e = (., Z) \in E$, $S_e = Z$. De facto, seja $e = (., Z) \in E$. Então

$$\begin{aligned} S_e &= \{u \in U : \varphi(u) \text{ e } Z \text{ estão na mesma componente conexa em } T \setminus \{e\}\} \\ &= \{u \in U : \varphi(u) \subseteq Z\} \end{aligned}$$

por construção. Mostremos que $S_e \subseteq Z$: Seja $u \in S_e$. Então $\varphi(u) \subseteq Z$. Como $u \in \varphi(u) \subseteq Z$ então $u \in Z$. Mostremos que $Z \subseteq S_e$: seja $z \in Z$. Como \mathcal{F} é laminar, então verifica-se uma das seguintes hipóteses: $\varphi(z) \subseteq Z$ ou $Z \subseteq \varphi(z)$ ou $\varphi(z) \cap Z = \emptyset$. A última hipótese não se verifica porque $z \in \varphi(z) \cap Z$. Suponhamos que se verifica a segunda hipótese. Não pode ser $Z \subset \varphi(z)$ porque $\varphi(z)$ é o menor conjunto que contém z . Logo, será $Z = \varphi(z)$. Em qualquer dos casos, $\varphi(z) \subseteq Z$ e, por isso, $z \in S_e$.

Decorre imediatamente do parágrafo anterior que $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$. Reciprocamente, se $X \in \mathcal{F}$ então existe $e = (., X) \in E$. Pelo mesmo parágrafo, $S_e = X$, donde concluímos que $X \in \mathcal{F}'$.

Agora, suponhamos que o par (U, \mathcal{F}) é sem cruzamentos. Seja $a \in U$. Pelo Teorema 30,

$$\mathcal{F}' = \{X \in \mathcal{F} : a \notin X\} \cup \{U \setminus X : X \in \mathcal{F}, a \in X\},$$

é laminar. Pelo Teorema 30, $(U \setminus \{a\}, \mathcal{F}')$ tem uma representação em árvore (T, φ) que é uma arborescência cuja raiz rotularemos com a letra a . Para cada arco $e \in E(T)$ temos 3 casos: (i) $S_e \in \mathcal{F}$ e $U \setminus S_e \notin \mathcal{F}$; (ii) $S_e \notin \mathcal{F}$ e $U \setminus S_e \in \mathcal{F}$ e (iii) $S_e \in \mathcal{F}$ e $U \setminus S_e \in \mathcal{F}$. No caso (i), não fazemos nada. No caso (ii), substituímos o arco $e = (x, y)$ pelo arco (y, x) . No caso (iii), substituímos o arco $e = (x, y)$ por dois arcos (z, x) e (z, y) em que z é um novo vértice. Obtemos assim uma nova árvore $T^* = (V^*, E^*)$ e uma função $\varphi^* : U \rightarrow V^*$ em que a restrição de φ^* a $U \setminus \{a\}$ é φ e $\varphi(a)$ é o vértice em V^* correspondente à raiz de T . Consideremos o par (T^*, φ^*) . Seja $\mathcal{F}^* = \{S_{(x,y)}^* : (x, y) \in E(T^*)\}$.

Seja $e^* = (x, y) \in E(T^*)$. Por construção de T^* a partir de T , verifica-se apenas um dos seguintes 4 casos:

- (a). $e \equiv (x, y) \in E(T)$;
- (b). $e \equiv (y, x) \in E(T)$;
- (c). $e \equiv (y', y) \in E(T)$ e $x \notin V(T)$ com $(x, y') \in \delta_{T^*}^+(x) \setminus \{(x, y)\}$;

(d). $e \equiv (y, y') \in E(T)$ e $x \notin V(T)$ com $(x, y') \in \delta_{T^*}^+(x) \setminus \{(x, y)\}$.

Então $y \in V(T) \cap V(T^*)$. Os elementos de U que rotulam os vértices da componente conexa \mathcal{C}_1 que contém y em $T \setminus \{e\}$ e os elementos de U que rotulam os vértices da componente conexa \mathcal{C}_2 que contém y em $T \setminus \{e^*\}$ são os mesmos. Com efeito, por construção de T^* a partir de T , todos os vértices de \mathcal{C}_1 estão em \mathcal{C}_2 . Além disso, os vértices de \mathcal{C}_2 que não estão em \mathcal{C}_1 são vértices não rotulados em U . Logo,

$$S_{(x,y)}^* = \begin{cases} S_{(x,y)} & \text{se (a) verifica-se.} \\ U \setminus S_{(y,x)} & \text{se (b) verifica-se.} \\ S_{(y',y)} & \text{se (c) verifica-se.} \\ U \setminus S_{(y,y')} & \text{se (d) verifica-se.} \end{cases} \quad (3.46)$$

Queremos mostrar que $\mathcal{F}^* = \mathcal{F}$. Provemos que $\mathcal{F}^* \subseteq \mathcal{F}$. Seja $S_{(x,y)}^* \in \mathcal{F}^*$. Se $(x, y) \in E(T)$ então, por construção de T^* , estamos no caso (i). Portanto, $S_{(x,y)} \in \mathcal{F}$ e $U \setminus S_{(x,y)} \in \mathcal{F}$. Por (3.46), $S_{(x,y)}^* = S_{(x,y)}$, logo $S_{(x,y)}^* \in \mathcal{F}$. Se $(y, x) \in E(T)$ então, por construção de T^* , estamos no caso (ii), ou seja, $S_{(y,x)} \notin \mathcal{F}$ e $U \setminus S_{(y,x)} \in \mathcal{F}$. Por (3.46), $S_{(x,y)}^* = U \setminus S_{(y,x)}$, logo $S_{(x,y)}^* \in \mathcal{F}$. Se $x \notin V(T)$ e $(y', y) \in E(T)$ (ou $(y, y') \in E(T)$) com $(x, y') \in \delta_{T^*}^+(x) \setminus \{(x, y)\}$, então, por construção de T^* , estamos no caso (iii), ou seja, $S_{(y',y)} \in \mathcal{F}$ ($S_{(y,y')} \in \mathcal{F}$, resp.) e $U \setminus S_{(y',y)} \in \mathcal{F}$ ($U \setminus S_{(y,y')} \in \mathcal{F}$, resp.). Por (3.46), $S_{(x,y)}^* = S_{(y',y)}$ ($S_{(y',y)}$, resp.), logo $S_{(x,y)}^* \in \mathcal{F}$.

Provemos que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}^*$. Seja $X \in \mathcal{F}$. Se $a \notin X$ então $X \in \mathcal{F}'$. Logo $X = S_{(x,y)}$ para determinado $(x, y) \in E(T)$. Em relação a $S_{(x,y)}$ pode-se verificar (i), (ii) ou (iii). Mas é óbvio que (ii) não se verifica porque $S_{(x,y)} \in \mathcal{F}$. Se se verificar (i), então, por construção de T^* , $(x, y) \in E(T^*)$. Por (3.46), $S_{(x,y)}^* = S_{(x,y)} = X$. Logo $X \in \mathcal{F}^*$. Se se verificar (iii), então, por construção de T^* , existe $z \in V(T^*) \setminus V(T)$ tal que $(z, x), (z, y) \in E(T^*)$. Por (3.46), $S_{(z,y)}^* = S_{(x,y)} = X$. Logo $X \in \mathcal{F}^*$.

Se $a \in X$ então $U \setminus X \in \mathcal{F}'$. Logo $U \setminus X = S_{(x,y)}$ para determinado $(x, y) \in E(T)$. Em relação a $S_{(x,y)}$ pode-se verificar (i), (ii) ou (iii). Mas é óbvio que (i) não se verifica porque $U \setminus S_{(x,y)} = X \in \mathcal{F}$. Se se verificar (ii), então, por construção de T^* , $(y, x) \in E(T^*)$. Por (3.46), $S_{(x,y)}^* = U \setminus S_{(x,y)} = X$. Logo $X \in \mathcal{F}^*$. Se se verificar (iii), então, por construção de T^* , existe $z \in V(T^*) \setminus V(T)$ tal que $(z, x), (z, y) \in E(T^*)$. Por (3.46), $S_{(z,x)}^* = U \setminus S_{(x,y)} = X$. Logo $X \in \mathcal{F}^*$. \square

O próximo teorema mostra que toda a matriz de rede é uma matriz de incidência de cortes nos dois sentidos. O teorema a seguir mostra que o recíproco apenas é verdade para alguns casos particulares de matrizes de incidência de cortes nos dois sentidos. Logo, a classe das matrizes de incidência de cortes nos dois sentidos é mais geral do que a classe das matrizes de rede.

Teorema 33 *Se M é a matriz de rede gerada por um digrafo $G = (V, E)$ e uma árvore dirigida $T = (V, E_0)$ então M é matriz de incidência de cortes nos dois sentidos de uma família $\mathcal{F} \subseteq 2^V$ relativamente a G tal que (V, \mathcal{F}) é um par sem cruzamentos.*

Prova: Seja \mathcal{F} a família de subconjuntos de V representada em árvore por (T, id) . A matriz de incidência de cortes nos dois sentidos de $\mathcal{F} = \{S_{(x,y)} : (x, y) \in E_0\}$, onde $S_{(x,y)} \subseteq V$ é o conjunto de vértices que estão com y na mesma componente conexa de $T - \{(x, y)\}$, é uma matriz M' com $|E_0|$ linhas e $|E|$ colunas, sendo cada elemento genérico $M'_{S_{(x,y)}e}$, para algum $(x, y) \in E_0$ e $e \in E$, definido por

$$M'_{S_{(x,y)}e} = \begin{cases} +1 & \text{se } e \in \delta^-(S_{(x,y)}) \\ -1 & \text{se } e \in \delta^+(S_{(x,y)}) \\ 0 & \text{se } e \notin \delta^-(S_{(x,y)}) \cup \delta^+(S_{(x,y)}) \end{cases}$$

Mas, de acordo com o Teorema 25, esta caracterização de M' coincide com M . Fica demonstrado o Teorema. \square

Concluimos que toda matriz de rede é uma matriz de incidência de cortes nos dois sentidos. O próximo teorema mostra que o recíproco é verdadeiro nalguns casos.

Teorema 34 *Seja $G = (V, E)$ um digrafo e $\mathcal{F} \subseteq 2^V$ tal que o par (V, \mathcal{F}) é sem cruzamentos. A matriz M de incidência de cortes nos dois sentidos de \mathcal{F} é a matriz de rede gerada pela árvore $T = (V', E_0)$, em que T é a árvore dirigida do par (T, φ) que representa (V, \mathcal{F}) , e pelo digrafo $G' = (V', E')$ com*

$$E' = \{(\varphi(v), \varphi(w)) : (v, w) \in E\}.$$

Prova: Como $T = (V', E_0)$ é a árvore dirigida do par (T, φ) que representa (V, \mathcal{F}) , então $\mathcal{F} = \{S_{(x,y)} : (x, y) \in E_0\}$ com

$$S_{(x,y)} \equiv \{s \in V : \varphi(s) \text{ e } y \text{ estão na mesma componente conexa de } T - \{(x, y)\}\}.$$

Assim sendo, a matriz de incidência de cortes nos dois sentidos de \mathcal{F} relativamente a $G = (V, E)$ é uma matriz com $|\mathcal{F}|$ linhas e $|E|$ colunas, sendo cada elemento genérico $M_{S_{(x,y)}e}$, com $S_{(x,y)} \in \mathcal{F}$ e $e = (v, w) \in E$, definido por

$$M_{S_{(x,y)}e} = \begin{cases} 1 & \text{se } e \in \delta^-(S_{(x,y)}) \\ -1 & \text{se } e \in \delta^+(S_{(x,y)}) \\ 0 & \text{se } e \notin \delta^-(S_{(x,y)}) \cup \delta^+(S_{(x,y)}) \end{cases} \quad (3.47)$$

A matriz de rede gerada por $T = (V', E_0)$ e $G' = (V', E')$ é uma matriz com $|E_0| = |\mathcal{F}|$ linhas e $|E'| = |E|$ colunas, sendo cada elemento genérico $M'_{(x,y),a}$ com $(x, y) \in E_0$ e $a \in E'$, definido, pelo Teorema 25, por

$$M_{(x,y),a} = \begin{cases} +1 & \text{se } a \in \delta^-(S'_{(x,y)}); \\ -1 & \text{se } a \in \delta^+(S'_{(x,y)}); \\ 0 & \text{se } a \notin \delta^-(S'_{(x,y)}) \cup \delta^+(S'_{(x,y)}), \end{cases} \quad (3.48)$$

com $S'_{(x,y)} \subseteq V'$ o conjunto de vértices que estão com y na mesma componente conexa de $T - \{(x, y)\}$. Portanto, dados $s \in V$ e $(x, y) \in E_0$, temos que $s \in S'_{(x,y)}$ se e só se $\varphi(s) \in S'_{(x,y)}$. Sejam $(x, y) \in E_0$ e $e = (v, w) \in E$ quaisquer. Por (3.47), se $e = (v, w) \in \delta^-(S_{(x,y)})$ então $M_{S_{(x,y)},e} = 1$. Como $(v, w) \in \delta^-(S_{(x,y)})$ então $v \notin S_{(x,y)}$ e $w \in S_{(x,y)}$, ou seja, $\varphi(v) \notin S'_{(x,y)}$ e $\varphi(w) \in S'_{(x,y)}$, ou seja ainda, $(\varphi(v), \varphi(w)) \in \delta^-(S'_{(x,y)})$. Por (3.48), $M'_{(x,y),(\varphi(v),\varphi(w))} = 1$, o que implica que $M_{S_{(x,y)},(v,w)} = M'_{(x,y),(\varphi(v),\varphi(w))}$. De igual modo, se $(v, w) \in \delta^+(S_{(x,y)})$ ou se $(v, w) \notin \delta^-(S_{(x,y)}) \cup \delta^+(S_{(x,y)})$, concluiríamos que $M_{S_{(x,y)},(v,w)} = M'_{(x,y),(\varphi(v),\varphi(w))}$. Logo $M = M'$. \square

Teorema 35 *Seja $G = (V, E)$ um grafo dirigido e (V, \mathcal{F}) um par sem cruzamentos. Então,*

- (a). *a matriz de incidência de cortes nos dois sentidos de \mathcal{F} é Totalmente Unimodular.*
- (b). *se \mathcal{F} é laminar então a matriz de incidência de cortes num sentido de \mathcal{F} é Totalmente Unimodular.*

Prova: A parte 1 deste teorema é consequência dos Teoremas 34 e 28. Provemos a parte 2. Seja \mathcal{F} uma família de subconjuntos de X laminar. Vamos usar o Teorema de Ghouila-Houri. Seja $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{F}$ o conjunto de todos os índices de linha de uma qualquer coleção de linhas de M . Queremos provar que existe uma partição \mathcal{R}_1 e \mathcal{R}_2 de \mathcal{R} tal que a soma das linhas indexadas por \mathcal{R}_1 menos a soma das linhas indexadas por \mathcal{R}_2 é um vector-linha de zeros, uns e menos uns. Consideremos a representação em árvore (T, φ) de \mathcal{R} , em que T é uma r -arborescência (ver Teorema 32). Com a notação da Definição 12, $\mathcal{R} = \{S_e, e \in E(T)\}$. Seja

$$\mathcal{R}_1 = \{S_{(v,w)} \in \mathcal{R} : \text{dist}_T(r, w) \text{ é par}\} \quad \text{e} \quad \mathcal{R}_2 = \mathcal{R} \setminus \mathcal{R}_1$$

Por exemplo, se retomarmos o exemplo da Figura 3.10,

$$\mathcal{R}_1 = \{\{a, b, c\}, \{d, e, f\}, \{h, i\}, \{j, l\}, \{b\}, \{f\}\} \quad \text{e}$$

$$\mathcal{R}_2 = \{\{a, b, c, d, e, f, g\}, \{h, i, j, l, m\}, \{a\}, \{b, c\}, \{d, f\}, \{e\}, \{j\}\}.$$

Para qualquer $f \in E(G)$

$$\begin{aligned} & \sum_{X \in R_1} m_{X,f} - \sum_{X \in R_2} m_{X,f} = \\ & = |\{X \in R_1 : m_{X,f} = 1\}| - |\{X \in R_2 : m_{X,f} = 1\}| \\ & = |\{X \in R_1 : f \in \delta_G^-(X)\}| - |\{X \in R_2 : f \in \delta_G^-(X)\}| \end{aligned} \quad (3.49)$$

Como existe uma bijeção entre os elementos de $\mathcal{R} = \{S_e, e \in E(T)\}$ e os arcos $e \in E(T)$ que os identificam, (3.49) é igual a

$$\begin{aligned} & |\{e = (v, w) \in E(T) : f \in \delta_G^-(S_e) \text{ e } \text{dist}_T(r, w) \text{ é par}\}| - \\ & |\{e = (v, w) \in E(T) : f \in \delta_G^-(S_e) \text{ e } \text{dist}_T(r, w) \text{ é ímpar}\}| \end{aligned} \quad (3.50)$$

Para cada arco $f = (s, t) \in E(G)$, os arcos $e \in E(T)$ com $f \in \delta^-(S_e)$, pelo Teorema 34, formam o conjunto, digamos P_f , dos arcos do caminho C não-dirigido em T de s para t que são atravessados por C no sentido certo. Como T é uma arborescência, P_f é um sub-caminho dirigido de C (que parte de s). Então (3.50) é igual a

$$\begin{aligned} & |\{e = (v, w) \in E(P_f) : \text{dist}_T(r, w) \text{ é par}\}| - \\ & |\{e = (v, w) \in E(P_f) : \text{dist}_T(r, w) \text{ é ímpar}\}| \end{aligned}$$

que pertence a $\{-1, 0, 1\}$. Concluimos que $\sum_{X \in R_1} m_{X,f} - \sum_{X \in R_2} m_{X,f} \in \{-1, 0, 1\}$, o que prova a parte 2 deste Teorema. \square

Seja X um conjunto qualquer e seja $\mathcal{F} \subseteq 2^X$. A matriz de incidência de \mathcal{F} em relação a X é uma matriz M com $|X|$ linhas e $|\mathcal{F}|$ colunas, sendo cada elemento genérico M_{xF} com $x \in X$ e $F \in \mathcal{F}$, definido por

$$M_{xF} = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in F \\ 0 & \text{se } x \notin F \end{cases}$$

Teorema 36 *Se \mathcal{F} é a reunião de duas famílias laminares de subconjuntos de um mesmo conjunto X então, a matriz de incidência de \mathcal{F} em relação a X é Totalmente Unimodular.*

Prova: Seja M a a matriz de incidência de $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ em relação a X e seja Q uma qualquer submatriz quadrada de M de dimensão n . Se Q tem dimensão dois então $\det(Q) \in \{0, \pm 1\}$ porque Q é uma matriz de zeros e uns.

Agora, suponhamos que Q tem dimensão superior a dois e consideremos duas quaisquer colunas de Q indexadas por $C_1, C_2 \in \mathcal{F}$ tais que C_1, C_2 pertencem à

mesma família, \mathcal{F}_1 ou \mathcal{F}_2 . Consideremos, distintamente, os três casos: $C_1 \subseteq C_2$, $C_2 \subseteq C_1$ e $C_1 \cap C_2 = \emptyset$.

Se $C_1 \subseteq C_2$ então, se substituirmos a coluna C_2 por $C_2 - C_1$ não alteramos o sinal do determinante de Q e a nova coluna é vector incidência do conjunto $C_2 \setminus C_1$, que é ortogonal com a coluna indexada por C_1 .

Repetimos este procedimento para todos os pares de colunas indexados por conjuntos pertencentes à mesma família. No final, obtemos uma matriz \hat{Q} tal que $|\det(\hat{Q})| = |\det(Q)|$ e tal que as colunas indexadas por elementos \mathcal{F}_1 (resp., \mathcal{F}_2) são ortogonais duas a duas. Logo, cada linha de \hat{Q} tem no máximo um 1 nas colunas indexadas por elementos de \mathcal{F}_1 e também tem no máximo um 1 nas colunas indexadas por elementos de \mathcal{F}_2 .

Por isso, para toda a coleção de colunas J da matriz \hat{Q} é possível encontrar um partição

$$J = (J_1 \equiv \{C \in J: C \in \mathcal{F}_1\}) \cup (J_2 \equiv \{C \in J: C \in \mathcal{F}_2\})$$

tal que

$$\sum_{j \in J_1} \hat{Q}_{ij} - \sum_{j \in J_2} \hat{Q}_{ij} \in \{-1, 0, 1\},$$

para toda a linha i da matriz \hat{Q} . Pelo Teorema 15 (de Ghouila-Houri), \hat{Q} é TU. Por isso, $\det Q = |\det(\hat{Q})| \in \{0, \pm 1\}$ e, portanto, M é TU. \square

O resultado anterior não é válido se \mathcal{F} é a reunião de três famílias laminares \mathcal{F}_1 , \mathcal{F}_2 e \mathcal{F}_3 . Com efeito, se considerarmos $X = \{a, b, c\}$,

$$\mathcal{F}_1 = \{\{a, b\}\}, \quad \mathcal{F}_2 = \{\{a, c\}\}, \quad \mathcal{F}_3 = \{\{b, c\}\}$$

e $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \mathcal{F}_3 = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$, então \mathcal{F}_1 , \mathcal{F}_2 e \mathcal{F}_3 são, obviamente, famílias laminares de subconjuntos de X . A matriz de incidência de \mathcal{F} em relação a X é a matriz

$$M \equiv \begin{array}{ccc|c} \{a, b\} & \{a, c\} & \{b, c\} & \\ \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right] & & & \begin{array}{l} a \\ b \\ c \end{array} \end{array}$$

A matriz M não é TU porque, por exemplo, $\det(M) = -2$.

Capítulo 4

Neste capítulo descrevemos um algoritmo para reconhecimento de uma matriz Totalmente Unimodular que funciona em tempo polinomial. Isto é, dada uma matriz de zeros, uns e menos uns, o algoritmo averigua se essa matriz é ou não Totalmente Unimodular.

Se M é uma matriz Totalmente Unimodular então, pelo Teorema de Seymour, verifica-se pelo menos um dos seguintes casos:

- (a). M ou M^T é uma matriz de rede;
- (b). M é uma das duas matrizes (3.1), possivelmente após trocas de linhas e colunas ou multiplicação de linhas e colunas por -1 ;
- (c). M tem uma linha ou uma coluna com, no máximo, uma entrada não-nula, ou M tem duas linhas ou duas colunas iguais ou simétricas;
- (d). A menos de trocas de linhas e/ou colunas,

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \quad (4.1)$$

satisfazendo

$$\rho(B) + \rho(C) \leq 2, \quad n(A) + m(A) \geq 4, \quad n(D) + m(D) \geq 4. \quad (4.2)$$

Por isso, um algoritmo para o reconhecimento da Unimodularidade Total de uma matriz M de zeros, uns e menos uns baseia-se nas seguintes observações. Primeiro, eliminar linhas ou colunas redundantes para que M não verifique (c). Isto não altera o facto de M ser TU ou não. Depois, averiguar se M satisfaz (b). Se sim então, M é TU. Caso contrário, M é TU se e só se (a) ou (d) se verificam.

Nesta secção descreveremos também um algoritmo para reconhecimento de uma matriz de rede. O algoritmo, que permitirá averiguar (a), baseia-se no seguinte. Seja M uma matriz de zeros, uns e menos uns, e dimensão $m \times n$. Se

todas as colunas de M têm no máximo dois elementos não nulos então averiguar se M é uma matriz de rede ou não é equivalente se um determinado grafo é bipartido. Se M tem alguma coluna com pelo menos três entradas não-nulas, então M é de rede se e só se existe um grafo desconexo de entre m adequados grafos, um outro adequado grafo é bipartido e, ainda, se adequadas submatrizes de M são também de rede. Isto é, essencialmente, uma caracterização recursiva das matrizes de rede. A averiguação da conexidade e da bipartição de grafos não-dirigidos são duas tarefas que podem ser realizadas em tempo polinomial. O algoritmo de reconhecimento de uma matriz de rede funciona em tempo polinomial.

Averiguar se M satisfaz (d) é equivalente a resolver $\mathcal{O}((m+n)^8)$ problemas de intersecção de matróides do tipo

$$\begin{aligned} \min \quad & \rho(Y) + \rho(X \setminus Y) \\ \text{s.a.} \quad & S \subseteq Y \subseteq X \setminus T \end{aligned} \tag{4.3}$$

para $S, T \subseteq X \equiv [I \ M]$ fixos. O problema da intersecção de dois matróides pode ser resolvido em tempo polinomial por um algoritmo proposto por Edmonds (Cunningham & Edmonds, 1980). Contudo, descreveremos um algoritmo que resolva directamente o problema, usando matrizes, conforme está descrito em (Schrijver, 1986). Este algoritmo também funciona em tempo polinomial.

Portanto, a averiguação de (a) e (d) pode ser feita em tempo polinomial. Se (a) verificar-se então M é TU. No caso de nem (a) nem (d) se verificarem então M não é TU. No caso de (a) não se verificar mas (d) verificar-se então M é TU se e só se duas adequadas matrizes, mais pequenas que M , são TU. Por isso, aplicamos recursivamente o procedimento de reconhecimento da Unimodularidade Total. Isto constitui o algoritmo. Mostraremos que o algoritmo funciona em tempo polinomial.

4.1 Reconhec. de uma matriz de rede

O objectivo deste capítulo é encontrar um algoritmo para reconhecer matrizes TU. Nesta secção, vamos mostrar que existe um algoritmo polinomial para reconhecer uma classe particular de matrizes TU, que são as matrizes de rede. Este algoritmo será incorporado num algoritmo de reconhecimento da Unimodularidade Total, que descreveremos mais adiante.

com no máximo duas entradas não-nulas por coluna

Propriedade 9 *Seja A uma matriz de zeros, uns e menos uns. Se A é uma matriz com no máximo um $+1$ e no máximo um -1 em cada coluna, então A é uma matriz de rede.*

Prova: Suponhamos que A é uma matriz $m \times n$ e construa-se o grafo $G = (V, E)$ seguinte. O conjunto de vértices é $V = \{0, 1, 2, \dots, m\}$ e o conjunto de arcos é $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ tais que, para cada $j = 1, 2, \dots, m$,

$$\begin{aligned} e_j \equiv (i, 0) &\iff a_{ij} = -1 \text{ e } a_{kj} = 0, \text{ para todo } k \neq i \\ e_j \equiv (0, i) &\iff a_{ij} = +1 \text{ e } a_{kj} = 0, \text{ para todo } k \neq i \\ e_j \equiv (i, k) &\iff a_{ij} = -1, a_{kj} = +1 \end{aligned}$$

Vamos mostrar que A é a matriz de rede gerada pelo grafo G e pela árvore dirigida $T = (V, E_0)$, onde $E_0 = \{(0, 1), (0, 2), \dots, (0, m)\}$, por esta ordem.

Seja j um qualquer índice de coluna da matriz A e seja e_j o respectiva arco no grafo G . Se $e_j = (i, 0)$ então observamos que a j -ésima coluna de A é o vector característico do caminho em T de i para 0 . Se $e_j = (0, i)$ então observamos que a j -ésima coluna de A é o vector característico do caminho em T de 0 para i . Se $e_j = (i, k)$ então observamos que a j -ésima coluna de A é o vector característico do caminho em T de i para k . Concluimos que A é a matriz de rede gerada por G e T . \square

Portanto, pela Propriedade 9 e pelo Teorema 28, se A é matriz de incidência vértice-arco de um digrafo, então A é TU. Este resultado também pode ser demonstrado através do Teorema de Ghouila-Houri.

Teorema 37 *Seja A uma matriz de zeros, uns e menos uns, com, no máximo, dois elementos não-nulos por coluna. Então, A é TU se e só se A é uma matriz de rede.*

Prova: Uma das implicações decorre do Teorema 28. Para provar a outra implicação, suponhamos que A é TU e sejam I, J os conjuntos dos índices de

linha e de coluna de A , resp. Pelo Teorema de Ghouila-Houri, existe uma partição (I^+, I^-) de I tal que

$$\sum_{i \in I^+} a_{ij} - \sum_{i \in I^-} a_{ij} \in \{-1, 0, 1\} \quad (j \in J). \quad (4.4)$$

Seja A' a matriz que resulta de A após multiplicar por -1 todas as linhas $i \in I^-$. Por (4.4),

$$\sum_{i \in I^+} a'_{ij} + \sum_{i \in I^-} a'_{ij} = \sum_{i \in I^+} a_{ij} + \sum_{i \in I^-} (-a_{ij}) \in \{-1, 0, 1\} \quad (j \in J). \quad (4.5)$$

Seja j uma qualquer coluna de A' com exactamente duas entradas não-nulas, $a'_{i_1j}, a'_{i_2j} \in \{-1, 1\}$. Então, por (4.5),

$$\sum_{i \in I^+} a'_{ij} + \sum_{i \in I^-} a'_{ij} = a'_{i_1j} + a'_{i_2j} = 0 \quad (4.6)$$

isto é, a'_{i_1j} e a'_{i_2j} são simétricos. Pela Propriedade 9, A' é uma matriz de rede e, pela Propriedade 4, A também é matriz de rede. \square

Teorema 38 *Seja A uma matriz de zeros, uns e menos uns, tal que cada coluna contém no máximo duas entradas não-nulas. Então, A é uma matriz TU se e só se um adequado grafo não-dirigido G é bipartido.*

Prova: Primeiro, definimos o grafo $G = (V, E)$. Sejam I e J os conjuntos dos índices das linhas e das colunas de A , resp. O conjunto dos vértices V é definido por

$$V = V_1 \cup V_2$$

onde $V_1 = \{v_i : i \in I\}$ e $V_2 = \{v_{i,k} : i, k \in I, i < k\}$. O conjunto das arestas E é definido por

$$E = E_1 \cup E_2$$

onde, para todo $i, k \in I$, com $i < k$,

$$\begin{aligned} \{v_i, v_k\} \in E_1 &\iff \text{existe } j \in J \text{ tal que } a_{ij}a_{kj} = +1 \\ \{v_i, v_{ik}\}, \{v_k, v_{ik}\} \in E_2 &\iff \text{existe } j \in J \text{ tal que } a_{ij}a_{kj} = -1 \end{aligned}$$

Note-se que, no segundo caso, $(v_i, \{v_i, v_{ik}\}, v_{ik}, \{v_{ik}, v_k\}, v_k)$ é um caminho em G de v_i para v_k de comprimento 2.

(\Leftarrow) Suponhamos que $G = (V, E)$ é bipartido e seja (V^+, V^-) uma bipartição de V . Vamos mostrar que A é TU usando o Teorema de Ghouila-Houri. Seja $K \subseteq I$ qualquer e seja (K^+, K^-) uma partição de K definida por

$$K^+ = \{i \in K : v_i \in V^+\}, \quad K^- = \{i \in K : v_i \in V^-\}.$$

Seja j uma qualquer coluna de $A[K]$. Se a coluna j possui um, ou menos, elemento não nulo então

$$\sum_{i \in K^+} a_{ij} - \sum_{i \in K^-} a_{ij} \in \{0, \pm 1\}. \quad (4.7)$$

verifica-se trivialmente. Por isso, suponhamos que a coluna j possui duas componentes não-nulas, a_{ij} e a_{kj} . Então,

$$\sum_{i \in K^+} a_{ij} - \sum_{i \in K^-} a_{ij} = \left\{ \begin{array}{ll} a_{ij} + a_{kj} & \text{se } i \in K^+, k \in K^+ \\ -a_{ij} - a_{kj} & \text{se } i \in K^-, k \in K^- \\ a_{ij} - a_{kj} & \text{se } i \in K^+, k \in K^- \\ -a_{ij} + a_{kj} & \text{se } i \in K^-, k \in K^+ \end{array} \right\} \in \{0, \pm 2\} \quad (4.8)$$

Suponhamos que $i, k \in K^+$ ou $i, k \in K^-$. Como G é bipartido, não existe nenhuma aresta que una v_i e v_k . Decorre da definição, que a_{ij} e a_{kj} são de sinais contrários e, por isso, nestes dois casos, (4.8) é igual a zero. Suponhamos, agora, que $i \in K^+, k \in K^-$ ou $i \in K^-, k \in K^+$. Se a_{ij} e a_{kj} tivessem sinais contrários, existiria um caminho em G de $v_i \in V^+$ (V^-) para $v_k \in V^-$ (V^+ , resp.) de comprimento 2, o que é absurdo porque G é bipartido. Por isso, a_{ij} e a_{kj} têm o mesmo sinal, pelo que (4.8) é igual a zero. Portanto, (4.8) é sempre zero e, por isso, (4.7) decorre. Concluimos que (4.7) verifica-se para toda a coluna j de A . Da arbitrariedade de $K \subseteq I$ concluimos, através do Teorema de Ghouila-Houri, que A é TU.

(\Rightarrow) Suponhamos que A é TU. Vamos mostrar que G é bipartido. Pelo Teorema de Ghouila-Houri, existe uma partição (I^+, I^-) de I tal que

$$\sum_{i \in I^+} a_{ij} - \sum_{i \in I^-} a_{ij} \in \{0, \pm 1\}, \quad (j \in J) \quad (4.9)$$

Note-se que este somatório é sempre constituído por apenas 0,1 ou 2 parcelas não-nulas. Consideremos a bipartição $(V^+ \equiv V_1^+ \cup V_2^+, V^- \equiv V_1^- \cup V_2^-)$ de V , definida por

$$\begin{aligned} V_1^+ &= \{v_i \in V_1 : i \in I^+\}, & V_1^- &= \{v_i \in V_1 : i \in I^-\}; \\ V_2^+ &= \{v_{ik} \in V_2 : i, k \in I^-, i < k\}, & V_2^- &= V_2 \setminus V_2^+. \end{aligned}$$

Seja $e \in E$ qualquer. Esta aresta e é de um de entre três tipos:

- (i) $e \equiv \{v_i, v_k\}$, com $i, k \in I$.
- (ii) $e \equiv \{v_i, v_{ik}\}$, com $i, k \in I$, $i < k$.
- (iii) $e \equiv \{v_k, v_{ik}\}$, com $i, k \in I$, $i < k$.

No caso (i), e por definição, existe $j \in J$ tal que $a_{ij}a_{kj} = +1$, isto é, a_{ij} e a_{kj} têm o mesmo sinal. Atendendo a (4.9), i e k estão em conjuntos diferentes na bipartição (I^+, I^-) de I . Como $e = \{v_i, v_k\}$, concluímos que $(v_i \in V_1^+ \text{ e } v_k \in V_1^-)$ ou $(v_i \in V_1^- \text{ e } v_k \in V_1^+)$. Por isso, $e \in \delta(V^+)$. No caso (ii), e por definição, existe $j \in J$ tal que $a_{ij}a_{kj} = -1$, isto é, a_{ij} e a_{kj} têm sinais contrários. Atendendo a (4.9), i e k estão no mesmo conjunto na bipartição (I^+, I^-) de I . Como $e = \{v_i, v_{ik}\}$, concluímos que $(v_i \in V_1^+ \text{ e } v_{ik} \in V_2^-)$ ou $(v_i \in V_1^- \text{ e } v_{ik} \in V_2^+)$. Por isso, $e \in \delta(V^+)$. No caso (iii), também se demonstra, de forma análoga ao caso (ii), que $e \in \delta(V^+)$. Concluímos que $E \subseteq \delta(V^+)$, pelo que G é bipartido. \square

Este resultado permite concluir que existe um algoritmo polinomial para averiguar se uma matriz A nas condições do Teorema 38 é TU, ou de rede uma vez que estes dois conceitos são equivalentes nas condições do Teorema 37. Basta averiguar se um determinado grafo não-dirigido é ou não bipartido, grafo esse cujos números de vértices e de arestas dependem apenas do número de linhas e do número de colunas da matriz A .

com alguma coluna com pelo menos três entradas não-nulas

Seja A uma matriz de zeros, uns e menos uns. Denote-se por I, J os conjuntos dos índices de linha e de coluna de A . Podemos supôr que cada linha i de A está associada a um arco distinto a'_i de uma indeterminada árvore $T = (V, E_0)$. Também podemos supôr que cada coluna j de A está associada a um arco a_j de um indeterminado digrafo $G = (V, E)$ que partilha o conjunto de vértices com T .

Uma tal matriz A será uma matriz de rede se existir T e existir G tal que A seja matriz de rede gerada por G e por T . Por exemplo, A terá de ser tal que cada coluna j de A , associada a um arco $a_j \equiv (v, w)$ de G , define o vector característico do caminho em T de v para w . No próximo desenvolvimento vamos supôr que a matriz A possui pelo menos uma coluna com, no mínimo, três entradas não-nulas pois, caso contrário, estaríamos nas condições dos Teoremas 37 e 38.

Condição Necessária

Vamos começar por definir uma condição necessária para que uma matriz A de zeros, uns e menos uns, seja uma matriz de rede. Suponhamos que A é a matriz de rede gerada por um determinado digrafo $G = (V, E)$ e por uma determinada

árvore dirigida $T = (V, E_0)$ e possui pelo menos uma coluna com, no mínimo, três entradas não-nulas.

Considere-se o grafo simples não-dirigido G_i , definido para cada $i \in I$ do seguinte modo: o conjunto dos vértices é $I \setminus \{i\}$ e o conjunto das arestas é definido do seguinte modo: $\{p, q\}$ é uma aresta de G_i se que existir algum $j \in J$ tal que $a_{ij} = 0$ e $a_{pj}a_{qj} \neq 0$. Dito de outro modo, $\{p, q\}$ é uma aresta de G_i se existir um arco $a_j \equiv (v, w)$ de G tal que o caminho em T de v para w usa os arcos a'_p, a'_q mas não usa o arco a'_i . Note-se que, em particular, se $\{p, q\}$ é aresta de G_i então a'_p e a'_q pertencem à mesma componente conexa de $T - a'_i$.

Por hipótese, existe em T um caminho de comprimento maior ou igual que três. Sejam a'_j, a'_i, a'_k três arcos distintos desse caminho com a'_i o arco intermédio e, portanto, a'_j e a'_k pertencem a componentes conexas diferentes em $T - a'_i$, que são duas. Suponhamos, por absurdo, que existe em G_i um caminho de $j \equiv v_0$ para $k \equiv v_r$, definido por

$$v_0(e_1)v_1(e_2)v_2 \cdots v_{r-1}(e_r)v_r.$$

Como $e_1 \equiv \{v_0, v_1\}$ é uma aresta de G_1 então a'_{v_0} e a'_{v_1} pertencem à mesma componente conexa em $T - a'_i$. Indutivamente,

$$a'_{v_0}, a'_{v_1}, \dots, a'_{v_{r-1}}, a'_{v_r}$$

pertencem à mesma componente conexa em $T - a'_i$. Em particular, a'_j e a'_k pertencem à mesma componente conexa em $T - a'_i$, o que é absurdo.

Deste modo, concluímos que, se A é matriz de rede então existe um grafo G_i , com $i \in I$, que é desconexo. De modo equivalente, se todos os grafos $G_i, i \in I$, forem conexos então a matriz A não é matriz de rede. No desenvolvimento que se segue apresentaremos um fortalecimento da condição necessária para A ser matriz de rede.

Suponhamos, sem perda de generalidade, que G_1 é desconexo. Designemos as componentes conexas de G_1 (incluindo as componentes conexas triviais, i.e., os subgrafos de G_1 constituídos por um único vértice e sem qualquer aresta) por $C_k, k \in K$, em que $|K|$ tem valor igual ao número de componentes conexas de G_1 . Defina-se

$$W = \{j \in J: a_{1j} \neq 0\}, \quad (4.10)$$

o *suporte* da linha 1 da matriz A ; para cada $i \in I \setminus \{1\}$,

$$W_i = W \cap \{j \in J: a_{ij} \neq 0\}, \quad (4.11)$$

a intersecção dos *suportes* das linhas 1 e i da matriz A ; e, para cada $k \in K$,

$$U_k = \bigcup_{i \in V(C_k)} W_i = W \cap \left(\bigcup_{i \in V(C_k)} \{j \in J: a_{ij} \neq 0\} \right), \quad (4.12)$$

a união daqueles conjuntos W_i subjacentes às linhas i , com i vértice da componente conexa \mathcal{C}_k .

Vejamos qual é a motivação para estas definições supondo que se aplicavam a uma matriz de rede. Cada coluna j de A está associada a uma aresta $a_j \equiv \{v, w\} \in E$ e define o vector de incidência do caminho em T de v para w , que denotamos por caminho- j . Deste modo, podemos interpretar os conjuntos W , W_i e U_k como sendo,

$$\begin{aligned} W &= \{j \in J: \text{caminho-}j \text{ passa pelo arco } a'_1\} \\ W_i &= \{j \in J: \text{caminho-}j \text{ passa pelos arcos } a'_1 \text{ e } a'_i\} \\ U_k &= \{j \in J: \text{caminho-}j \text{ passa pelo arco } a'_1 \text{ e por algum arco } a'_i, i \in V(\mathcal{C}_k)\}. \end{aligned}$$

Agora, construímos o grafo $H = (V_H, E_H)$ com $V_H = \{\mathcal{C}_k: k \in K\}$ e E_H o conjunto das arestas $\{\mathcal{C}_k, \mathcal{C}_l\}$ sempre que $\mathcal{C}_k \neq \mathcal{C}_l$ e

$$\text{existe } i \in V(\mathcal{C}_k) \text{ tal que } U_l \cap (J \setminus W_i), U_l \cap W_i \neq \emptyset, \quad (4.13a)$$

$$\text{existe } j \in V(\mathcal{C}_l) \text{ tal que } U_k \cap (J \setminus W_j), U_k \cap W_j \neq \emptyset. \quad (4.13b)$$

Vejamos qual é a motivação para esta definição do grafo H supondo mais uma vez que se aplicava a uma matriz de rede. A condição (4.13a) significa que existe em T algum arco a'_i , com $i \in V(\mathcal{C}_k)$, e existem dois caminhos- j que passam ambos pelo arco a'_1 e por algum outro arco associado a $V(\mathcal{C}_l)$, mas tal que um passa por a'_i e o outro não. De igual modo, a condição (4.13b) significa que existe em T um arco a'_i , com $i \in V(\mathcal{C}_l)$, e pelo menos dois caminhos- j que passam ambos pelo arco a'_1 e por algum outro arco associado a $V(\mathcal{C}_k)$, mas tal que um passa por a'_j e o outro não.

Teorema 39 *Se A é uma matriz de rede (e G_1 é desconexo) então o grafo H é bipartido.*

Prova: Suponhamos, portanto, que A é uma matriz de rede. Tal como o definimos, o grafo H possui como vértices $V_H \equiv \{\mathcal{C}_k: k \in K\}$ e possui arestas $(\mathcal{C}_k, \mathcal{C}_l)$ sempre que $\mathcal{C}_k \neq \mathcal{C}_l$ e (4.13a) e (4.13b) se verificarem. Para provar que H é bipartido vamos exibir uma bipartição de V_H .

Suponhamos, sem perda de generalidade, que o conjunto dos arcos das duas componentes conexas de $T - a'_1$ são $\{a'_2, a'_3, \dots, a'_t\}$ e $\{a'_{t+1}, a'_{t+2}, \dots, a'_m\}$. Vamos começar por provar que, sendo A uma matriz de rede, se T^k é o subgrafo de $T - a'_1$ cujos arcos são $E^k = \{a'_i \in E_0: i \in V(\mathcal{C}_k)\}$ e cujos vértices são as extremidades de todos esses arcos então T^k é subárvore de uma das componentes de $T - a'_1$. Assim sendo, $V(\mathcal{C}_k)$ está totalmente contido em $\{2, 3, \dots, t\}$ ou em $\{t+1, t+2, \dots, m\}$.

Note-se que $V(\mathcal{C}_k) \subseteq I \setminus \{1\}$ e, portanto, $a'_1 \notin E^k$, o que imediatamente implica que T^k é subgrafo de $T - a'_1$. Seguidamente, provaremos que T^k é conexo. Sejam v, v' dois quaisquer vértices distintos de T^k . Se existe um arco $a'_i \in E^k$ cujas extremidades são v e v' então existe em T^k um caminho (não orientado) de v para v' . Caso contrário, existem dois arcos distintos de T^k , denotados a'_{i_0} e a'_{i_p} , tais que v é extremidade de a'_{i_0} e v' é extremidade de a'_{i_p} . Como $i_0, i_p \in V(\mathcal{C}_k)$ e \mathcal{C}_k é conexo então existe em \mathcal{C}_k um caminho de i_0 para i_p definido por $i_0(e_1)i_1(e_2)i_2 \cdots i_{p-1}(e_p)i_p$. Como $i_0, i_1, \dots, i_p \in V(\mathcal{C}_k)$, os arcos $a'_{i_0}, a'_{i_1}, \dots, a'_{i_p} \in E^k$. Vamos mostrar que, para cada $r = 0, 1, \dots, p-1$, o caminho em T de a'_{i_r} até $a'_{i_{r+1}}$ é constituído por arcos de E^k , o que permitirá concluir que o caminho em T de a'_{i_0} para a'_{i_p} (e, portanto, de v para v') é um caminho em T^k . Assim, seja $r \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ qualquer. Como i_r e i_{r+1} são adjacentes em \mathcal{C}_k e A é uma matriz de rede, existe um caminho- j em T que passa por a'_{i_r} e $a'_{i_{r+1}}$ e não passa por a'_1 . Seja a'_i um qualquer outro arco deste caminho- j . Como a coluna j de A tem elementos não nulos nas posições i e i_r e zero na posição 1, o grafo G_1 possui a aresta $\{i, i_r\}$. Por isso, $i \in V(\mathcal{C}_k)$ pelo que $a'_i \in E^k$, o que prova o pretendido. Da arbitrariedade de v e v' concluímos que T^k é um grafo conexo e, por isso, T^k é subárvore de uma das componentes de $T - a'_1$.

Agora, considere-se a bipartição (V_H^1, V_H^2) de V_H definida por

$$V_H^1 = \{\mathcal{C}_k : V(\mathcal{C}_k) \subseteq \{2, 3, \dots, t\}\} \quad \text{e} \quad V_H^2 = \{\mathcal{C}_k : V(\mathcal{C}_k) \subseteq \{t+1, t+2, \dots, m\}\}$$

e sejam \mathcal{C}_k e \mathcal{C}_l dois quaisquer vértices distintos de H . Se $V(\mathcal{C}_k)$ e $V(\mathcal{C}_l)$ forem subconjuntos do mesmo conjunto então T_k e T_l são subárvores da mesma componente de $T - a'_1$. Seja v_k o vértice de T^k mais próximo de a'_1 em T e seja v_l o vértice de T^l mais próximo de a'_1 em T . Estes dois vértices estão definidos de forma única e, além disso, verifica-se uma das situações seguintes: (i) o caminho em T de v_k para a'_1 não contém qualquer arco de T^l ; (ii) o caminho em T de v_l para a'_1 não contém qualquer arco em T^k .

Suponhamos que se verifica (i). Então, todo o caminho- j que passa por a'_1 e por algum arco de T indexado por $V(\mathcal{C}_l)$ usa todos os arcos de T^k que estejam no caminho em T de v_k para v_l e nenhum arco de T^k que não esteja nesse caminho. Por isso, para todo o arco a'_i de T^k verifica-se $U_l \subseteq W_i$ (quando esse arco faz parte do caminho em T de v_k para v_l) ou $U_l \cap W_i = \emptyset$. Em qualquer dos casos conclui-se que \mathcal{C}_k e \mathcal{C}_l não são adjacentes em H .

Suponhamos que se verifica (ii). De modo semelhante ao caso (i), mostraremos que \mathcal{C}_k e \mathcal{C}_l não são adjacentes em H . Fica assim demonstrado que H é um grafo bipartido com bipartição determinada pelos conjuntos V_H^1 e V_H^2 . \square

Condição Suficiente

Vamos exibir uma condição suficiente para que uma matriz A de zeros, uns e menos uns seja uma matriz de rede. Naturalmente, mantemos a hipótese de que A possui pelo menos uma coluna com, no mínimo, três entradas não-nulas, caso contrário, estaríamos nas condições dos Teoremas 37 e 38 (página 120). Sejam $G_i, i \in I$, os grafos definidos na subsecção anterior e, sem perda de generalidade, suponhamos que G_1 é desconexo com componentes conexas $\mathcal{C}_k, k \in K$. Se não existir um tal grafo desconexo então, como explicámos antes, A não é matriz de rede.

Finalmente seja $H = (V_H, E_H)$ o grafo definido na subsecção anterior. Se H não é bipartido então, pelo Teorema 39, A não é matriz de rede. Por isso, suponhamos que H é um grafo bipartido e sejam V_H^1 e V_H^2 os conjuntos que formam a respectiva bipartição dos vértices de H . Esta bipartição induz uma bipartição (K_1, K_2) do conjunto K com

$$K_1 = \{k \in K : \mathcal{C}_k \in V_H^1\} \quad \text{e} \quad K_2 = \{k \in K : \mathcal{C}_k \in V_H^2\}.$$

Para cada componente conexa $\mathcal{C}_k, k \in K$, denote-se por A_k a submatriz de A constituída pelas linhas de A indexadas por $\{1\} \cup V(\mathcal{C}_k)$. Vamos apresentar quatro lemas visando a demonstração do seguinte teorema:

Teorema 40 *Se algum dos grafos G_i é desconexo (sem perda de generalidade, digamos, G_1) e, além disso, H é bipartido e A_k é uma matriz de rede para cada $k \in K$, então A é uma matriz de rede.*

Lema 10 *Se A_k é uma matriz de rede representada pelo digrafo $\bar{D}^k = (\bar{V}^k, \bar{E}^k)$ e pela árvore dirigida $\bar{T}^k = (\bar{V}^k, \bar{E}_0^k)$, então, o arco de \bar{T}^k associado à linha 1 de A_k é uma folha (ou arco terminal) em \bar{T}^k .*

Prova: Consideremos que $\bar{E}^k = \{a_j : j \in J\}$ e $\bar{E}_0^k = \{a'_i : i \in \{1\} \cup V(\mathcal{C}_k)\}$. Pretendemos provar que não existem arcos $a'_i, a'_j \in \bar{E}_0^k$, que se liguem a extremidades diferentes do arco $a'_1 \in \bar{E}_0^k$.

Por absurdo, suponhamos que existem tais arcos a'_i, a'_j com $i, j \in V(\mathcal{C}_k)$. Como \mathcal{C}_k é conexo, existe um caminho em \mathcal{C}_k de $i \equiv v_0$ para $j \equiv v_r$, digamos,

$$v_0(e_1)v_1(e_2)v_2 \dots v_{r-1}(e_r)v_r.$$

Como $e_1 = \{v_0, v_1\}$ é uma aresta de \mathcal{C}_k então, a'_{v_0} e a'_{v_1} pertencem à mesma componente conexa em $\bar{T}^k - a'_1$ (veja-se o segundo parágrafo da subsecção 4.1 onde se definiu G_1). Indutivamente,

$$a'_{v_0}, a'_{v_1}, \dots, a'_{v_{r-1}}, a'_{v_r}$$

pertencem à mesma componente conexa em $\bar{T}^k - a'_1$. Em particular, a'_i e a'_j pertencem à mesma componente conexa em $\bar{T}^k - a'_1$, o que é absurdo. \square

Lema 11 *A relação de ordem " \prec " em K_1 tal que $k \prec l$ se e só se $k \neq l$ e (4.13b) verifica-se, isto é,*

$$\text{existe } j \in V(\mathcal{C}_l) \text{ tal que } U_k \cap (J \setminus W_j), U_k \cap W_j \neq \emptyset,$$

é uma relação de ordem parcial.

Prova: Precisamos provar que a relação " \prec " é anti-simétrica e transitiva. Primeiro, provamos que \prec é anti-simétrica. Suponhamos, por absurdo, que existem $k, l \in K_1$ distintos tais que $k \prec l$ e $l \prec k$. Então, (4.13a) e (4.13b) verificam-se para k e l e, portanto, \mathcal{C}_k e \mathcal{C}_l são vértices adjacentes em H , o que é absurdo porque H é bipartido e $k, l \in K_1$. Agora, provamos que \prec é transitiva. Consideremos $h, k, l \in K_1$ distintos quaisquer tal que $h \prec k$, isto é,

$$\text{existe } i \in V(\mathcal{C}_k) \text{ tal que } U_h \cap (J \setminus W_i), U_h \cap W_i \neq \emptyset \quad (4.14)$$

e $k \prec l$, isto é,

$$\text{existe } j \in V(\mathcal{C}_l) \text{ tal que } U_k \cap (J \setminus W_j), U_k \cap W_j \neq \emptyset \quad (4.15)$$

Como $U_h \cap W_i \neq \emptyset$, então, por definição de U_h , existe $s \in V(\mathcal{C}_h)$ tal que $W_s \cap W_i \neq \emptyset$. Uma vez que $W_i \subseteq U_k$, pois $i \in \mathcal{C}_k$, concluímos que $W_s \cap U_k \neq \emptyset$. Agora, se $U_k \cap (J \setminus W_s) \neq \emptyset$ então

$$\text{existe } s \in V(\mathcal{C}_h) \text{ tal que } U_k \cap (J \setminus W_s), U_k \cap W_s \neq \emptyset. \quad (4.16)$$

Por (4.14) e (4.16), concluímos que (4.13a) e (4.13b) verificam-se para h e k , pelo que \mathcal{C}_h e \mathcal{C}_k são vértices adjacentes em H . Isto é absurdo porque H é bipartido. Por isso, $U_k \cap (J \setminus W_s) = \emptyset$, ou seja, $U_k \subseteq W_s$. Como $W_s \subseteq U_h$, concluímos que $U_k \subseteq U_h$. Assim, por (4.15), concluímos que

$$\text{existe } j \in V(\mathcal{C}_l) \text{ tal que } U_h \cap (J \setminus W_j), U_h \cap W_j \neq \emptyset,$$

ou seja, $h \prec l$. Concluímos que \prec é transitiva e, portanto, " \prec " é uma relação de ordem parcial. \square

Como " \prec " é uma relação de ordem parcial em K_1 , é possível ordenar os elementos de $K_1 = \{k_1, k_2, \dots, k_p\}$ de tal modo que, para quaisquer $k_r, k_s \in$

K_1 que verifiquem $k_r \prec k_s$, então $r < s$ (o recíproco não é necessariamente verdade). De modo semelhante, se define uma relação de ordem parcial em K_2 , e o que acabámos de afirmar também se aplica aos elementos de $K_2 = \{k_{p+1}, k_{p+2}, \dots, k_q\}$ com $q = |K|$.

Por isso, suponhamos, sem perda de generalidade, que $k_i \equiv i$, $i = 1, 2, \dots, q$. Então, $K_1 = \{1, 2, \dots, p\}$ e $K_2 = \{p+1, p+2, \dots, q\}$ e, em particular, para quaisquer $k, l \in K_1$ (ou $k, l \in K_2$), $k \prec l$ implica $k < l$. Assim, de agora em diante, $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_p$ e $\mathcal{C}_{p+1}, \mathcal{C}_{p+2}, \dots, \mathcal{C}_q$ são as componentes conexas de G_1 indexadas por K_1 e K_2 , resp., ou seja,

$$V_H^1 = \{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_p\} \quad \text{e} \quad V_H^2 = \{\mathcal{C}_{p+1}, \mathcal{C}_{p+2}, \dots, \mathcal{C}_q\}.$$

Identificar “ \prec ” foi importante para estabelecer esta ordenação nos elementos de V_H^1 e V_H^2 .

Lema 12 *Sejam $j, j' \in W$ e $k \in K_1$. Se as colunas j e j' de A têm suporte diferente do conjunto vazio em $V(\mathcal{C}_k)$ então, estas duas colunas têm o mesmo suporte em*

$$\{1\} \cup V(\mathcal{C}_1) \cup \dots \cup V(\mathcal{C}_{k-1}).$$

Prova: Por hipótese, existem $i, i' \in V(\mathcal{C}_k)$ (podendo ser $i = i'$) tais que $a_{ij}, a_{i'j'} \neq 0$. Pretendemos provar que

$$\begin{aligned} \{i \in \{1\} \cup V(\mathcal{C}_1) \cup \dots \cup V(\mathcal{C}_{k-1}) : a_{ij} \neq 0\} &= \\ &= \{i \in \{1\} \cup V(\mathcal{C}_1) \cup \dots \cup V(\mathcal{C}_{k-1}) : a_{i'j'} \neq 0\}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Se $k = 1$ então (4.17) é simplesmente $\{i \in \{1\} : a_{ij} \neq 0\} = \{i \in \{1\} : a_{i'j'} \neq 0\}$ que coincide com $\{1\}$ porque $j, j' \in W$. Para o resto da demonstração vamos supor que $k > 1$. Designemos por A o conjunto da esquerda em (4.17) e por B o da direita. Como $j, j' \in W$ então, $a_{1j}, a_{1j'} \neq 0$ e, por isso, $1 \in A \cap B$. Logo, (4.17) é equivalente à igualdade $A \setminus \{1\} = B \setminus \{1\}$. Por absurdo, suponhamos que $A \setminus \{1\} \neq B \setminus \{1\}$, i.e., existe $r \in V(\mathcal{C}_1) \cup V(\mathcal{C}_2) \cup \dots \cup V(\mathcal{C}_{k-1})$ tal que $a_{rj} \neq 0$ e $a_{rj'} = 0$ (sem perda de generalidade). Suponhamos que $r \in V(\mathcal{C}_l)$ para adequado $l \in \{1, 2, \dots, k-1\}$. Por definição de W_r , tem-se que $j \in W_r$ (porque $a_{1j} \neq 0$ e $a_{rj} \neq 0$) e $j' \notin W_r$ (porque $a_{1j} \neq 0$ e $a_{rj'} = 0$). Por outro lado, $j, j' \in U_k$ porque $j, j' \in W$ e por causa da existência de $i, i' \in V(\mathcal{C})_k$ com $a_{ij}, a_{i'j'} \neq 0$. Assim, $j \in U_k \cap W_r$ e $j' \in U_k \cap (J \setminus W_r)$. Concluimos que

$$\text{existe } r \in V(\mathcal{C}_l) \text{ tal que} \quad U_k \cap (J \setminus W_r), U_k \cap W_r \neq \emptyset.$$

Isto significa que $k \prec l$, o que implica, pelo exposto a seguir ao Lema 11, que $k < l$, contradizendo $1 \leq l \leq k-1$. Concluimos que $A = B$. \square

Lema 13 *Sejam $j, j' \in W$ e $k \in K_2$. Se as colunas j e j' de A têm suporte diferente do conjunto vazio em $V(\mathcal{C}_k)$ então, estas duas colunas têm o mesmo suporte em*

$$\{1\} \cup V(\mathcal{C}_{p+1}) \cup V(\mathcal{C}_{p+2}) \cup \dots \cup V(\mathcal{C}_{k-1}).$$

Prova: Análoga à do lema anterior. \square

Lema 14 *Seja $j \in J \setminus W$. Então, existe, no máximo, um $k \in K = \{1, 2, \dots, q\}$ tal que a coluna j da matriz A_k é não-nula.*

Prova: Suponhamos que existe $k \in \{1, 2, \dots, q\}$ tal que a coluna da matriz A_k é não-nula. Então, existe $i \in \{1\} \cup V(\mathcal{C}_k)$ tal que $a_{ij} = \pm 1$. Mas $a_{ij} = 0$, pelo que $i \in V(\mathcal{C}_k)$. Suponhamos, por absurdo, que existe $k' \in \{1, 2, \dots, q\}$ tal que $k' \neq k$ e a coluna j da matriz $A_{k'}$ é não-nula. Isto é, existe $i' \in \{1\} \cup V(\mathcal{C}_{k'})$ tal que $a_{i'j} = \pm 1$. Como $a_{1j} = 0$, concluímos que $i' \in V(\mathcal{C}_{k'})$. Assim, temos $a_{1j} = 0$ e $a_{ij} = a_{i'j} \neq 0$, pelo que $\{i, i'\}$ é uma aresta de G_1 . Isto é absurdo porque \mathcal{C}_k e $\mathcal{C}_{k'}$ são duas componentes conexas distintas em G_1 . \square

Prova: (do Teorema 40) Consideremos as seguintes submatrizes da matriz A :

$$A^+ \equiv A[\{1\} \cup V(\mathcal{C}_1) \cup \dots \cup V(\mathcal{C}_p)] \quad \text{e} \quad A^- \equiv A[\{1\} \cup V(\mathcal{C}_{p+1}) \cup \dots \cup V(\mathcal{C}_q)].$$

Toda a linha da matriz A é linha de uma destas matrizes e apenas uma linha é comum, a linha 1. Começamos por mostrar que A^+ e A^- são matrizes de rede.

Por facilidade de notação, denote-se $V(\mathcal{C}_0) \equiv \{1\}$. Vamos provar através do método de indução matemática que

A matriz $A^+ \equiv A[V(\mathcal{C}_0) \cup V(\mathcal{C}_1) \cup \dots \cup V(\mathcal{C}_k)]$ é uma matriz de rede representada por um digrafo D^k e por uma árvore dirigida T^k tal que o vértice origem do arco de T^k correspondente à linha 1 tem grau um em T^k . (4.18)

proposição matemática que vamos designar por $P(k)$. Se $k = 0$ então $A^0 = A[\{1\}]$, que é trivialmente uma matriz de rede representada pela árvore dirigida T^0 constituída por dois vértices e apenas um arco ligando esses dois vértices, e um digrafo D^0 constituído apenas por repetições desse mesmo arco, inversões e lacetes.

Consideremos $k \in \{1, 2, \dots, p\}$ qualquer e suponhamos que $P(k-1)$ é verdade, como hipótese de indução. Em particular, a matriz A^{k-1} é uma matriz

de rede representada por uma árvore dirigida $T^{k-1} = (V^{k-1}, E_0^{k-1})$ e por um digrafo $D^{k-1} = (V^{k-1}, E^{k-1})$. Denote-se

$$E^{k-1} = \{a_j: j \in J\} \quad \text{e} \quad E_0^{k-1} = \{a'_i: i \in V(\mathcal{C}_0) \cup V(\mathcal{C}_1) \cup \dots \cup V(\mathcal{C}_{k-1})\}.$$

Seja $a'_1 = (v_0, v_1) \in E_0^{k-1}$, o arco de T^{k-1} associado à primeira linha de A^{k-1} (e de A). Pela hipótese de indução, o vértice v_0 tem grau um em T^{k-1} .

Por outro lado, e pela hipótese enunciada neste teorema, a submatriz A_k é uma matriz de rede representada por uma árvore dirigida $\bar{T}^k = (\bar{V}^k, \bar{E}_0^k)$ e por um digrafo $\bar{D}^k = (\bar{V}^k, \bar{E}^k)$. Denote-se

$$\bar{E}^k = \{\bar{a}_j: j \in J\} \quad \text{e} \quad \bar{E}_0^k = \{\bar{a}'_i: i \in \{1\} \cup V(\mathcal{C}_k)\}.$$

Seja $\bar{a}'_1 = (\bar{v}_0, \bar{v}_1) \in \bar{E}_0^k$ o arco de \bar{T}^k associado à primeira linha de A_k (e de A). Pelo Lema 10, \bar{a}'_1 é uma folha em \bar{T}^k . Sem perda de generalidade, \bar{v}_0 tem grau um em \bar{T}^k (recorde-se a observação 1).

Seja $a_j = (r, s) \in E^{k-1}$ qualquer. Por definição, $j \in W$ se e só se o caminho não-dirigido de r para s passa por a'_1 . Como v_0 tem grau um em T^{k-1} então, isto só é possível se $r = v_0$ ou $s = v_0$. Portanto,

$$j \in W \quad \Leftrightarrow \quad v_0 \text{ é extremidade de } a_j. \quad (4.19)$$

Pela mesma razão, para qualquer $\bar{a}_j \in \bar{E}^k$,

$$j \in W \quad \Leftrightarrow \quad \bar{v}_0 \text{ é extremidade de } \bar{a}_j. \quad (4.20)$$

Vejamos agora o que pode acontecer se $j \in J \setminus W$. Neste caso, $a_{1j} = 0$. A coluna j de A^{k-1} , que denotaremos por $(A^{k-1})_j$, é, a menos de trocas de linhas, igual a

$$(A^{k-1})_j = \begin{bmatrix} A[1] \\ A[V(\mathcal{C}_1)] \\ A[V(\mathcal{C}_2)] \\ \vdots \\ A[V(\mathcal{C}_{k-1})] \end{bmatrix}_j = \begin{bmatrix} 0 \\ A[V(\mathcal{C}_1)]_j \\ A[V(\mathcal{C}_2)]_j \\ \vdots \\ A[V(\mathcal{C}_{k-1})]_j \end{bmatrix}$$

Pelo Lema 14, podemos concluir que: ou $(A^{k-1})_j = 0$ ou $(A_k)_j = 0$. Portanto,

$$j \notin W \quad \Rightarrow \quad a_j \text{ ou } \bar{a}_j \text{ é um lacete.} \quad (4.21)$$

Seja $j \in W$ tal que a coluna j de A_k tem suporte diferente do vazio em $V(\mathcal{C}_k)$. Por (4.19), a_j é da forma (v_0, w) ou (w, v_0) , para algum $w \in V^{k-1} \setminus \{v_0\}$ (note-se que $w \neq v_0$ porque $a_{1j} \neq 0$). Agora, seja $j' \neq j$ tal que a coluna j' de A_k tenha também suporte diferente do vazio em $V(\mathcal{C}_k)$. Pelo Lema 12, $|(A^{k-1})_j| = |(A^{k-1})_{j'}|$. Como A^{k-1} é uma matriz de rede, isto significa

que $(A^{k-1})_j = (A^{k-1})_{j'}$ ou $(A^{k-1})_j = -(A^{k-1})_{j'}$ (ver observação 2), pelo que também $a_{j'}$ é da forma (v_0, w) ou (w, v_0) , para o mesmo w que caracteriza a_j . Assim, concluímos que existe, e é único, $w \in V^{k-1} \setminus \{v_0\}$ de modo que, para todo $j \in W$ tal que a coluna j de A_k tem suporte não-vazio em $V(\mathcal{C}_k)$,

$$a_j \in \{(v_0, w), (w, v_0)\}. \tag{4.22}$$

Finalmente, estamos em condições de construir a árvore dirigida $T^k = (V^k, E^k)$ e o digrafo $D^k = (V^k, E^k)$ de modo a que $P(k)$ seja verdade. A árvore dirigida T^k é construída com base em T^{k-1} e \bar{T}^k do seguinte modo: primeiro, considere-se a árvore que resulta de \bar{T}^k por remoção de $\bar{a}'_1 = (\bar{v}_0, \bar{v}_1)$. Se existe pelo menos uma coluna $j \in W$ de A_k que tem suporte não-vazio em $V(\mathcal{C}_k)$ então, seja $w \in V^{k-1} \setminus \{v_0\}$ o vértice que satisfaz (4.22). Se todas as colunas $j \in W$ de A_k têm suporte vazio em $V(\mathcal{C}_k)$ então, considera-se $w = v_1$. A árvore T^k é a árvore que decorre da reunião das árvores T^{k-1} e $\bar{T}^k \setminus \{\bar{a}'_1\}$ fazendo coincidir o vértice w de T^{k-1} com o vértice \bar{v}_1 de \bar{T}^k . Veja-se a Figura 4.1. Mais precisamente, denotando $\bar{v}_1 \equiv w$,

$$V^k = (V^{k-1} \cup \bar{V}^k) \setminus \{\bar{v}_0\} \quad \text{e} \quad E^k = (E^{k-1} \cup \bar{E}^k) \setminus \{\bar{a}'_1\}.$$

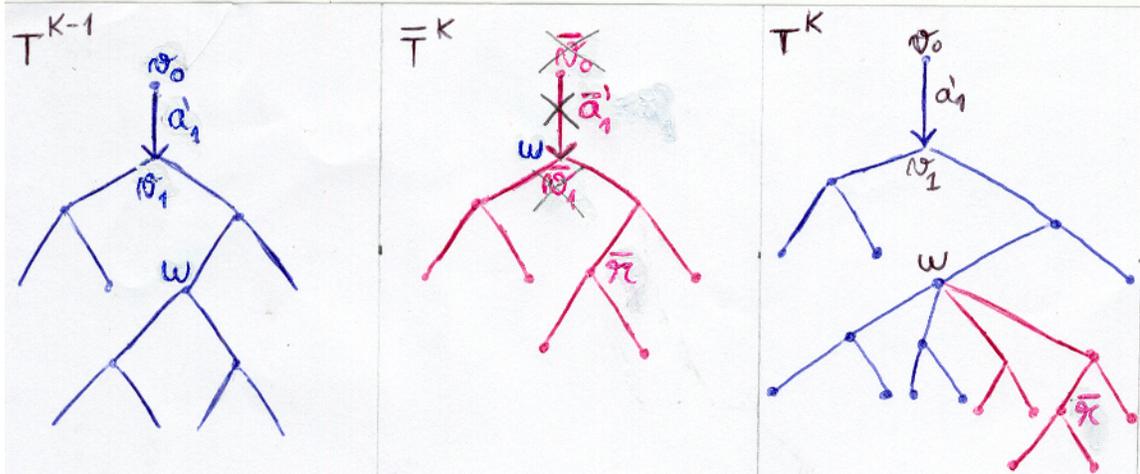


Figura 4.1: construção de T^k

O digrafo D^k é construído do seguinte modo: denote-se $E^k = \{a_j^* : j \in J\}$. Seja $j \in J$ qualquer. Verifica-se uma de quatro situações possíveis:

- (i) $j \in W$ e $A[V(\mathcal{C}_k)] = 0$;
- (ii) $j \in W$ e $A[V(\mathcal{C}_k)] \neq 0$;
- (iii) $j \notin W$ e a_j é lacete em D^{k-1} ;
- (iv) $j \notin W$ e \bar{a}_j é lacete em \bar{D}^k .

Nos casos (i) e (iv), faz-se $a_j^* \equiv a_j$; no caso (iii) faz-se $a_j^* \equiv \bar{a}_j$. Finalmente, considere-se o caso (ii). Seja $w \in V^{k-1} \setminus \{v_0\}$ tal que (4.22) verifica-se. Por outro lado, por (4.20), existe $\bar{r} \in \bar{V}^k \setminus \{\bar{v}_0\}$ tal que

$$\bar{a}_j \in \{(\bar{r}, \bar{v}_0), (\bar{v}_0, \bar{r})\}.$$

Por isso, se $a_j = (v_0, w)$ então faz-se $a_j^* \equiv (v_0, \bar{r})$; se $a_j = (w, v_0)$ então faz-se $a_j^* \equiv (\bar{r}, v_0)$.

Estando completa a caracterização de D^k e T^k , falta agora mostrar que A^k é matriz de rede representada por essas estruturas. Seja a_j^* um qualquer arco de D^k . Se a_j^* for definido por (i) ou (iv) (isto é, $a_j^+ \equiv a_j$) então, o caminho em T^k ligando as extremidades de a_j^+ está totalmente contido em T^{k-1} e permanece inalterado em T^k . O seu vector característico em T^k é precisamente

$$(A^k)_j = \begin{bmatrix} A[V(\mathcal{C}_0)] \\ A[V(\mathcal{C}_1)] \\ \vdots \\ A[V(\mathcal{C}_{k-1})] \\ A[V(\mathcal{C}_k)] \end{bmatrix}_j = \begin{bmatrix} \begin{cases} 0 & \text{se (iv)} \\ 1 & \text{se (i)} \end{cases} \\ A[V(\mathcal{C}_1)]_j \\ \vdots \\ A[V(\mathcal{C}_{k-1})]_j \\ \mathbf{0}_j \end{bmatrix}$$

Se a_j^* foi definido por (iii) (isto é, $a_j^* \equiv \bar{a}_j$) então, o caminho em T^k ligando as extremidades de a_j^* está totalmente contido em \bar{T}^k e permanece inalterado em T^k . O seu vector característico em T^k é precisamente

$$(A^k)_j = \begin{bmatrix} A[V(\mathcal{C}_0)] \\ A[V(\mathcal{C}_1)] \\ \vdots \\ A[V(\mathcal{C}_{k-1})] \\ A[V(\mathcal{C}_k)] \end{bmatrix}_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{0}_j \\ \vdots \\ \mathbf{0}_j \\ A[V(\mathcal{C}_k)]_j \end{bmatrix}$$

Finalmente, suponhamos que a_j^* é definido por (ii). Neste último caso, temos que considerar duas possibilidades: $a_j = (v_0, w)$ ou $a_j = (w, v_0)$. Se $a_j = (v_0, w)$ então $a_j^* = (v_0, \bar{r})$. Além disso, só pode ser $\bar{a}_j = (\bar{v}_0, \bar{r})$. O caminho em T^k de v_0 para \bar{r} é constituído por dois subcaminhos, um de v_0 para w e outro de $w \equiv \bar{v}_1$ para \bar{r} , e cada um destes subcaminhos estão totalmente contidos em T^{k-1} e $\bar{T}^k \setminus \{\bar{a}'_1\}$, resp. O vector característico do caminho em T^k de v_0 para \bar{r} é precisamente

$$(A^k)_j = \begin{bmatrix} A[V(\mathcal{C}_0)] \\ A[V(\mathcal{C}_1)] \\ \vdots \\ A[V(\mathcal{C}_{k-1})] \\ A[V(\mathcal{C}_k)] \end{bmatrix}_j = \begin{bmatrix} A[V(\mathcal{C}_0)]_j \\ A[V(\mathcal{C}_1)]_j \\ \vdots \\ A[V(\mathcal{C}_{k-1})]_j \\ A[V(\mathcal{C}_k)]_j \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

Se $a_j = (w, v_0)$ então $a_j^* = (\bar{r}, v_0)$ e só pode ser $\bar{a}_j = (\bar{r}, \bar{v}_0)$. A caracterização do vector característico do caminho em T^k de \bar{r} para v_0 coincide com (4.23).

Fica assim completa a demonstração de que A^k é uma matriz de rede. Além disso, o arco associado à linha 1 da matriz A^k é (v_0, v_1) que, por construção, é tal que v_0 é um vértice de grau um em T^k . Fica, assim, concluída a veracidade de $P(k)$. Pelo princípio de indução matemática, $P(k)$ é verdade para todo $k = 0, 1, 2, \dots, p$. Em particular, $P(p)$ é verdade, i.e., a matriz A^+ ($= A^p$) é uma matriz de rede representada por uma árvore $T^+ = (V^+, E_0^+)$ ($= T^p$) e um digrafo $D^+ = (V^+, E^+)$ ($= D^p$) tal que o vértice origem do arco de T^+ correspondente à linha 1 é um vértice de grau 1.

De modo muito semelhante, concluiríamos que a matriz A^- é uma matriz de rede representada por uma árvore $T^- = (V^-, E_0^-)$ e um digrafo $D^- = (V^-, E^-)$ tal que o vértice terminal do arco de T^- correspondente à linha 1 é um vértice de grau 1.

Estamos agora em condições de definir a árvore dirigida $T = (V, E_0)$ e o digrafo $D = (V, E)$ que representarão a matriz A . Denote-se

$$E^+ = \{a_j^+ : j \in J\}, \quad E^- = \{a_j^- : j \in J\}$$

e também

$$E_0^+ = \{\tilde{a}_i^+ : i \in \{1\} \cup V(\mathcal{C}_1) \cup \dots \cup V(\mathcal{C}_p)\} \quad \text{e} \\ E_0^- = \{\tilde{a}_i^- : i \in \{1\} \cup V(\mathcal{C}_{p+1}) \cup \dots \cup V(\mathcal{C}_q)\}$$

A árvore T é a árvore que decorre da reunião das árvores T^+ e T^- fazendo coincidir o arco $\tilde{a}_1^+ = (v_0^+, v_1^+) \in E_0^+$ com o arco $\tilde{a}_1^- = (v_0^-, v_1^-) \in E_0^-$ e os respectivos vértices extremidades. Veja-se a Figura 4.2. Mais precisamente,

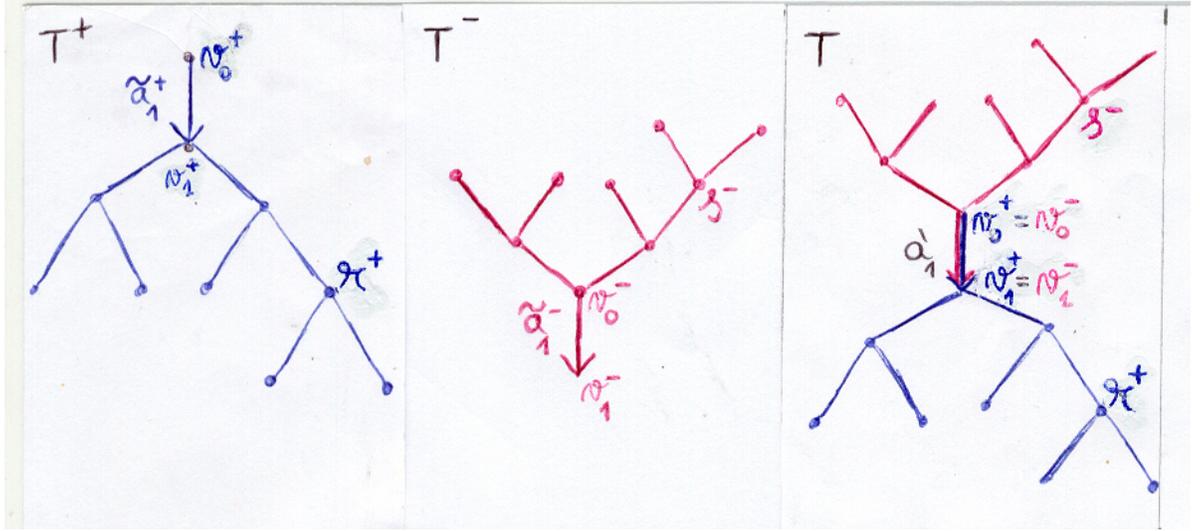
$$V = V^+ \cup V^- \quad \text{e} \quad E_0 = (E_0^+ \cup E_0^-) \setminus \{\tilde{a}_1^-\}$$

Antes de explicitar a matriz D , vamos demonstrar duas propriedades, nomeadamente (4.24) e (4.25) abaixo. Como v_0^+ é vértice de grau um em T^+ e v_1^- é também vértice de grau um em T^- , então, de forma análoga à prova de (4.19), também se mostra que

$$j \in W \Rightarrow v_0^+ \text{ é extremidade de } a_j^+ \text{ e } v_1^- \text{ é extremidade de } a_j^- \quad (4.24)$$

Por outro lado, para cada $j \in J \setminus W$, tem-se, a menos de trocas de componentes,

$$(A^+)_j = \begin{bmatrix} 0 \\ A[V(\mathcal{C}_1)]_j \\ A[V(\mathcal{C}_2)]_j \\ \vdots \\ A[V(\mathcal{C}_p)]_j \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad (A^-)_j = \begin{bmatrix} 0 \\ A[V(\mathcal{C}_{p+1})]_j \\ A[V(\mathcal{C}_{p+2})]_j \\ \vdots \\ A[V(\mathcal{C}_q)]_j \end{bmatrix}.$$

Figura 4.2: construção de T

Então, pelo Lema 14, podemos concluir que: ou $(A^+)_j = 0$ ou $(A^-)_j = 0$. Portanto,

$$j \notin W \Rightarrow a_j^+ \text{ ou } a_j^- \text{ é um lacete} \quad (4.25)$$

O conjunto de arcos $E = \{a_j : j \in J\}$ do digrafo D são definidos do seguinte modo: seja $j \in J$ qualquer. Verifica-se uma de três situações possíveis:

- (i) $j \notin W$ e a_j^+ é lacete em D^+ ;
- (ii) $j \notin W$ e a_j^- é lacete em D^- ;
- (iii) $j \in W$.

No caso (i), faça-se $a_j = a_j^+$. No caso (ii), faça-se $a_j = a_j^-$. Finalmente, considere o caso (iii). Por (4.24), existem $r^+ \in V^+$ e $s^- \in V^-$ tal que

$$a_j^+ \in \{(v_0^+, r^+), (r^+, v_0^+)\} \text{ e } a_j^- \in \{(v_1^-, s^-), (s^-, v_1^-)\}.$$

Se $a_j^+ = (v_0^+, r^+)$ então faça-se $a_j = (s^-, r^+)$; se $a_j^+ = (r^+, v_0^+)$ então faça-se $a_j = (r^+, s^-)$.

Vamos agora mostrar que A é a matriz de rede representada por T e D . Seja a_j um qualquer arco de D . Se a_j for definido por (i) (isto é, $a_j = a_j^+$) então, o caminho em T ligando as extremidades de a_j está totalmente contido em T^+ e permanece inalterado em T . O seu vector característico em T é precisamente a coluna j de A , ou seja,

$$\left[\begin{array}{c} A[1] \\ A \left[\bigcup_{i=1}^p V(C_i) \right] \\ A \left[\bigcup_{i=p+1}^q V(C_i) \right] \end{array} \right]_j = \left[\begin{array}{c} 0 \\ A \left[\bigcup_{i=1}^p V(C_i) \right]_j \\ \mathbf{0}_j \end{array} \right]$$

Se a_j for definido por (ii) (isto é, $a_j = a_j^-$) então, o caminho em T ligando as extremidades de a_j está totalmente contido em T^- e permanece inalterado em T . O seu vector característico em T é precisamente a coluna j de A , ou seja,

$$\begin{bmatrix} A[1] \\ A \left[\bigcup_{i=1}^p V(\mathcal{C}_i) \right] \\ A \left[\bigcup_{i=p+1}^q V(\mathcal{C}_i) \right] \end{bmatrix}_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{0}_j \\ A \left[\bigcup_{i=p+1}^q V(\mathcal{C}_i) \right]_j \end{bmatrix}$$

Finalmente, suponhamos que a_j é definido por (iii). Neste último caso, temos que considerar duas possibilidades: $a_j^+ = (v_0^+, r^+)$ ou $a_j^+ = (r^+, v_0^+)$. Se $a_j^+ = (v_0^+, r^+)$ então $a_j = (s^-, r^+)$. Além disso, só pode ser $a_j^- = (s^-, v_1^-)$. O caminho em T de s^- para r^+ é constituído por dois subcaminhos, um de s^- para $v_0^- \equiv v_0^+$ e outro de $v_0^- \equiv v_0^+$ para r^+ . Cada um destes subcaminhos estão totalmente contidos em $T^- - \tilde{a}_1^-$ e T^+ , resp. O vector característico do caminho em T de s^- para r^+ é precisamente a coluna j de A , ou seja,

$$\begin{bmatrix} A[1] \\ A \left[\bigcup_{i=1}^p V(\mathcal{C}_i) \right] \\ A \left[\bigcup_{i=p+1}^q V(\mathcal{C}_i) \right] \end{bmatrix}_j = \begin{bmatrix} 1 \\ A \left[\bigcup_{i=1}^p V(\mathcal{C}_i) \right]_j \\ A \left[\bigcup_{i=p+1}^q V(\mathcal{C}_i) \right]_j \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

Se $a_j^+ = (r^+, v_0^+)$ então $a_j = (r^+, s^-)$ e só pode ser $a_j^- = (v_1^-, s^-)$. A caracterização do vector característico do caminho em T de r^+ para s^- coincide com (4.26).

Fica assim completa a demonstração de que A é uma matriz de rede, o que conclui a prova deste teorema. \square

Estamos agora em condições para enunciar o algoritmo para reconhecimento de matrizes de rede.

Algoritmo $\mathbf{R}(M)$

(1/1)

Input: Uma matriz M de zeros, uns e menos uns.

Output: *Verdadeiro* se M é matriz de rede.
Falso se M não é matriz de rede.

Iteração Genérica:

Passo 1: Seja I o conjunto dos índices das linhas de M e seja J o conjunto dos índices das colunas.
Se cada coluna de M contém, no máximo, duas entradas não-nulas
então constrói-se o grafo $G = (V, E)$ com

$$V = \{v_i : i \in I\} \cup \{v_{ik} : i, k \in I, i < k\}, \quad E = E_1 \cup E_2$$

onde, para todo $i, k \in I$, com $i < k$,

$$\{v_i, v_k\} \in E_1 \Leftrightarrow \exists j \in J : a_{ij}a_{kj} = +1$$

$$\{v_i, v_{ik}\}, \{v_k, v_{ik}\} \in E_2 \Leftrightarrow \exists j \in J : a_{ij}a_{kj} = -1;$$

Se G é bipartido
então $\mathbf{R} := \textit{Verdadeiro}$; STOP.
senão $\mathbf{R} := \textit{Falso}$; STOP.

Passo 2: Para cada índice de linha $i = 1, \dots, m$, constrói-se o grafo $G_i = (V_i, E_i)$ com

$$V_i = \{1, 2, \dots, m\} \setminus \{i\} \quad \text{e}$$

$$E_i = \{(p, q) : a_{ij} = 0 \text{ e } a_{pj}a_{qj} \neq 0, \text{ para algum } j \in J\};$$

Se todos os grafos G_i são conexos
então $\mathbf{R} := \textit{Falso}$; STOP.

Passo 3: Seja $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ tal que G_i é desconexo.
Sejam $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_p$ as componentes conexas de G_i e definam-se os seguintes conjuntos:

$$W = \{j \in J : a_{1j} \neq 0\}, \quad W_i = W \cap \{j \in J : a_{ij} \neq 0\},$$

$$\text{e } U_k = \bigcup_{i \in V(\mathcal{C}_k)} W_i;$$

Construa-se o grafo $H = (V, E)$ com $V = \{\mathcal{C}_k : k \in \{1, 2, \dots, p\}\}$ e E o conjunto das arestas $\{\mathcal{C}_k, \mathcal{C}_l\}$ sempre que $\mathcal{C}_k \neq \mathcal{C}_l$ e

$$\exists i \in V(\mathcal{C}_k) : U_l \cap (J \setminus W_i), U_l \cap W_i \neq \emptyset,$$

$$\exists j \in V(\mathcal{C}_l) : U_k \cap (J \setminus W_j), U_k \cap W_j \neq \emptyset.$$

Se H não é bipartido
então $\mathbf{R} := \textit{Falso}$; STOP.
senão $\mathbf{R} := (\mathbf{R}(M_1) \text{ e } \mathbf{R}(M_2) \text{ e } \dots \text{ e } \mathbf{R}(M_p))$ com

$$M_k = M[\{1\} \cup V(\mathcal{C}_k)], \quad k = 1, 2, \dots, p.$$
Figura 4.3: $\mathbf{R}(M)$

Para provarmos que o algoritmo R descrito na Figura 4.3 funciona e em tempo polinomial, necessitamos do seguinte resultado:

Lema 15 *Para quaisquer $m \geq 3$, $t \geq 2$ e para quaisquer $2 \leq m_1, m_2, \dots, m_p \leq m - 1$ com $m_1 + m_2 + \dots + m_p = m + p - 1$, temos que*

$$m^t + m_1^{t+1} + m_2^{t+1} + \dots + m_p^{t+1} \leq m^{t+1}. \quad (4.27)$$

Prova: Começamos por provar que para todo $m \geq 4$ e $2 \leq m_i \leq m - 2$ tem-se

$$\left(\frac{m_i}{m}\right) m_i \leq m_i - 1 \quad (4.28)$$

para $i = 1, 2, \dots, p$. Ora (4.28) é equivalente a

$$m_i^2 - mm_i + m \leq 0 \Leftrightarrow \frac{m - \sqrt{m^2 - 4m}}{2} \leq m_i \leq \frac{m + \sqrt{m^2 - 4m}}{2},$$

onde, note-se,

$$\frac{m - \sqrt{m^2 - 4m}}{2} \leq 2 \quad \text{e} \quad \frac{m + \sqrt{m^2 - 4m}}{2} \geq m - 2$$

pois $m \geq 4$. Por isso, (4.28) verifica-se.

Seguidamente, provamos que para todo $m \geq 3$ e $2 \leq m_i \leq m - 1$ tem-se

$$\left(\frac{m_i}{m}\right)^2 m_i \leq m_i - 1,$$

para $i = 1, 2, \dots, p$. Ora, se $m \geq 4$ e $2 \leq m_i \leq m - 2$ então,

$$\left(\frac{m_i}{m}\right)^2 m_i \leq \frac{m_i}{m} m_i \leq m_i - 1$$

resulta de (4.28). Se $m = 3$ então $m_i = 2$ e para esse caso temos

$$\left(\frac{m_i}{m}\right)^2 m_i = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{8}{9} \leq 1 = m_i - 1.$$

Finalmente, se $m \geq 4$ e $m_i = m - 1$ então

$$\begin{aligned} \left(\frac{m_i}{m}\right)^2 m_i &= \left(\frac{m-1}{m}\right)^2 (m-1) \\ &= \frac{m^3 - 3m^2 + 3m - 1}{m^2} \\ &= m - 3 + \frac{3}{m} - \frac{1}{m^2} \\ &\leq m - 3 + 1 = m_i - 1. \end{aligned}$$

Por isso,

$$\begin{aligned}
& 1 + \left(\frac{m_1}{m}\right)^t m_1 + \left(\frac{m_2}{m}\right)^t m_2 + \dots + \left(\frac{m_p}{m}\right)^t (m_p) \leq \\
& \leq 1 + \left(\frac{m_1}{m}\right)^2 m_1 + \left(\frac{m_2}{m}\right)^2 m_2 + \dots + \left(\frac{m_p}{m}\right)^2 m_p \\
& \leq 1 + ((m_1 - 1) + (m_2 - 1) + \dots + (m_p - 1)) \\
& = 1 + [(m + p - 1) - p] = m,
\end{aligned}$$

pelo que (4.27) decorre, após multiplicação de ambos os membros da desigualdade anterior por m^t . \square

Teorema 41 *Existe um algoritmo que testa se uma dada matriz é de rede ou não em tempo polinomial.*

Prova: Seja M uma matriz de zeros, uns e menos uns, com m linhas e n colunas e consideremos o algoritmo **R** descrito na página 136. No Passo 1, temos de verificar primeiro se cada coluna de M contém, no máximo duas entradas não-nulas; isto tem tempo computacional $\mathcal{O}(mn)$. Em seguida, temos de verificar se o grafo G do algoritmo **R**, com $m + C_2^m$ vértices e, no máximo, $2 \times C_2^m$ arcos, é ou não bipartido, conforme os Teorema 37 e 38. Averiguar se um grafo (V, E) é bipartido, pode ser resolvido em tempo $\mathcal{O}(|E|)$ (por um algoritmo de rotulação das arestas) o que, no nosso caso, dá $\mathcal{O}(m^2)$. Concluímos que o Passo 1 do algoritmo **R** tem tempo $\mathcal{O}(m^2n)$.

No Passo 2, temos de construir os grafos G_i $i = 1, \dots, m$ com $m - 1$ vértices e, no máximo, C_2^{m-1} arestas cada. Cada grafo G_i pode ser construído em tempo $\mathcal{O}(m^2n)$ e, portanto, todos os grafos G_i podem ser construídos em tempo $\mathcal{O}(m^3n)$. Em seguida, temos de verificar se existe algum grafo G_i desconexo. Averiguar se um grafo (V, E) é conexo, pode ser resolvido em tempo $\mathcal{O}(|E|)$ (também por um algoritmo de rotulação). No nosso caso, para cada grafo G_i , dá um tempo de $\mathcal{O}(m^2)$ e, portanto, para todos os G_i , dá um tempo de $\mathcal{O}(m^3)$. Concluímos que o Passo 2 do algoritmo **R** tem tempo $\mathcal{O}(m^3n)$.

No Passo 3, temos que formar as componentes conexas de um dos grafos G_i (desconexo). Isto pode ser feito no mesmo tempo dispendido para verificar se um dado grafo é conexo. No nosso caso, dá $\mathcal{O}(m^2)$. O conjunto W , os vários conjuntos W_i e todos os conjuntos U_k podem ser construídos em tempo $\mathcal{O}(mn^2)$. Em seguida, constrói-se o grafo H . Podemos verificar se um par de vértices de H forma uma aresta em H em tempo $\mathcal{O}(mn^2)$. Portanto, para podermos fazer a verificação em todos os possíveis pares de vértices (no máximo, $m - 1$ vértices

e, portanto, no máximo, C_2^{m-1} pares de vértices) poderemos precisar de um tempo $\mathcal{O}(m^3n^2)$. Em seguida, temos de verificar se H é bipartido. Se H não é bipartido então, pelo Teorema 39, M não é matriz de rede. Já vimos que averiguar se um grafo (V, E) é bipartido, pode ser resolvido em tempo $\mathcal{O}(|E|)$, o que, para H , dará $\mathcal{O}(m^2)$. Somando todos os tempos parciais, concluímos que, até imediatamente antes de se formarem as matrizes M_k , o Passo 3 do algoritmo **R** tem tempo $\mathcal{O}(m^3n^2)$. Somando ainda os tempos dos Passos 1 e 2, obtemos $\mathcal{O}(m^3n^2)$. Por isso, existe uma constante $C > 0$ tal que o tempo computacional do algoritmo **R** empregue nas tarefas a executar até se formarem as matrizes M_k é limitado por Cm^3n^3 . Pelo Teorema 40, se H não é bipartido então, M não é TU. Caso contrário, M é TU se e só cada uma das matrizes M_k do algoritmo **R** for de rede.

Vamos mostrar por indução em m que o algoritmo **R** emprega um tempo computacional limitado por Cm^4n^3 até decidir se M é ou não matriz de rede. Suponhamos que isto é verdade para uma qualquer matriz com $m' < m$ linhas e n colunas. Se $m \leq 2$ então, o algoritmo termina, no máximo, no final do Passo 1 e o tempo das tarefas até aí executadas é, como vimos, limitado por Cm^3n^3 e, por isso, também por Cm^4n^3 . Suponhamos que $m \geq 3$ e denotemos $m_k \equiv m(M_k)$, para cada matriz M_k . O tempo do algoritmo **R** aplicado à matriz M é a soma de duas partes: primeiro, o tempo para executar as tarefas até antes de se formarem as matrizes M_k , $k = 1, 2, \dots, p$ e, segundo (se for caso disso), o tempo necessário para verificar a seguir se cada uma das submatrizes M_k de M é ou não de rede. Esta última parte de tempo é a soma de p parcelas de tempo, cada uma o tempo para verificar se uma dada matriz M_k é ou não de rede. Por hipótese de indução, o tempo total que o algoritmo **R** emprega a decidir se M é ou não de rede, é limitado por

$$Cm^3n^3 + (Cm_1^4n^3 + Cm_2^4n^3 + \dots + Cm_p^4n^3) \leq Cm^4n^3,$$

pelo Lema 15. □

4.2 Reconhec. de uma matriz Total. Unimodular

Nesta secção, vamos recordar o algoritmo de R. Bixby (entre outros) (Greenberg, 1982) que averigua a Unimodularidade Total de uma dada matriz de zeros, uns e menos uns. Claro que, o cálculo de um número finito de subdeterminantes permitiria chegar a essa conclusão, mas o algoritmo que aqui recordamos não necessita de um tão elevado número de operações pois pertence à classe dos *algoritmos polinomiais*.

Decomposição de uma matriz

Nesta subsecção, vamos mostrar que existe um algoritmo polinomial que, para uma matriz M de dimensão $m \times n$, com $m + n \geq 8$, determina uma matriz M' , obtida de M por trocas de linhas e/ou colunas, tal que

$$M' = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix},$$

$\rho(B) + \rho(C)$ é o menor possível e, quer na matriz A quer na matriz D , o número de linhas somado com o número de colunas é maior ou igual que 4. Este algoritmo, juntamente com o algoritmo para reconhecimento de matrizes de rede já descrito, será incorporado num algoritmo de reconhecimento da Unimodularidade Total, que descreveremos mais adiante.

Lema 16 *Seja M uma matriz $m \times n$ e consideremos $X = [I \ M]$, sendo I a matriz identidade. Para cada conjunto de trocas de linhas e/ou colunas que, aplicadas a M , permitem obter uma matriz*

$$M' = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

tal que,

$$\begin{aligned} &\text{quer na matriz } A \text{ quer na matriz } D, \text{ o número de linhas} \\ &\text{somado com o número de colunas é maior ou igual que 4,} \end{aligned} \quad (4.30)$$

é possível exibir um conjunto de colunas $Y \subseteq X$ tal que

$$|Y| \geq 4, |X \setminus Y| \geq 4, \quad Y \cap I, Y \cap M \neq \emptyset, \quad I \setminus Y, M \setminus Y \neq \emptyset. \quad (4.31)$$

e vice-versa. Neste caso,

$$\rho(B) + \rho(C) = \rho(Y) + \rho(X \setminus Y) - m. \quad (4.32)$$

Prova: (\Rightarrow) Por hipótese, $A = M_{KL}$ com $K \subset \{1, 2, \dots, m\}$ e $L \subset \{1, 2, \dots, n\}$. Seja $Y \subseteq X$ definido do seguinte modo: $Y \cap I$ é o conjunto das colunas da matriz identidade indexadas por K ; $Y \cap M$ é o conjunto das colunas de M indexadas por L . Verifiquemos que Y satisfaz (4.31). De facto, $Y \cap I, Y \cap M \neq \emptyset$ e $I \setminus Y, M \setminus Y \neq \emptyset$ trivialmente. Além disso,

$$|Y| = |Y \cap I| + |Y \cap M| = |K| + |L| \geq 4$$

e

$$|X \setminus Y| = |I \setminus Y| + |M \setminus Y| = m - |Y \cap I| + n - |Y \cap M| = (m - |K|) + (n - |L|) \geq 4.$$

Por isso, Y verifica (4.31). Agora, consideremos as submatrizes Y e $X \setminus Y$. Se sobre estas matrizes efectuarmos as mesmas trocas de linhas que se efectuaram ao passar de M para M' obtemos as seguintes matrizes

$$\begin{bmatrix} I & A \\ 0 & C \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & B \\ I & D \end{bmatrix},$$

resp. Por isso,

$$\rho(Y) = |Y \cap I| + \rho(C) \quad \text{e} \quad \rho(X \setminus Y) = |I \setminus Y| + \rho(B) = m - |Y \cap I| + \rho(B).$$

Logo,

$$\rho(Y) + \rho(X \setminus Y) = m + \rho(B) + \rho(C).$$

(\Leftarrow) Seja $Y \subseteq X$ a satisfazer (4.31). Efectuem-se as seguintes trocas de linhas e colunas sobre a matriz X :

- (a). Troquem-se as colunas de X de modo a que $Y \cap M \neq \emptyset$ sejam as primeiras colunas imediatamente após a matriz identidade.
- (b). Troquem-se as linhas de X de modo a que $Y \cap I \neq \emptyset$ sejam as primeiras linhas da matriz (se olharmos apenas para as primeiras m colunas).

Denote-se por M' as últimas n colunas da matriz assim obtida e considere-se que M' está particionado tal como em (4.29). Em particular, $A \equiv M'_{KL}$ é uma matriz com $|Y \cap I|$ linhas e $|Y \cap M|$ colunas, e $D \equiv M'_{\bar{K}\bar{L}}$ é uma matriz com $m - |Y \cap I|$ linhas e $n - |Y \cap M|$ colunas. Por hipótese,

$$|K| + |L| = |Y \cap I| + |Y \cap M| = |Y| \geq 4$$

e

$$|\bar{K}| + |\bar{L}| = (m - |Y \cap I|) + (n - |Y \cap M|) = |I \setminus Y| + |M \setminus Y| = |X \setminus Y| \geq 4.$$

Logo, a matriz M' , assim definida, satisfaz (4.30). Além disso, depois das operações anteriores de troca de linhas e colunas na matriz M , a matriz M' obtida pode ser particionada nas seguintes duas submatrizes

$$\begin{bmatrix} I & A \\ 0 & C \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 0 & B \\ I & D \end{bmatrix}$$

sendo a característica da primeira igual a $\rho(Y)$ e a característica da segunda igual a $\rho(X \setminus Y)$. Por isso, $\rho(Y) = |Y \cap I| + \rho(C)$ e $\rho(X \setminus Y) = |I \setminus Y| + \rho(B)$. Logo,

$$\rho(B) + \rho(C) = \rho(X \setminus Y) - |I \setminus Y| + \rho(Y) - |Y \cap I| = \rho(X \setminus Y) + \rho(Y) - m.$$

Concluimos que a matriz M' satisfaz as propriedades desejadas. \square

Lema 17 *Seja M uma matriz $m \times n$ e consideremos $X = [I \ M]$, sendo I a matriz identidade. É possível exibir um conjunto de colunas $Y \subseteq X$ satisfazendo (4.31) se e só se é possível exibir $S, T \subseteq X$ disjuntos satisfazendo $S \subseteq Y \subseteq X \setminus T$ e*

$$|S| = 4, |T| = 4, \quad S \cap I, S \cap M \neq \emptyset, \quad T \cap I, T \cap M \neq \emptyset. \quad (4.33)$$

Prova: (\Leftarrow) Sejam $S, T \subseteq X$ disjuntos satisfazendo $S \subseteq Y \subseteq X \setminus T$ e (4.33). Como $S \subseteq Y$ e $|S| = 4$ então $|Y| \geq 4$. Analogamente, como $T \subseteq X \setminus Y$ (pois $Y \subseteq X \setminus T$) e $|T| = 4$ então $|X \setminus Y| \geq 4$. Além disso, como $S \subseteq Y$,

$$\emptyset \neq S \cap I \subseteq Y \cap I, \quad \emptyset \neq S \cap M \subseteq Y \cap M$$

pelo que $Y \cap I, Y \cap M \neq \emptyset$. Por outro lado, como $T \subseteq X \setminus Y$,

$$\emptyset \neq T \cap I \subseteq (X \setminus Y) \cap I = I \setminus Y, \quad \emptyset \neq T \cap M \subseteq (X \setminus Y) \cap M = M \setminus Y,$$

pelo que $I \setminus Y, M \setminus Y \neq \emptyset$. Concluimos que Y satisfaz (4.31).

(\Rightarrow) Reciprocamente, seja Y satisfazendo (4.31). Seja $S \subseteq X$ constituído por quaisquer quatro elementos de Y (note-se que $|Y| \geq 4$) tais que um deles pertença a I e o outro pertença a M (note-se que $Y \cap I, Y \cap M \neq \emptyset$). Consideremos também $T \subseteq X$ constituído por quaisquer quatro elementos de $X \setminus Y$ (note-se que $|X \setminus Y| \geq 4$) tais que um deles pertença a $I \setminus Y$ e o outro pertença a $M \setminus Y$ (note-se que $I \setminus Y, M \setminus Y \neq \emptyset$). Por construção, S e T verificam (4.33). Como $S \subseteq Y$ e $T \subseteq X \setminus Y$ (ou seja $Y \subseteq X \setminus T$), então, $S \cap T = \emptyset$ e $S \subseteq Y \subseteq X \setminus T$, o que conclui a demonstração. \square

Pelos Lemas 16 e 17, determinar uma decomposição (4.29) da matriz M nas condições (4.30) tal que $\rho(B) + \rho(C)$ é o menor possível, é equivalente a exibir $S, T \subseteq X$ disjuntos a satisfazer (4.33) e um conjunto Y tal que $S \subseteq Y \subseteq X \setminus T$ e $\rho(Y) + \rho(X \setminus Y)$ ($= \rho(B) + \rho(C) - m$, por (4.32)) é o menor possível. Seguidamente, vamos exibir um algoritmo polinomial que será usado na determinação deste conjunto Y .

Teorema 42 *Seja X uma colecção de colunas e $S, T \subseteq X$ disjuntos. Existe um algoritmo polinomial que determina o valor óptimo e uma solução óptima para o seguinte problema de optimização,*

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & \rho(Y) + \rho(X \setminus Y) \\ \text{s.a} \quad & S \subseteq Y \subseteq X \setminus T. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Prova: Seja $A = X \setminus (S \cup T)$ e sejam

$$\mathcal{F}_1 = \{F \subseteq A: \rho(F \cup S) - |S| = |F|\}, \quad \mathcal{F}_2 = \{F \subseteq A: \rho(F \cup T) - |T| = |F|\}.$$

Os pares (A, \mathcal{F}_1) e (A, \mathcal{F}_2) são matróides sendo as respectivas funções características definidas por

$$r_1(F) = \rho(F \cup S) - |S|, \quad r_2(F) = \rho(F \cup T) - |T|, \quad (F \subseteq A).$$

Pelo Teorema da caracterização min-max da interseção de matróides (citar),

$$\left. \begin{array}{l} \max |I| \\ \text{s.a. } I \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \min r_1(F) + r_2(A \setminus F) \\ \text{s.a. } F \subseteq A \end{array} \right. \quad (4.35)$$

Temos que

$$\begin{aligned} r_1(F) + r_2(A \setminus F) &= \rho(F \cup S) - |S| + \rho((A \setminus F) \cup T) - |T| \\ &= -|S| - |T| + \rho(F \cup S) + \rho([(X \setminus (S \cup T)) \setminus F] \cup T) \\ &= -|S| - |T| + \rho(F \cup S) + \rho([(X \setminus (F \cup S)) \setminus T] \cup T) \\ &= -|S| - |T| + \rho(F \cup S) + \rho(X \setminus (F \cup S)) \end{aligned}$$

pois $T \subseteq X$ e $F \cup S$ e T são disjuntos. Por isso, o problema de minimização em (4.35) pode escrever-se como

$$\left. \begin{array}{l} \min -|S| - |T| + \rho(F \cup S) + \rho(X \setminus (F \cup S)) \\ \text{s.a. } F \subseteq A \end{array} \right\} \equiv \left\{ \begin{array}{l} -|S| - |T| + \min \rho(Y) + \rho(X \setminus Y) \\ \text{s.a. } S \subseteq Y \subseteq X \setminus T. \end{array} \right.$$

O problema de minimização em (4.35) é equivalente ao problema (4.34) e as respectivas soluções óptimas estão relacionadas através de $Y = F \cup S$.

É possível determinar em tempo polinomial, em $|X|$ e no número de componentes de cada coluna de X , o valor óptimo e uma solução óptima para cada um dos problemas em (4.35) pelo algoritmo para a determinação do conjunto independente em dois matróides de máxima cardinalidade proposto por Edmonds (Cunningham & Edmonds, 1980). \square

Agora, o nosso objectivo é mostrar como é que o algoritmo referido no Teorema 42 permite encontrar M' nas condições do início desta subsecção em tempo polinomial. Isto será formalizado no Teorema 43. Para isso, precisamos do seguinte lema.

Lema 18 *Seja M uma matriz $m \times n$ e consideremos $X = [I \ M]$, sendo I a matriz identidade. Se $|X| = m + n \geq 8$ então o número de pares de conjuntos de colunas de X disjuntos (S, T) a satisfazer (4.33) é*

$$\frac{1}{4}mn(m-1)(n-1)(m+n-4)(m+n-5)(m+n-6)(m+n-7) = \mathcal{O}(|X|^8). \quad (4.36)$$

Prova: Escolhamos uma coluna de I e outra coluna de M para formar S , pois S deverá ser tal que $S \cap I, S \cap M \neq \emptyset$. Temos $m \times n$ possibilidades. Em seguida, escolhamos uma outra coluna de I e uma outra coluna de M para formar T , pois T deverá ser tal que $T \cap I, T \cap M \neq \emptyset$. Temos $(m-1)(n-1)$ possibilidades. Depois, das $m+n-4$ restantes colunas, escolhamos duas quaisquer para formar S tal que $|S| = 4$. Temos C_2^{m+n-4} possibilidades. Por fim, das $m+n-6$ restantes colunas, escolhamos duas quaisquer para formar T tal que $|T| = 4$. Temos C_2^{m+n-6} possibilidades. Logo, o número de pares de colunas distintas (S, T) a satisfazer (4.33) é

$$(mn) \times [(m-1)(n-1)] \times C_2^{m+n-4} \times C_2^{m+n-6},$$

que é igual a (4.36). \square

Teorema 43 *Seja M uma matriz $m \times n$, com $m+n \geq 8$, e consideremos $X = [I \ M]$, sendo I a matriz identidade. Então, existe um algoritmo polinomial que determina uma matriz M' , obtida de M por trocas de linhas e/ou colunas, tal que*

$$M' = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \quad (4.37)$$

com, quer na matriz A quer na matriz D , soma do número de linhas com o número de colunas maior ou igual que 4 e $\rho(B) + \rho(C)$ o menor possível.

Prova: Pelo Lema 17, existe um par de conjuntos de colunas de X disjuntos (S, T) a satisfazer (4.33). Além disso, note-se que cada problema (4.34) tem sempre solução ótima porque S é admissível e o número de soluções é finito. Por isso, seja (S^*, T^*) , com S^*, T^* disjuntos, um par que satisfaz (4.33) e Y^* uma solução ótima de (4.34) para $(S, T) \equiv (S^*, T^*)$ tal que o valor ótimo $\rho(Y^*) + \rho(X \setminus Y^*)$ é o menor possível entre todos os pares (S, T) que satisfazem (4.33). Pelo Lema 18, podemos encontrar Y^* por $\mathcal{O}(|X|^8)$ repetições do algoritmo referido no Teorema 42, que é polinomial em m e $|X| = m+n$. Isto dá um tempo total que ainda é polinomial em $|X|$.

Como Y^* é solução admissível de (4.34) para $(S, T) \equiv (S^*, T^*)$, então, $S^* \subseteq Y^* \subseteq X \setminus T^*$. Pelo Lema 17, Y^* satisfaz (4.30). Logo, pelo Lema 16, é possível exibir uma matriz M' , obtida de M por trocas de linhas e/ou colunas, tal que

$$M' = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix}$$

e, quer na matriz A' quer na matriz D' , o número de linhas somado com o número de colunas é maior ou igual que 4. Além disso,

$$\rho(B') + \rho(C') = \rho(Y^*) + \rho(X \setminus Y^*) - m. \quad (4.38)$$

Consideremos uma qualquer decomposição (4.37) de M tal que, quer na matriz A quer na matriz D , o número de linhas somado com o número de colunas é maior ou igual que 4. Pelo Lema 16, existe $Y \subseteq X$ satisfazendo (4.31) e

$$\rho(B) + \rho(C) = \rho(Y) + \rho(X \setminus Y) - m. \quad (4.39)$$

Como $Y \subseteq X$ satisfaz (4.31), então, pelo Lema 17, existem $S', T' \subseteq X$ disjuntos satisfazendo $S' \subseteq Y \subseteq X \setminus T'$ e (4.33). Logo, Y é solução admissível de (4.34) para $(S, T) \equiv (S', T')$ e, como o par (S', T') satisfaz (4.33), então, por hipótese,

$$\rho(Y) + \rho(X \setminus Y) \geq \rho(Y^*) + \rho(X \setminus Y^*). \quad (4.40)$$

Por (4.38), (4.39) e (4.40),

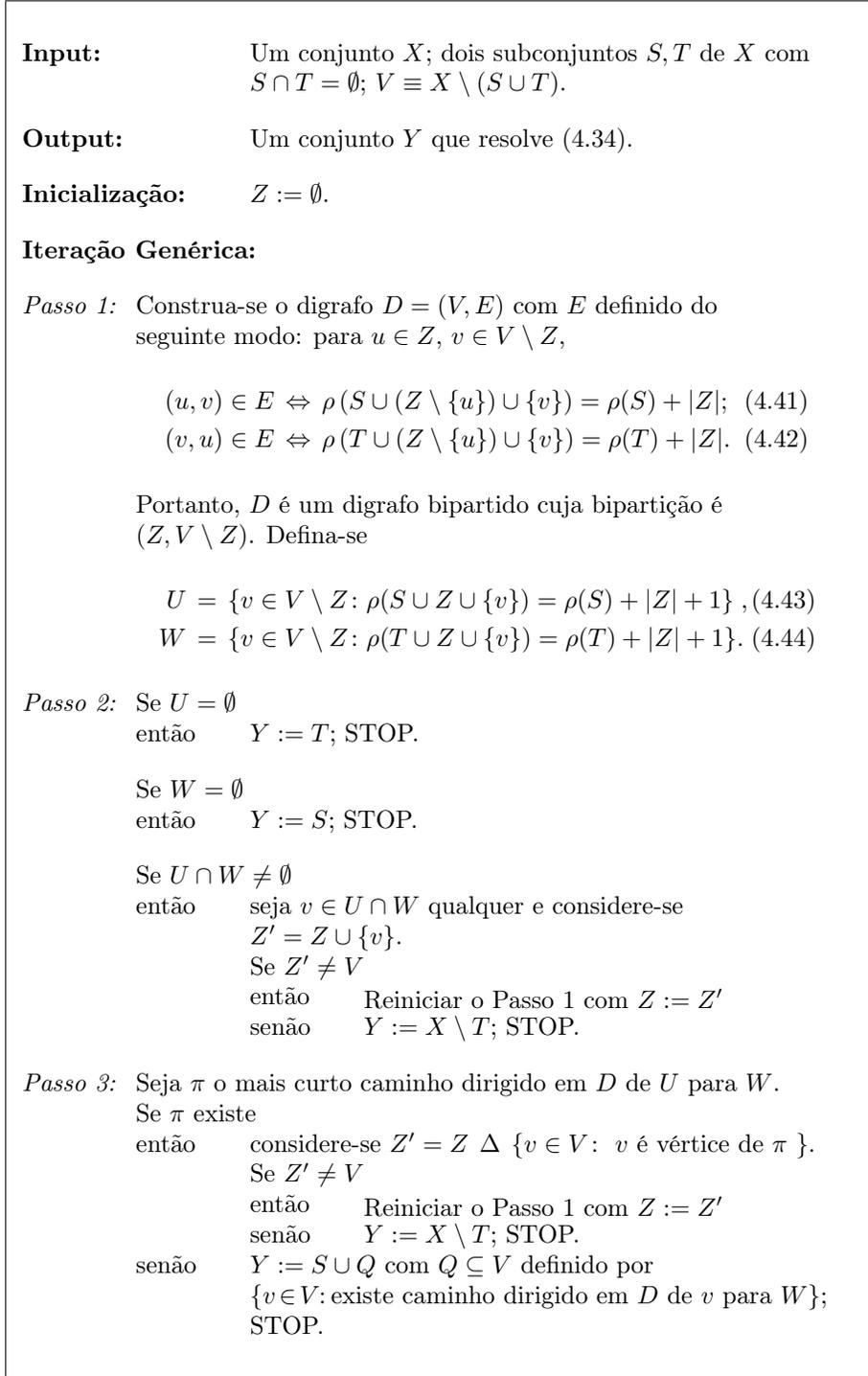
$$\rho(B) + \rho(C) \geq \rho(Y^*) + \rho(X \setminus Y^*) - m = \rho(B') + \rho(C'),$$

o que prova que M' é uma matriz que satisfaz as propriedades enunciadas. \square

Em seguida, vamos exibir uma versão do algoritmo explicitado no Teorema 42 em termos apenas de matrizes, conforme está descrito em (Schrijver, 1986). O algoritmo é descrito na página seguinte:

Algoritmo **D**(Y)

(1/1)

Figura 4.4: **D**(Y)

No final do algoritmo descrito, Y resolve (4.34). É o que mostraremos no Teorema 44. Para demonstrá-lo, precisamos do seguinte lema:

Lema 19 Durante todo o algoritmo D da Figura 4.4, o conjunto Z satisfaz

$$\begin{aligned}\rho(S \cup Z) &= \rho(S) + |Z|, \\ \rho(T \cup Z) &= \rho(T) + |Z|.\end{aligned}\tag{4.45}$$

Prova: No início do algoritmo D , $Z = \emptyset$ e Z vai sendo actualizado à medida que efectuamos os Passos 2 ou 3. Claramente, Z é actualizado no máximo $|V|$ vezes. Denotemos por Z_n a n -ésima actualização de Z ao longo do algoritmo D (no início, $Z_0 = \emptyset$). Vamos provar este lema por indução em $n \in \{0, 1, \dots, |V|\}$. Se $n = 0$, é óbvio que $Z_0 = \emptyset$ satisfaz (4.45). Suponhamos que Z_n satisfaz (4.45) e mostremos que Z_{n+1} também satisfaz. Temos dois casos: (i) Z_{n+1} obtém-se de Z_n após ter sido efectuado o Passo 2; (ii) Z_{n+1} obtém-se de Z_n após ter sido efectuado o Passo 3.

Suponhamos que se verifica (i). Então, $Z_{n+1} = Z_n \cup \{v\}$ para adequado $v \in U \cap W$, com U e W definidos em (4.43) e (4.44). Como $v \in U$ então, por (4.43),

$$\rho(S \cup Z_{n+1}) = \rho(S \cup (Z_n \cup \{v\})) = \rho(S) + |Z_n| + 1 = \rho(S) + |Z_{n+1}|.$$

Como $v \in W$ então, por (4.44),

$$\rho(T \cup Z_{n+1}) = \rho(T \cup (Z_n \cup \{v\})) = \rho(T) + |Z_n| + 1 = \rho(T) + |Z_{n+1}|.$$

Portanto, Z_{n+1} satisfaz (4.45).

Suponhamos que se verifica (ii). Então,

$$Z_{n+1} = Z_n \Delta \{v \in V : v \text{ é vértice de } \pi\},$$

em que π é o caminho dirigido mais curto em D de U para W . Sejam

$$v_0, z_1, v_1, z_2, v_2, \dots, z_t, v_t$$

os vértices de π (por esta ordem), com $v_0 \in U$, $v_t \in W$ e $z_i \in Z_n$, $v_i \in (V \setminus Z_n) \setminus (U \cup W)$, $i = 1, 2, \dots, t$ (note-se que D é bipartido). Portanto,

$$Z_{n+1} = (Z_n \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_t\}) \cup \{v_0, v_1, \dots, v_t\}.\tag{4.46}$$

Uma vez que π é um caminho mais curto em D de U para W ,

$$j \geq i + 2 \Rightarrow (v_i, z_j) \notin E,\tag{4.47}$$

$$i \geq j + 1 \Rightarrow (z_j, v_i) \notin E.\tag{4.48}$$

A seguir, vamos mostrar que todos os elementos de $(S \cup Z_n \setminus \{z_1, \dots, z_t\}) \cup \{v_1, \dots, v_t\}$ se escrevem como combinação linear de elementos de $S \cup Z_n$ e vice-versa. Como, por hipótese de indução, Z_n satisfaz (4.45) então, nenhum elemento de Z_n se escreve como combinação linear dos restantes elementos de

$S \cup Z_n$. Por isso, a primeira igualdade de (4.45) também é satisfeita para qualquer subconjunto de S e para qualquer subconjunto de Z_n . Em particular, seja S' uma base de S ; então, $\rho(S' \cup Z_n) = |S'| + |Z_n| = |S' \cup Z_n|$ pois S e $Z_n \subseteq V$ são disjuntos. Portanto, $S' \cup Z_n$ é um conjunto linearmente independente e também é uma base de $S \cup Z_n$ pois ainda $\rho(S \cup Z_n) = \rho(S' \cup Z_n) = |S' \cup Z_n|$. Seja $i \in \{1, 2, \dots, t\}$ qualquer. Como $(z_i, v_i) \in E$, $i = 1, \dots, t$, então,

$$\rho(S \cup (Z_n \setminus \{z_i\}) \cup \{v_i\}) = \rho(S) + |Z_n|. \quad (4.49)$$

Como $v_i \notin U$ então,

$$\rho(S \cup Z_n \cup \{v_i\}) = \rho(S) + |Z_n|. \quad (4.50)$$

Por (4.49) e (4.50), z_i escreve-se como combinação linear de $(S \cup Z_n \setminus \{z_i\}) \cup \{v_i\}$. Portanto,

$$z_i = \sum_{s \in S'} \alpha_s s + \sum_{z \in Z_n \setminus \{z_1, \dots, z_t\}} \beta_z z + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^t \gamma_k z_k + \varepsilon v_i, \quad (4.51)$$

para adequados $\alpha_s, \beta_z, \gamma_k, \varepsilon \in \mathbb{R}$ com $\varepsilon \neq 0$ (caso contrário, $z_i \in Z_n$ escrever-se-ia como combinação linear dos elementos de $S' \cup Z_n \setminus \{z_i\}$, o que não pode ser pois $S' \cup Z_n$ é uma base).

Vamos mostrar que $\gamma_k = 0$, para $k = 1, 2, \dots, i-1$. Por absurdo, consideremos $j \leq i-1$ tal que $\gamma_j \neq 0$. Por (4.51)

$$z_j = \sum_{s \in S'} \alpha_s^* s + \sum_{\substack{z \in Z_n \setminus \\ \{z_1, \dots, z_t\}}} \beta_z^* z + \left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{i-1} \gamma_k^* z_k + \gamma_i^* z_i + \sum_{k=i+1}^t \gamma_k^* z_k \right) + \varepsilon^* v_i, \quad (4.52)$$

para adequados $\alpha_s^*, \beta_z^*, \gamma_k^*, \varepsilon^* \in \mathbb{R}$ com $\varepsilon^*, \gamma_i^* \neq 0$. Por (4.48), $(z_j, v_i) \notin E$, ou seja,

$$\rho(S \cup (Z_n \setminus \{z_j\}) \cup \{v_i\}) = \rho(S) + |Z_n| - 1. \quad (4.53)$$

Portanto, v_i escreve-se como combinação linear dos elementos de $S \cup Z_n \setminus \{z_j\}$ (ou $S' \cup Z_n \setminus \{z_j\}$). Logo, por (4.52), z_j escreve-se como combinação linear dos elementos de $S' \cup Z_n \setminus \{z_j\}$, o que é absurdo pois $S' \cup Z_n$ é uma base. Logo, da arbitrariedade de $j \leq i-1$, $\gamma_j = 0$, para $j = 1, 2, \dots, i-1$.

Por isso, de (4.51), vem que

$$v_i = \left(\sum_{s \in S'} \alpha'_s s + \sum_{z \in Z_n \setminus \{z_1, \dots, z_t\}} \beta'_z z \right) + \sum_{k=i}^t \gamma'_k z_k,$$

para adequados $\alpha'_s, \beta'_z, \gamma'_k \in \mathbb{R}$ com $\gamma'_i \neq 0$; ou seja, existe uma matriz quadrada M triangular superior de ordem t , cujo elemento genérico da diagonal principal

situado na posição (i, i) é $\gamma'_i \neq 0$ (portanto, M é não-singular), e existem vectores $q_i \in S \cup Z_n \setminus \{z_1, \dots, z_t\}$, $i = 1, 2, \dots, t$ tal que

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_t \end{bmatrix} + M \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_t \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_t \end{bmatrix} = M^{-1} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_t \end{bmatrix} - M^{-1} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_t \end{bmatrix}, \quad (4.54)$$

o que prova que todos os os elementos de $(S \cup Z_n \setminus \{z_1, \dots, z_t\}) \cup \{v_1, \dots, v_t\}$ se escrevem como combinação linear de elementos de $S \cup Z_n$ e vice-versa.

Logo, e usando (4.46) e o facto de $v_0 \in U$,

$$\begin{aligned} \rho(S \cup Z_{n+1}) &= \rho((S \cup (Z_n \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_t\}) \cup \{v_1, v_2, \dots, v_t\}) \cup \{v_0\}) \\ &= \rho((S \cup Z_n) \cup \{v_0\}) \\ &= \rho(S) + |Z_n| + 1 \\ &= \rho(S) + |Z_{n+1}|, \end{aligned}$$

o que prova que Z_{n+1} satisfaz a primeira igualdade de (4.45). De modo análogo, provaríamos a segunda igualdade. Pelo método de indução matemática, fica provado o enunciado deste lema. \square

Note-se que, pelo Lema 19, o digrafo D está sempre bem definido, pois se Z satisfaz (4.45) então, em particular, $(\emptyset, \emptyset) \in E$ e, por isso, $E \neq \emptyset$.

Teorema 44 *O conjunto de vectores Y do final do algoritmo D resolve (4.34).*

Prova: Seja X uma colecção de colunas e S, T dois subconjuntos de X disjuntos. Queremos mostrar que Y do final do algoritmo D é a solução óptima para o seguinte problema de optimização:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & \rho(Y) + \rho(X \setminus Y) \\ \text{s.a} \quad & S \subseteq Y \subseteq X \setminus T. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Seja $V \equiv X \setminus (S \cup T)$ e consideremos a última actualização do conjunto $Z \subseteq V$ dado pelo algoritmo D . De acordo com este algoritmo,

$$Y \equiv \begin{cases} X \setminus T & \text{se} & Z = V \\ T & \text{se} & U = \emptyset \\ S & \text{se} & W = \emptyset \\ S \cup Q & \text{se} & \text{não existe qualquer caminho} \\ & & \text{dirigido em } D \text{ de } U \text{ para } W. \end{cases} \quad (4.56)$$

com $Q = \{v \in V : \text{existe caminho dirigido em } D \text{ de } v \text{ para } W\}$. Pelo Lema 19, Z satisfaz (4.45) e, por isso, nenhum elemento de Z se escreve como combinação linear dos restantes elementos de $S \cup Z$ ($T \cup Z$, resp.) Por isso, a primeira (segunda, resp.) igualdade de (4.45) também é satisfeita para qualquer subconjunto de S (T , resp.) e para qualquer subconjunto de Z . Para qualquer conjunto $C \subseteq X$ denotemos o conjunto $X \setminus C$ também por \bar{C} . Seja $S \subseteq Y' \subseteq X \setminus T$ qualquer. Como $S \subseteq Y'$ e $Y' \cap Z \subseteq Y'$ então,

$$\rho(Y') \geq \rho(S \cup (Y' \cap Z)) = \rho(S) + |Y' \cap Z|. \quad (4.57)$$

Como $T \subseteq \bar{Y}'$ e $\bar{Y}' \cap Z \subseteq \bar{Y}'$ então,

$$\rho(\bar{Y}') \geq \rho(T \cup (\bar{Y}' \cap Z)) = \rho(T) + |\bar{Y}' \cap Z|. \quad (4.58)$$

Somando (4.57) e (4.58) membro a membro, vem que

$$\rho(Y') + \rho(\bar{Y}') \geq |Z| + \rho(S) + \rho(T). \quad (4.59)$$

Se provarmos que para $Y' = Y$ temos igualdade em (4.59), provamos que $\rho(Y') + \rho(\bar{Y}') \geq \rho(Y) + \rho(\bar{Y})$ para qualquer $S \subseteq Y' \subseteq \bar{T}$, que é o pretendido.

Suponhamos que $Z = V$. Então, $Y = \bar{T}$ e o primeiro membro de (4.59) é igual a

$$\rho(\bar{T}) + \rho(T) = \rho(S \cup V) + \rho(T) = \rho(S) + |Z| + \rho(T).$$

Portanto, (4.59) verifica-se como igualdade para $Y' = Y$.

Suponhamos que $U = \emptyset$. Então, $Y = T$ e o primeiro membro de (4.59) é igual a

$$\begin{aligned} \rho(T) + \rho(\bar{T}) &= \rho(T) + \rho((S \cup Z) \cup (V \setminus Z)) \geq \rho(T) + \rho(S \cup Z) = \\ &= \rho(T) + \rho(S) + \rho(Z). \end{aligned} \quad (4.60)$$

Na desigualdade em (4.60) verifica-se igualdade, caso contrário, haveria $v \in V \setminus Z$ tal que $\rho((S \cup Z) \cup \{v\}) = \rho(S \cup Z) + 1 = \rho(S) + |Z| + 1$ e assim $v \in U$, o que é absurdo. Portanto, também neste caso, (4.59) verifica-se como igualdade para $Y' = Y$.

Se $W = \emptyset$ então, tal como no caso anterior, mostra-se que (4.59) verifica-se como igualdade para $Y' = Y (= S)$.

Suponhamos, por fim, que não existe caminho dirigido em D de U para W . Então, $Y = S \cup Q$ com Q definido como em (4.56). Suponhamos, por absurdo, que temos uma estrita desigualdade em (4.59) para $Y' = Y$. Como a desigualdade (4.59) se obteve por soma das desigualdades (4.57) e (4.58), então também pelo menos uma destas duas últimas desigualdades é uma estrita desigualdade.

Primeiro, suponhamos que $\rho(Y) > \rho(S \cup (Y \cap Z)) = \rho(Y \cap (S \cup Z))$. Então, existe um elemento $v \in Y \setminus (S \cup Z)$ que não se escreve como combinação linear dos elementos de $Y \cap (S \cup Z) = S \cup (Y \cap Z)$. Por isso,

$$\rho(S \cup (Y \cap Z) \cup \{v\}) = \rho(S \cup (Y \cap Z)) + 1 = \rho(S) + |Y \cap Z| + 1. \quad (4.61)$$

Como $v \in Q$ então, existe caminho dirigido em D de v para W . Por hipótese, $v \notin U$, ou seja,

$$\rho(S \cup Z \cup \{v\}) = \rho(S) + |Z|. \quad (4.62)$$

Por (4.61) e (4.62),

$$\begin{aligned} \rho(S \cup (Y \cap Z) \cup \{v\}) &= (\rho(S) + |Z|) - |Z \setminus Y| + 1 \\ &= \rho((S \cup (Y \cap Z) \cup \{v\}) \cup Z \setminus Y) - |Z \setminus Y| + 1 \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\rho(S \cup (Y \cap Z) \cup \{v\}) + |Z \setminus Y| > \rho((S \cup (Y \cap Z) \cup \{v\}) \cup Z \setminus Y),$$

o que significa que existe $u \in Z \setminus Y$ que se escreve como combinação linear dos restantes elementos de $S \cup (Y \cap Z) \cup \{v\} \cup Z \setminus Y = S \cup Z \cup \{v\}$. Por isso,

$$\rho(S \cup (Z \setminus \{u\}) \cup \{v\}) = \rho(S \cup Z \cup \{v\}) = \rho(S) + |Z|,$$

por (4.62). Por definição (u, v) é um arco de D . Como $v \in Q$ então também $u \in Q \subseteq Y$, o que contradiz $u \in Z \setminus Y$.

De modo análogo, se mostra que $\rho(\bar{Y}) > \rho(T \cup (\bar{Y} \cap Z))$ leva a uma contradição. Concluimos, portanto, que (4.59) se verifica como igualdade para $Y' = Y$ o que prova que $\rho(Y') + \rho(\bar{Y}') \geq \rho(Y) + \rho(\bar{Y})$ para qualquer $S \subseteq Y' \subseteq X \setminus T$, ou seja, Y do final do algoritmo D resolve (4.34). \square

Teorema 45 *O algoritmo D da Figura 4.4 resolve o problema de optimização (4.34) em tempo polinomial.*

Prova: Seja X um conjunto de vectores num espaço de dimensão m e consideremos o algoritmo D descrito na Figura 4.4. Pelo Teorema 44, este algoritmo resolve (4.34) e, portanto, falta só mostrar que o seu tempo é polinomial.

Para podermos calcular o número de operações aritméticas (somar, multiplicar, dividir ou comparar números) do Passo 1 do algoritmo D , consideremos a matriz constituída pelas colunas em $S \cup Z$ juntamente com as colunas da matriz identidade de ordem m . Se aplicarmos eliminação de Gauss nesta matriz

de maneira a transformar $S \cup Z$ numa matriz em escada de linhas, obtemos no final, a menos de trocas de linhas e colunas, uma matriz com o seguinte aspecto

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} \overbrace{\begin{matrix} * & & & \\ & * & & \\ & & \ddots & \\ & \mathbf{0} & & * \\ & & & * \end{matrix}}^{S'} & \overbrace{\begin{matrix} & & & \\ & & & \mathbf{0} \\ & * & & \\ & * & & \mathbf{0} \\ & & \ddots & \\ & \mathbf{0} & & * \\ & & & * \end{matrix}}^Z & \mathbf{0} & U \end{array} \right] \quad (4.63)$$

em que o primeiro bloco de colunas corresponde em S às colunas que constituem uma base S' de S (por isso, $|S'| = \rho(S)$), o segundo bloco de colunas corresponde às colunas de Z e U é uma adequada matriz triangular inferior de ordem m . Note-se ainda que $\rho(S \cup Z) = \rho(S) + |Z| = |S'| + |Z|$.

Consideremos $v \in V \setminus Z$ qualquer, o vector $v' = Uv$ (que corresponde a efectuar no vector v as operações anteriores do método de eliminação de Gauss) e a seguinte matriz,

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \overbrace{\begin{matrix} * & & & \\ & * & & \\ & & \ddots & \\ & \mathbf{0} & & * \\ & & & * \end{matrix}}^{S'} & \overbrace{\begin{matrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_i & \cdots & u_{|Z|} \\ \uparrow & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & & & \mathbf{0} & & \\ \uparrow & \uparrow & & \uparrow & & \\ * & * & & \uparrow & & \mathbf{0} \\ & & & \uparrow & & \mathbf{0} \\ & & & \cdots & \rightarrow & \rightarrow \\ & & & \mathbf{0} & & * \\ & & & & & * \end{matrix}}^Z & v' \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \tilde{v} \\ \bar{v}_i \\ v^* \end{array} \right\} \bar{v}$$

em que estamos a supor que $Z = \{u_1, u_2, \dots, u_{|Z|}\}$. Se $v^* \neq 0$ então $\rho(S \cup Z \cup \{v\}) = \rho(S) + |Z| + 1$ e portanto $v \in U$. Além disso, claramente, para qualquer $u \in Z$, $\rho(S \cup (Z \setminus \{u\}) \cup \{v\}) = \rho(S) + |Z|$ e, por isso, existem em D as arestas (u, v) para todo $u \in Z$. Se $v^* = 0$ então $\rho(S \cup Z \cup \{v\}) = \rho(S) + |Z|$ e, portanto,

$v \in U$. É fácil verificar que, para qualquer $i = 1, \dots, |Z|$, $\rho(S \cup (Z \setminus \{u_i\}) \cup \{v\}) = \rho(S) + |Z|$ se e só se $v_i \neq 0$. Por isso, $(v, u_i) \in E$ se e só se $v_i \neq 0$. Assim, terminámos de construir o conjunto U e todas as arestas (u, v) , com $u \in Z$ e $v \in V \setminus Z$, do digrafo D . O conjunto W e as restantes arestas (v, u) , com $v \in V \setminus Z$ e $u \in Z$, seriam construídos de modo análogo com S substituído por T .

Obter a matriz (4.63) tem tempo $\mathcal{O}[m^2(|X| + m)] \leq \mathcal{O}(m^3|X|)$. Calcular o vector $v' = Uv$ tem tempo $\mathcal{O}(m^2)$ e identificar as componentes não-nulas de v^* ou \bar{v} tem tempo $\mathcal{O}(m)$. Como, entenda-se, $\mathcal{O}(m^2) + \mathcal{O}(m) = \mathcal{O}(m^2)$, então, executando isto para qualquer $v \in V \setminus Z \subseteq X$, o tempo total fica $\mathcal{O}(m^2|X|)$. Somando este último valor com o tempo necessário para obter a matriz (4.63), obtemos ainda $\mathcal{O}(m^3|X|)$, que também é o tempo de execução das tarefas descritas quando substituímos S por T . Por isso, o tempo de construção do digrafo D no Passo 1 é $\mathcal{O}(m^3|X|)$. Claramente, ao longo do algoritmo **D**, o Passo 1 repete-se, no máximo, $|V| \leq |X|$ vezes. Isto dá um tempo total de

$$\mathcal{O}(m^3|X|^2). \quad (4.64)$$

No Passo 3 teremos de achar o caminho mais curto de U para W no digrafo D , com $|V| \leq |X|$ vértices e no máximo $2|Z|(|V| - |Z|) \leq |V|^2/2 \leq |X|^2/2$ arcos. Para isso, basta determinar os $|U||W| \leq (|V| - |Z|)^2 \leq |X|^2$ caminhos mais curtos entre qualquer vértice $u \in U$ e qualquer vértice $w \in W$. Isto pode ser feito em tempo

$$|X|^2 \mathcal{O}(|X|^2) = \mathcal{O}(|X|^4). \quad (4.65)$$

Somando (4.64) com (4.65), concluímos que o tempo total do algoritmo D é

$$\mathcal{O}(m^3|X|^2 + |X|^4) \leq \mathcal{O}(m^3|X|^4). \quad (4.66)$$

□

Resumindo, já vimos que se M for uma matriz de dimensão $m \times n$, com $m + n \geq 8$, então, com o algoritmo da intersecção de matróides de Edmonds, podemos determinar em tempo polinomial uma decomposição de M ,

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix},$$

em que, quer na matriz A quer na matriz D , a soma do número de linhas com o número de colunas é maior ou igual que 4 e $\rho(B) + \rho(C)$ o menor possível, através de, pelo Lema 18,

$$\mathcal{O}[m^2n^2(m+n)^4]$$

repetições do problema

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & \rho(Y) + \rho(X \setminus Y) \\ \text{s.a} & S \subseteq Y \subseteq X \setminus T. \end{array}$$

em que X é o conjunto de colunas da matriz $[I \ M]$. Se usarmos o algoritmo D , então, por (4.66), concluímos que a decomposição de M referida pode ser encontrada em tempo

$$\begin{aligned} & \mathcal{O}[m^2 n^2 (m+n)^4] \cdot \mathcal{O}[m^3 (m+n)^2 + (m+n)^4] \\ &= \mathcal{O}[(m^4 n^2 (m+n)^6 + mn^2 (m+n)^8) m] \leq \mathcal{O}[(m+n)^{12} m]. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Reconhecimento após decomposição

Para podermos descrever o algoritmo para reconhecer matrizes TU desta secção, e provarmos que funciona e em tempo polinomial, precisamos de encontrar uma maneira de reconhecer a Unimodularidade Total, em particular, numa matriz com o seguinte aspecto:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \quad (4.68)$$

com $\rho(B) + \rho(C) \leq 2$ e em que, quer para A quer para D , a soma do número de linhas com o número de colunas é pelo menos 4. Para isso, faremos uso dos Corolários 6, 7 e 8 da Secção 2.3. Recordamos que os Corolários 6 e 7 estabelecem condições necessárias e suficientes de Unimodularidade Total, mas o Corolário 8 estabelece apenas uma condição suficiente. Precisaremos demonstrar o recíproco deste último Corolário. A prova é algo complexa e decorrerá dos Lemas 20, 21, 22, 23 e 24 que apresentamos seguidamente.

Seja M uma matriz de zeros, uns e menos uns tal que a soma do número de linhas com o número de colunas é maior ou igual que 8. Se esse número for inferior a 8 então, averiguar se M é TU é, de acordo com o Corolário 20, essencialmente averiguar se M ou M^T é matriz de rede.

Se M é uma das matrizes em (3.26) ou se M se pode obter de uma delas por troca de linhas ou colunas e/ou por multiplicação de linhas ou colunas por -1 , então, M é TU. Caso contrário, podemos ainda averiguar (em tempo polinomial) se M ou M^T é uma matriz de rede através do algoritmo descrito na subsecção 4.2. Se M ou M^T é uma matriz de rede então, M é TU. Caso contrário, devemos obter (em tempo polinomial) uma matriz nas condições do Teorema 43. Isto é,

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (4.69)$$

sendo A, B, C, D matrizes de dimensão adequada tais que

$$\text{mín}\{m(A) + n(A), m(D) + n(D)\} \geq 4 \quad (4.70)$$

e $\rho(B) + \rho(C)$ é o menor possível.

Se $\rho(B) + \rho(C) > 2$ então, pelo Corolário 20, M não é TU. Se $\rho(B) = \rho(C) = 0$ ou se $\rho(B) = 1$ e $\rho(C) = 0$ (ou $\rho(B) = 0$ e $\rho(C) = 1$) então, pelos Corolários 6 e 7, a Unimodularidade Total de M pode ser averiguada através da averiguação da Unimodularidade Total de duas matrizes cujas somas do número de linhas com o número de colunas são, no máximo,

$$m(A) + n(A) + 1, \quad m(D) + n(D) + 1,$$

resp. No desenvolvimento que se segue, vamos supôr que $\rho(B) = \rho(C) = 1$. Na página 165 estudaremos o caso em que $\rho(B) = 2$ e $\rho(C) = 0$ (ou $\rho(B) = 0$ e $\rho(C) = 2$).

Suponhamos, então, que existem vectores-coluna a, c e vectores-linha b, d de zeros, uns e menos uns, tal que $B = ab$, $C = cd$. Usaremos a notação $\mathbf{0}$ e $\mathbf{1}$ para designar uma matriz de tudo-zeros e tudo-uns, resp. Como $\rho(B) = 1$ e B é uma matriz de zeros, uns e menos uns, então B pode ser conduzida à forma

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

através de adequadas trocas de linhas e/ou colunas, e multiplicação de linhas e/ou colunas por -1 . O mesmo se aplica à matriz C . Por isso, a matriz M pode ser conduzida a uma matriz da forma

$$M' = \left[\begin{array}{cc|cc} A'_1 & A'_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ A'_3 & A'_4 & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{1} & D'_1 & D'_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & D'_3 & D'_4 \end{array} \right] \quad (4.71)$$

através de trocas de linhas e/ou de colunas, e multiplicação de linhas e/ou colunas por -1 . Além disso, a matriz M é TU se e só se M' é TU. Seja $A' = [a'_{ij}]$ a submatriz de M' definida por

$$A' = \begin{bmatrix} A'_1 & A'_2 \\ A'_3 & A'_4 \end{bmatrix}, \quad (4.72)$$

A matriz $|A'|$ pode ser interpretada como sendo a matriz de adjacência de um grafo simples bipartido $G = (I, J; E)$. Portanto, as linhas de $|A'|$ estão associadas aos vértices I e as colunas de $|A'|$ estão associadas aos vértices J . Denote-se por $R \subseteq I$ e $K \subseteq J$ os conjuntos dos índices das linhas e das colunas, resp., da matriz $|A'_4|$.

Lema 20 *Suponhamos que se verificam as duas seguintes condições:*

- (a). *Todo o caminho em G de um vértice qualquer de R para um vértice qualquer de K contém alguma aresta $\{i, j\}$, com $i \in R$ e $j \in K$.*

(b). $A'_4 = \mathbf{0}$ ou $A'_4 = \mathbf{1}$ ou $A'_4 = -\mathbf{1}$.

Então, a matriz M é TU se e só se as submatrizes de M

$$A'_0 = \begin{bmatrix} A'_1 & A'_2 & \mathbf{0} \\ A'_3 & A'_4 & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & d \end{bmatrix} \quad e \quad D'_0 = \begin{bmatrix} a & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & D'_1 & D'_2 \\ \mathbf{0} & D'_3 & D'_4 \end{bmatrix},$$

em que a é o valor comum de todas as entradas da matriz A'_4 e d é uma entrada qualquer da matriz D'_1 , são ambas TU.

Prova:

(\Rightarrow) É imediato pois A'_0 e D'_0 são submatrizes de M .

(\Leftarrow) Suponhamos que se verifica (a). Pelo Lema 2, existem I' e J' satisfazendo $R \subseteq I' \subseteq I$ e $K \subseteq J' \subseteq J$ tal que

$$M' = I' \left\{ \begin{array}{c|cc|cc} & \overbrace{\mathbf{0}}^{\bar{J}'} & \overbrace{A'_{\bar{I}'(J' \setminus K)} \quad A'_{\bar{I}'K}}^{J'} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline & A'_{(I' \setminus R)\bar{J}'} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & A'_{R\bar{J}'} & \mathbf{0} & A'_{RK} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \hline & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & D'_1 & D'_2 \\ & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & D'_3 & D'_4 \end{array} \right\}. \quad (4.73)$$

Relembre-se que $A'_{RK} = A'_4$. Após trocar o primeiro bloco de linhas com o terceiro bloco de linhas, obtemos a matriz

$$M'' = \left[\begin{array}{c|cc|cc} A'_{R\bar{J}'} & \mathbf{0} & A'_{RK} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ A'_{(I' \setminus R)\bar{J}'} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & A'_{\bar{I}'(J' \setminus K)} & A'_{\bar{I}'K} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & D'_1 & D'_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & D'_3 & D'_4 \end{array} \right] \quad (4.74)$$

(note-se que, por hipótese, $A'_{RK} \in \{-\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}\}$). A matriz M'' está com o aspecto (4.69) com $\rho(B) + \rho(C) = 1$. Atendendo à minimalidade de $\rho(B) + \rho(C)$ em (4.69) que é, por hipótese, 2, concluímos que (4.70) não poderá ser verdade para M'' . Concluímos que

$$|(I' \setminus R) \cup R \cup \bar{J}'| = |I' \cup \bar{J}'| \leq 3. \quad (4.75)$$

Pelo Corolário 7, M'' (e, portanto, M) é TU se e só se ambas as matrizes

$$Q_1 = \left[\begin{array}{c|c} A'_{R\bar{J}'} & \mathbf{1} \\ A'_{(I' \setminus R)\bar{J}'} & \mathbf{0} \end{array} \right] \quad e \quad Q_2 = \left[\begin{array}{cc|cc} \mathbf{0} & \mathbf{a} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ A'_{\bar{I}'(J' \setminus K)} & A'_{\bar{I}'K} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & D'_1 & D'_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & D'_3 & D'_4 \end{array} \right], \quad (4.76)$$

são TU, onde $\mathbf{1}$ (na matriz Q_1) é um vector-coluna de tudo-uns e \mathbf{a} é uma qualquer linha de A'_{RK} .

Como a matriz A'_0 é TU, por hipótese, então a matriz Q_1 também é TU por ser submatriz de A'_0 . Por isso, M é TU se e só se a matriz Q_2 é TU. Como, por (4.75), $|\bar{I}' \cup J'| \leq 3$, a matriz $[A'_{\bar{I}'(J' \setminus K)} \ A'_{\bar{I}'K}]$ é 0×0 , 1×1 , 2×1 ou 1×2 . Nos casos 0×0 , 1×1 ou 2×1 , conclui-se facilmente que M é TU se e só se D'_0 é TU e, por isso, sendo D'_0 TU, por hipótese, então M é TU.

Suponhamos que aquela matriz é 1×2 e, então, consideremos dois casos: $|K| = 1$ ou $|K| = 2$. Se $|K| = 1$ então $|J' \setminus K| = 1$. Por isso, a eliminação da primeira coluna da matriz Q_2 não altera a sua Unimodularidade Total. Depois da eliminação dessa coluna, a eliminação da segunda linha também não altera a Unimodularidade Total, obtendo-se assim a matriz D'_0 . Concluímos que Q_2 (e, portanto, M) é TU se e só se D'_0 é TU. Logo, por hipótese, M é TU. Se $|K| = 2$ então $|J' \setminus K| = 0$ e, supondo que $\mathbf{a}=[a \ a]$, temos que

$$Q_2 = \begin{bmatrix} a & a & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ b & c & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & D_1 & D_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & D_3 & D_4 \end{bmatrix}.$$

para adequadas entradas b e c . A submatriz

$$\begin{bmatrix} b & c \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A'_{\bar{I}'K} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

é uma submatriz 2×2 da matriz A'_0 . Por hipótese, o seu determinante não é ± 2 . Por isso, b e c não podem ter sinais contrários. Se $b = 0$ ou $c = 0$ então a segunda linha de Q_2 tem, no máximo, um elemento não-nulo. Eliminando esta linha, não alteramos a Unimodularidade Total e, posteriormente, eliminando a primeira coluna (repetida) também não alteramos a Unimodularidade Total, obtendo-se assim D'_0 . Se $b = c \neq 0$ então, eliminando a primeira coluna (por duplicação) de Q_2 , não alteramos a Unimodularidade Total. Posteriormente, eliminando a segunda linha (tem, no máximo, um elemento não-nulo) também não alteramos a Unimodularidade Total, obtendo-se assim D'_0 . Concluímos que Q_2 (e, portanto, M) é TU se e só se D'_0 é TU. Logo, por hipótese, M é TU, o que conclui a demonstração do lema. \square

Note-se que, se não existe caminho em G de R para K então as condições (a) e (b) do lema anterior são automaticamente satisfeitas pois $A'_4 = \mathbf{0}$.

Suponhamos que existe em G pelo menos um caminho de um vértice de R para um vértice de K e seja

$$\pi \equiv r\{r, j_1\}, j_1, \{i_1, j_1\}, i_1 \dots j_p\{i_p, j_p\}i_p\{i_p, k\}k$$

o mais curto, com $r \in R$ e $k \in K$. Este caminho π é um subgrafo bipartido de G (que também é bipartido). Denote-se por $I(\pi)$ o conjunto dos vértices de I que são vértices de π e por $J(\pi)$ o conjunto dos vértices de J que são vértices de π . Claramente, $r = I(\pi) \cap R$ e $k = J(\pi) \cap K$ porque o caminho π é o mais curto. Além disso, π coincide com o subgrafo de G induzido por $I(\pi) \cup J(\pi)$, denotado $G[I(\pi) \cup J(\pi)]$. De facto, se existisse alguma aresta $\{i_0, j_0\}$ em $G[I(\pi) \cup J(\pi)] - \pi$ com $i_0 \in I(\pi)$, $j_0 \in J(\pi)$, então π conteria um ciclo, o que é absurdo porque π é um caminho mais curto. Como $\pi = G[I(\pi) \cup J(\pi)]$, a submatriz $|A'_{I(\pi)J(\pi)}|$ de $|A'|$ é matriz de adjacência do subgrafo (bipartido) π . Este subgrafo π tem um número ímpar de arestas porque $r \in I$ e $k \in J$. Por isso, a soma δ de todas as componentes de $A'_{I(\pi)J(\pi)}$ é ímpar. Defina-se o escalar

$$\varepsilon_1 = \begin{cases} 1 & \text{se } \delta \equiv 1 \pmod{4} \\ -1 & \text{se } \delta \equiv -1 \pmod{4} \quad (\equiv 3 \pmod{4}). \end{cases} \quad (4.77)$$

Agora, procedemos de forma semelhante com a matriz D' , a submatriz de M' (ver (4.71) definida por

$$D' = \begin{bmatrix} D'_1 & D'_2 \\ D'_3 & D'_4 \end{bmatrix}. \quad (4.78)$$

A matriz $|D'|$ pode ser interpretada como sendo a matriz de adjacência de um grafo simples bipartido $G^* = (I^*, J^*; E^*)$. Portanto, as linhas de $|D'|$ estão associadas aos vértices I^* e as colunas de $|D'|$ estão associadas aos vértices J^* . Denote-se por $R^* \subseteq I^*$ e $K^* \subseteq J^*$ os conjuntos dos índices das linhas e das colunas, resp., da matriz $|D'_1|$.

Lema 21 *Suponhamos que se verificam as duas seguintes condições:*

- (a). *Todo o caminho em G^* de um vértice qualquer de R^* para um vértice qualquer de K^* contém alguma aresta com uma extremidade em R^* e a outra extremidade em K^* .*
- (b). $D'_1 = \mathbf{0}$ ou $D'_1 = \mathbf{1}$ ou $D'_1 = -\mathbf{1}$.

Então, a matriz M é TU se e só se as submatrizes de M

$$A'_0 = \begin{bmatrix} A'_1 & A'_2 & \mathbf{0} \\ A'_3 & A'_4 & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & d \end{bmatrix} \quad e \quad D'_0 = \begin{bmatrix} a & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & D'_1 & D'_2 \\ \mathbf{0} & D'_3 & D'_4 \end{bmatrix},$$

em que a é uma entrada qualquer da matriz A'_4 e d é o valor comum de todas as entradas da matriz D'_1 , são ambas TU.

Prova: A demonstração é análoga à do Lema 20. \square

Note-se que, se não existe caminho em G^* de R^* para K^* então as condições (a) e (b) do Lema anterior são automaticamente satisfeitas pois $D'_1 = \mathbf{0}$.

Suponhamos que existe em G^* pelo menos um caminho de um vértice de R^* para um vértice de K^* e seja

$$\pi^* \equiv r^* \{r^*, j_1^*\}, j_1^*, \{i_1^*, j_1^*\} i_1^* \dots j_q^* \{i_q^*, j_q^*\} i_q^* \{i_q^*, k^*\} k^*$$

o mais curto, com $r^* \in R^*$ e $k^* \in K^*$. Este caminho π^* é um subgrafo bipartido de G^* . Denote-se por $I^*(\pi^*)$ o conjunto dos vértices de I^* que são vértices de π^* e por $J^*(\pi^*)$ o conjunto dos vértices de J^* que são vértices de π^* . Claramente, $r^* = I^*(\pi^*) \cap R^*$ e $k^* = J^*(\pi^*) \cap K^*$ porque o caminho π^* é o mais curto. Além disso, π^* coincide com o subgrafo de G^* induzido por $I^*(\pi^*) \cup J^*(\pi^*)$, denotado $G^*[I^*(\pi^*) \cup J^*(\pi^*)]$. De facto, se existisse alguma aresta $\{i_0^*, j_0^*\}$ em $G^*[I^*(\pi^*) \cup J^*(\pi^*)] - \pi^*$ com $i_0^* \in I^*(\pi^*)$, $j_0^* \in J^*(\pi^*)$, então π^* conteria um ciclo, o que é absurdo porque π^* é o caminho mais curto. Como $\pi^* = G^*[I^*(\pi^*) \cup J^*(\pi^*)]$, a submatriz $|D'_{I^*(\pi^*), J^*(\pi^*)}|$ de $|D'|$ é matriz de adjacência do subgrafo (bipartido) π^* . Este subgrafo π^* tem um número ímpar de arestas porque $r^* \in I^*$ e $k^* \in J^*$. Por isso, a soma δ^* das componentes de $D'_{I^*(\pi^*), J^*(\pi^*)}$ é ímpar. Defina-se o escalar

$$\varepsilon_2 = \begin{cases} 1 & \text{se } \delta^* \equiv 1 \pmod{4} \\ -1 & \text{se } \delta^* \equiv -1 \pmod{4} \quad (\equiv 3 \pmod{4}). \end{cases} \quad (4.79)$$

Lema 22 *Seja M' a matriz de zeros, uns e menos uns definida em (4.71) e seja A' a submatriz de M' definida em (4.72). Então,*

$$\det \left(\begin{array}{c|cccc} & j_1 & j_2 & \dots & j_p & k \\ \hline r & & & & & 1 \\ i_1 & & & & & 0 \\ i_2 & & & A'_{I(\pi)J(\pi)} & & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ i_p & & & & & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \varepsilon_2 \end{array} \right) = \pm(\varepsilon_1 \varepsilon_2 - 1). \quad (4.80)$$

Prova: Designemos por Q a matriz em (4.80). A menos de trocas de linhas e colunas, esta matriz tem o seguinte aspecto:

$$\begin{array}{c} r \\ i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_p \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} j_1 & j_2 & \dots & j_p & k \\ * & & & & 1 \\ * & * & & & 0 \\ & * & \ddots & & 0 \\ & & \ddots & * & \vdots \\ & & & * & * & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \varepsilon_2 \end{array} \right]$$

em que * representa uma entrada não-nula (igual a ± 1) e todo o espaço em branco representa uma entrada nula. Por isso, $|Q|$ é a matriz de adjacência de um grafo bipartido que é um ciclo e, portanto, pela Proposição 2, Q é uma matriz-ciclo. Como observámos no Corolário 12, o seu determinante pertence a $\{0, \pm 2\}$, sendo esse valor determinado pelo resto da divisão por 4 da soma dos elementos da matriz. Ora, a soma dos elementos de Q é

$$\delta + 2 + \varepsilon_2 = (4p + \varepsilon_1) + 2 + \varepsilon_2 \quad (4.81)$$

para algum inteiro p , atendendo à definição de ε_1 . O resto da divisão de (4.81) por 4 é igual a 0 se $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ (ou $\varepsilon_1\varepsilon_2 - 1 = 0$) e é igual a ± 2 se $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ (ou $\varepsilon_1\varepsilon_2 - 1 = \pm 2$). Por isso, pelo Corolário 12,

$$\det(Q) = \begin{cases} 0 & \text{se } \varepsilon_1\varepsilon_2 - 1 = 0, \\ \pm 2 & \text{se } \varepsilon_1\varepsilon_2 - 1 = \pm 2. \end{cases}$$

Dito de outro modo, $\det(Q) = \pm(\varepsilon_1\varepsilon_2 - 1)$. \square

Lema 23 *Seja M' a matriz de zeros, uns e menos uns definida em (4.71) e seja A' a submatriz de M' definida em (4.72). Consideremos a submatriz de M' definida por*

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} r \\ i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_p \end{array} \left[\begin{array}{cccc|cc} j_1 & j_2 & \dots & j_p & k & & \\ & & & & & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ & & & & & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & & & & & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & & & & & \vdots & \vdots \\ & & & & & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline & & & & & D'_1 & D'_2 \\ & & & & & D'_3 & D'_4 \end{array} \right] \end{array} \quad (4.82)$$

Se a matriz acima é TU então, a seguinte matriz é TU:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & D'_1 & D'_2 \\ \mathbf{0} & D'_3 & D'_4 \end{bmatrix}. \quad (4.83)$$

Prova: A menos de trocas de linhas e colunas, a matriz em (4.82) tem o seguinte aspecto:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} r \\ i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_p \end{array} \left[\begin{array}{cccc|cc} j_1 & j_2 & \dots & j_p & k & & \\ * & & & & & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ * & * & & & & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & * & \ddots & & & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & & \ddots & * & & \vdots & \vdots \\ & & & * & * & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline & & & & & D'_1 & D'_2 \\ & & & & & D'_3 & D'_4 \end{array} \right] \equiv S' \end{array} \quad (4.84)$$

em que “*” representa uma entrada não-nula (igual a ± 1) e todo o espaço em branco representa uma entrada nula. Percorrendo os índices de linha em S' de i_1 para i_p , multipliquemos por -1 , quando necessário, algumas das linhas indexadas por esses índices, de modo que as duas componentes não-nulas de cada coluna j_1, \dots, j_p fiquem simétricas. No final deste procedimento, a matriz obtida, digamos S'' é TU.

Denote-se por δ'' o somatório dos elementos da submatriz $S''_{I(\pi)J(\pi)}$. Observe-se que $\delta'' = \delta \pmod{4}$ porque, ao multiplicarmos linhas por -1 , apenas as duas situações seguintes podem ocorrer: se os dois elementos dessa linha são simétricos, a soma total não se altera. Se os dois elementos dessa linha são iguais, então a soma total vem acrescida de ± 4 . Agora, devido à distribuição dos elementos não-nulos de $S''_{I(\pi)J(\pi)}$, temos que $\delta'' = S''_{i_p k}$ que, como vimos, é igual a $\delta \pmod{4}$. Portanto, $S''_{i_p k} = \varepsilon_1$ e S'' é a matriz assim definida:

$$r \begin{array}{c} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_p \end{array} \left[\begin{array}{cccc|cc} j_1 & j_2 & \dots & j_p & k & & \\ * & & & & & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ * & * & & & & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & * & \ddots & & & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & & \ddots & * & & \vdots & \vdots \\ & & & * & \varepsilon_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{1} & D'_1 & D'_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & D'_3 & D'_4 \end{array} \right] \quad (4.85)$$

Denote-se por M'_1 , a matriz (4.83). Temos que $I_1^* \equiv I^* \cup \{1\}$ é o conjunto dos índices de linha de M'_1 , em que 1 é o índice da primeira linha de M'_1 . Vamos provar que M'_1 é TU através do Teorema de Ghouila-Houri. Seja $\hat{I}_1^* \subseteq I^*$ qualquer. Se $1 \notin \hat{I}_1^*$ então, como a submatriz que resulta de M'_1 por eliminação da primeira linha é TU (pois é uma submatriz de S' que, por hipótese, é TU), pelo Teorema de Ghouila-Houri, as linhas indexadas por $\hat{I}_1^* \subseteq I^*$ podem ser particionadas em duas partes tal que a soma das linhas numa parte menos a soma das linhas na outra parte é um vector de zeros, uns e menos uns.

Se $1 \in \hat{I}_1^*$, então $\hat{I}_1^* = \hat{I}^* \cup \{1\}$ para algum $\hat{I}^* \subseteq I^*$. Consideremos a colecção das linhas de S'' indexadas por $I(\pi) \cup \hat{I}^*$. Como S'' é TU então, pelo Teorema de Ghouila-Houri, existe uma partição $(I(\pi)^+ \cup (\hat{I}^*)^+, I(\pi)^- \cup (\hat{I}^*)^-)$ de $I(\pi) \cup \hat{I}^*$, com $I(\pi)^+, I(\pi)^- \subseteq I(\pi)$, $(\hat{I}^*)^+, (\hat{I}^*)^- \subseteq \hat{I}^*$ e $I(\pi)^+ \cup I(\pi)^- = I(\pi)$, $(\hat{I}^*)^+ \cup (\hat{I}^*)^- = \hat{I}^*$, tal que

$$u \equiv \sum_{i \in I(\pi)^+ \cup (\hat{I}^*)^+} S''_i - \sum_{i \in I(\pi)^- \cup (\hat{I}^*)^-} S''_i \quad (4.86)$$

é um vector de zeros, uns e menos uns. Como a submatriz de S'' indexada pelas linhas $I(\pi)$ possui elementos consecutivos por coluna com sinais contrários então,

claramente, uma e uma só das seguintes situações acontece:

$$I(\pi)^+ = I(\pi) \quad \text{ou} \quad I(\pi)^- = I(\pi). \quad (4.87)$$

Portanto,

$$u = [0 \ u_{\{k\} \cup J^*}].$$

Sem perda de generalidade, $I(\pi)^+ = I(\pi)$. Por (4.87) e (4.85),

$$\begin{aligned} u_{\{k\} \cup J^*} &= \sum_{i \in I(\pi)} \left(S''_{\{k\} \cup J^*} \right)_i + \sum_{i \in (\hat{I}^*)^+} \left(S''_{\{k\} \cup J^*} \right)_i - \sum_{i \in (\hat{I}^*)^-} \left(S''_{\{k\} \cup J^*} \right)_i \\ &= [\varepsilon_1 \ \mathbf{1} \ \mathbf{0}] + \sum_{i \in (\hat{I}^*)^+} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & D_1 & D_2 \\ \mathbf{0} & D_3 & D_4 \end{bmatrix}_i - \sum_{i \in (\hat{I}^*)^-} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & D_1 & D_2 \\ \mathbf{0} & D_3 & D_4 \end{bmatrix}_i \\ &= \sum_{i \in (\hat{I}_1^*)^+} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & D'_1 & D'_2 \\ \mathbf{0} & D'_3 & D'_4 \end{bmatrix} - \sum_{i \in (\hat{I}_1^*)^-} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & D'_1 & D'_2 \\ \mathbf{0} & D'_3 & D'_4 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.88)$$

que, por (4.86), é um vector de zeros, uns e menos uns para a seguinte partição de $\hat{I}_1^* \equiv \hat{I}^* \cup \{1\}$,

$$((\hat{I}_1^*)^+, (\hat{I}_1^*)^-) = ((\hat{I}^*)^+ \cup \{1\}, (\hat{I}^*)^-).$$

Pelo Teorema de Ghouila-Houri, M'_1 é TU. \square

Lema 24 *Seja M' a matriz de zeros, uns e menos uns definida em (4.71) e seja D' a submatriz de M' definida em (4.78). Consideremos a submatriz de M' definida por*

$$\left[\begin{array}{cc|cccc} A'_1 & A'_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ A'_3 & A'_4 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{1} & & & & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & & & & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & & & & & \\ \vdots & \vdots & & & & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & & & & & \\ & & j_1^* & j_2^* & \dots & j_q^* & k^* \end{array} \right] \begin{matrix} r^* \\ i_1^* \\ i_2^* \\ \vdots \\ i_p^* \end{matrix}. \quad (4.89)$$

Se a matriz acima é TU então, a seguinte matriz é TU:

$$\begin{bmatrix} A'_1 & A'_2 & \mathbf{0} \\ A'_3 & A'_4 & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \varepsilon_2 \end{bmatrix} \quad (4.90)$$

Prova: A prova é semelhante à do Lema 23. \square

Teorema 46 *Seja M uma matriz de zeros, uns e menos uns, tal que*

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

para adequadas matrizes A, B, C e D . Suponhamos que existem vectores-coluna a, c e vectores-linha b, d de zeros, uns e menos uns, tal que $B = ab$ e $C = cd$ e seja M' a matriz (4.71). Suponhamos também que não se verificam simultaneamente (a). e (b). do Lema 20 nem (a). e (b). do Lema 21. Sejam ε_1 e ε_2 tal como definidos em (4.77) e (4.79), resp.

Então, M é TU se e só se $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ e as matrizes

$$\begin{bmatrix} A & a & a \\ d & 0 & \varepsilon_1 \end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & b \\ c & c & D \end{bmatrix}, \quad (4.91)$$

são ambas TU.

Prova: Por hipótese, existe pelo menos um caminho em G de R para K e um caminho em G^* de R^* para K^* . Seja

$$\pi \equiv r\{r, j_1\}, j_1, \{i_1, j_1\}, i_1 \dots j_p\{i_p, j_p\}i_p\{i_p, k\}k$$

o mais curto caminho em G de R para K e seja

$$\pi^* \equiv r^*\{r^*, j_1^*\}, j_1^*, \{i_1^*, j_1^*\}i_1^* \dots j_q^*\{i_q^*, j_q^*\}i_q^*\{i_q^*, k^*\}k^*$$

o mais curto caminho em G^* de R^* para K^* . Seja, também, ε_1 tal como definido em (4.77) e ε_2 tal como definido em (4.79).

(\Leftarrow) Esta implicação decorre do Corolário 8.

(\Rightarrow) Como M é TU, M' é igualmente TU e as matrizes

$$\begin{array}{c} r \\ i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_p \end{array} \begin{array}{c} j_1 \quad j_2 \quad \dots \quad j_p \quad k \\ \left[\begin{array}{cc|cc} \mathbf{1} & \mathbf{0} & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & & \\ \vdots & \vdots & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & & \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right] \begin{array}{c} D'_1 \\ D'_2 \\ D'_3 \\ D'_4 \end{array} \end{array} \quad e \quad \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc|cc} A'_1 & A'_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ A'_3 & A'_4 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{1} & & & & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & & & & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & & & & & \\ \vdots & \vdots & & & & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & & & & & \end{array} \right] \begin{array}{c} r^* \\ i_1^* \\ i_2^* \\ \vdots \\ i_p^* \end{array} \end{array} \begin{array}{c} D'_{I(\pi^*)^* J(\pi^*)^*} \\ j_1^* \quad j_2^* \quad \dots \quad j_q^* \quad k^* \end{array}$$

também são TU, por serem submatrizes de M' . Por outro lado, pelos Lemas 23 e 24,

$$\hat{A}' \equiv \begin{bmatrix} A'_1 & A'_2 & \mathbf{0} \\ A'_3 & A'_4 & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \varepsilon_2 \end{bmatrix} \quad e \quad \hat{D}' \equiv \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & D'_1 & D'_2 \\ \mathbf{0} & D'_3 & D'_4 \end{bmatrix},$$

também são TU. Seguidamente, vamos mostrar que as matrizes

$$\bar{A}' \equiv \begin{bmatrix} A'_1 & A'_2 & \mathbf{0} \\ A'_3 & A'_4 & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \bar{D}' \equiv \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & D'_1 & D'_2 \\ \mathbf{0} & D'_3 & D'_4 \end{bmatrix}.$$

também são TU começando com \bar{D}' . Podemos supôr que A'_4 não tem entradas nulas. De facto, se A'_4 contivesse alguma entrada nula então, \bar{D}' seria uma submatriz de M' e, por isso, seria TU. Seja a'_{ij} uma entrada qualquer de A'_4 . Como \hat{A}' é TU então

$$\det \left(\begin{bmatrix} a'_{ij} & 1 \\ 1 & \varepsilon_2 \end{bmatrix} \right) = a'_{ij}\varepsilon_2 - 1 \in \{-1, 0, 1\}. \quad (4.92)$$

Como $a'_{ij}, \varepsilon_2 \in \{-1, 1\}$ então, por (4.92), $a'_{ij}\varepsilon_2 - 1 = 0$, isto é, $a'_{ij} = \varepsilon_2$. Logo, todas as entradas de A'_4 são iguais a ε_2 , isto é, $A'_4 = \mathbf{1}$ ou $A'_4 = -\mathbf{1}$. Por hipótese, G contém um caminho de R para K que não contém nenhuma aresta $\{i, j\}$ com $i \in R$ e $j \in K$. Seja

$$\bar{\pi} \equiv \bar{r}\{\bar{r}, \bar{j}_1\}, \bar{j}_1, \{\bar{i}_1, \bar{j}_1\}, \bar{i}_1 \dots \bar{j}_p\{\bar{i}_p, \bar{j}_p\}\bar{i}_p\{\bar{i}_p, \bar{k}\}\bar{k}$$

o caminho mais curto em G de R para K nestas condições. Como M' é TU então, a submatriz de M'

$$\begin{array}{c} \bar{r} \\ \bar{i}_1 \\ \bar{i}_2 \\ \vdots \\ \bar{i}_p \end{array} \begin{array}{c} \bar{j}_1 \quad \bar{j}_2 \quad \dots \quad \bar{j}_p \quad \bar{k} \\ \left[\begin{array}{cccc|cc} & & & & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ & & & & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & & & & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & & & & \vdots & \vdots \\ & & & & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \end{array} \right] \begin{array}{c} D'_1 \\ D'_2 \\ D'_3 \\ D'_4 \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} \bar{r} \\ \bar{i}_1 \\ \bar{i}_2 \\ \vdots \\ \bar{i}_p \end{array} \begin{array}{c} \bar{j}_1 \quad \bar{j}_2 \quad \dots \quad \bar{j}_p \quad \bar{k} \\ \left[\begin{array}{cccc|cc} * & & & & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ * & * & & & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & * & \ddots & & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & & \ddots & * & \vdots & \vdots \\ & & & * & * & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \end{array} \right] \begin{array}{c} D'_1 \\ D'_2 \\ D'_3 \\ D'_4 \end{array} \end{array} \quad (4.93)$$

em que “*” representa uma entrada não-nula (igual a ± 1) e todo o espaço em branco representa uma entrada nula, também é TU. Como $\bar{\pi}$ tem comprimento maior ou igual que 3 então, \bar{D}' é uma submatriz da matriz (4.93) e, por isso, \bar{D}' é TU. Portanto, quer A'_4 tenha ou não entradas nulas, \bar{D}' é TU. De igual modo, concluiríamos que \bar{A}' também é TU.

Uma vez que \hat{D}' e \bar{D}' são TU então, pelo exposto imediatamente a seguir ao Corolário 9 da Secção 2.3,

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & D'_1 & D'_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & D'_3 & D'_4 \end{bmatrix} \quad (4.94)$$

é TU. Uma vez que \hat{A}' e \bar{A}' também são TU então, pelo Corolário 9 da Secção 2.3,

$$\begin{bmatrix} A'_1 & A'_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ A'_3 & A'_4 & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & 0 & \varepsilon_2 \end{bmatrix} \quad (4.95)$$

também é TU.

Mostremos, agora, que $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$. Observe-se que a seguinte matriz

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} j_1 & j_2 & \dots & j_p & k \\ r \\ i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_p \end{matrix} \left[\begin{array}{cccc|c} & & & & 1 \\ & & & & 0 \\ & & & & 0 \\ & & & & \vdots \\ & & & & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \hline & & & & \varepsilon_2 \end{array} \right] \end{array} \quad (4.96)$$

é uma submatriz da matriz (4.95) que é TU, como vimos. Por isso, o seu determinante, que pelo Lema 22 é igual a $\pm(\varepsilon_1\varepsilon_2 - 1)$, pertence a $\{0, \pm 1\}$. Como $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{-1, 1\}$, $\varepsilon_1\varepsilon_2 - 1 = 0$, isto é $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$.

Consideremos as matrizes (4.91). A matriz (4.94) obtém-se da matriz do lado direito de (4.91) através de trocas de linhas e de colunas indexadas pela matriz D , e por multiplicação por -1 de algumas destas mesmas linhas e colunas. A matriz (4.95) obtém-se da matriz do lado esquerdo de (4.91) através de trocas de linhas e de colunas indexadas pela matriz A , e de multiplicação por -1 de algumas destas mesmas linhas e colunas. Como as matrizes (4.94) e (4.95) são TU, então, as matrizes (4.91) são TU, o que prova o teorema. \square

Até aqui, temos vindo a supor que, em (4.69), $\rho(B) = 1$ e $\rho(C) = 1$. Agora, suponhamos que $\rho(B) = 2$ e $\rho(C) = 0$.

Lema 25 *Seja M uma matriz de zeros, uns menos uns, que admite uma decomposição (4.69) satisfazendo (4.70) com $\rho(B) = 2$, $\rho(C) = 0$ e $\rho(B) + \rho(C)$ o menor possível. Então, existe uma matriz M' de zeros, uns e menos uns, com o mesmo número de linhas e colunas e que também admite uma decomposição (4.69) satisfazendo (4.70) mas com $\rho(B) = 1$, $\rho(C) = 1$ e, ainda, $\rho(B) + \rho(C)$ o menor possível. Mais, M é TU se e só se M' é TU.*

Prova: Este resultado é uma consequência quase imediata do Lema 9 e do Teorema 10. Com efeito, como $\rho(B) = 2$, existe uma entrada $\varepsilon \neq 0$ de B . Tal como fizemos na demonstração do Lema 9, se pivotarmos neste elemento, podemos obter uma matriz

$$M' = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix}$$

com

$$m(A') + n(A') = m(A) + n(A) \quad (\text{e, portanto, } m(D') + n(D') = m(D) + n(D)),$$

$$\rho(B') = \rho(B) - 1 = 1 \quad \text{e} \quad \rho(C') = \rho(C) + 1 = 1.$$

Pela Observação 4, $\rho(B') + \rho(C')$ é o menor possível, por hipótese. Pelo Teorema 10, M é TU se e só se M' é TU. \square

Estamos agora, finalmente, em condições de descrever o algoritmo para reconhecimento da Unimodularidade Total de uma matriz de zeros, uns e menos uns.

Algoritmo **TU**(M)

(1/2)

Input: Matriz M de zeros, uns e menos uns.**Output:** *Verdadeiro* se M é TU
Falso se M não é TU**Iteração Genérica:***Passo 0:* Eliminar de M as linhas e as colunas com, no máximo, um elemento não nulo.
Eliminar de M as linhas e as colunas repetidas ou simétricas.*Passo 1:* Se M é uma das duas matrizes em (3.26) ou se M se pode obter de uma delas através de operações elementares (troca de linhas ou colunas, multiplicação de linhas ou colunas por -1)
então $\text{TU} := \text{Verdadeiro}$; STOP.
Se M ou M^T é matriz de rede
então $\text{TU} := \text{Verdadeiro}$; STOP.
Se $m(M) + n(M) < 8$
então $\text{TU} := \text{Falso}$; STOP.*Passo 2:* Efectuar operações elementares de modo a obter

$$M' = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

tal que $m\{m(A) + n(A), m(D) + n(D)\} \geq 4$ e $\rho(B) + \rho(C)$ seja o menor possível.Se $\rho(B) + \rho(C) > 2$
então $\text{TU} := \text{Falso}$; STOP.
Se $\rho(C) > \rho(B)$
então M' passa a ser o seu transposto.*Passo 3:* Se $\rho(B) = 0$ e $\rho(C) = 0$
então $\text{TU} := (\text{TU}(A) \text{ e } \text{TU}(D))$; STOP.Se $\rho(B) = 1$ e $\rho(C) = 0$ (*i.e.*, $B = ab$)
então $\text{TU} := (\text{TU}([A \ a]) \text{ e } \text{TU}\left(\begin{bmatrix} b \\ D \end{bmatrix}\right))$; STOP.Se $\rho(B) = 2$ e $\rho(C) = 0$
então fazer em M' uma operação pivotal usando como *pivot* uma qualquer entrada não-nula de B .
Se a matriz transformada tem alguma entrada igual a ± 2
então $\text{TU} := \text{Falso}$; STOP.
Trocar as linhas da matriz transformada de modo a obter uma matriz com o seguinte aspecto:

$$\begin{bmatrix} A^* & B^* \\ C^* & D^* \end{bmatrix}$$

Algoritmo **TU**(M)

(2/2)

onde $m\{m(A^*) + n(A^*), m(D^*) + n(D^*)\} \geq 4$ e
 $\rho(B^*) = \rho(C^*) = 1$.

Considerar uma nova matriz $M' = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} A^* & B^* \\ C^* & D^* \end{bmatrix}$.

Passo 4: Se $\rho(B) = 1$ e $\rho(C) = 1$ (i.e., $B = ab$ e $C = cd$)
então efectuar operações elementares (troca de linhas ou colunas,
multiplicação de linhas ou colunas por -1) de modo a obter

$$M'' = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ A_3 & A_4 & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & D_1 & D_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & D_3 & D_4 \end{bmatrix}$$

com

$$A'' = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \quad e \quad D'' = \begin{bmatrix} D_1 & D_2 \\ D_3 & D_4 \end{bmatrix}.$$

Seja I (R , resp.) o conjunto de índices de linha de A'' (A_4 , resp.) e seja J (K , resp.) o conjunto de índices de coluna de A'' (A_4 , resp.). Seja, também, $G = G(I, J, E)$ o grafo bipartido cuja matriz de adjacência é $|A''|$.

De igual modo, seja I^* (R^* , resp.) o conjunto de índices de linha de D'' (D_1 , resp.) e seja J^* (K^* , resp.) o conjunto de índices de coluna de D'' (D_1 , resp.). Seja $G^* = G(I^*, J^*, E^*)$ o grafo bipartido cuja matriz de adjacência é $|D''|$.

Se se verificam ambas as condições (a) e (b) do Lema 20 ou ambas as condições (a) e (b) do Lema 21

então $\mathbf{TU} := (\mathbf{TU} \left(\begin{bmatrix} A & a \\ d & \beta \end{bmatrix} \right) e \mathbf{TU} \left(\begin{bmatrix} \alpha & b \\ c & D \end{bmatrix} \right));$

em que α e β são duas entradas quaisquer das matrizes A_4 e D_1 , resp.; STOP.

senão Seja π o caminho mais curto em G de R para K .
Defina-se ε_1 de acordo com (4.77).
Seja π^* o caminho mais curto em G^* de R^* para K^* .
Defina-se ε_2 de acordo com (4.79).

Se $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$
então $\mathbf{TU} := \text{Falso}$; STOP.

senão $\mathbf{TU} := (\mathbf{TU} \left(\begin{bmatrix} A & a & a \\ d & 0 & \varepsilon_1 \end{bmatrix} \right) e \mathbf{TU} \left(\begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & b \\ c & c & D \end{bmatrix} \right));$
STOP.

Figura 4.5: **TU**(M)

No próximo teorema concluímos que o algoritmo acabado de descrever funciona e em tempo polinomial.

Teorema 47 *Dada uma matriz M , de zeros, uns e menos uns, existe um algoritmo que em tempo polinomial averigua se M é Totalmente Unimodular ou não.*

Prova: Seja M uma matriz com m linhas e n colunas e consideremos o algoritmo **TU** descrito nas páginas 167-168. Após o Passo 0, não alterámos a Unimodularidade Total de M e a verificação da condição (c) do Corolário 20 do Teorema de Seymour (Teorema 29) fica impedida. O Passo 0 tem tempo computacional $\mathcal{O}(m^2n^2)$ por termos de eliminar de M as linhas e as colunas repetidas ou simétricas.

No Passo 1, averigua-se se M ou M^T pertence a uma subclasse das matrizes TU. Se sim, então, M é TU. Se não, então, ficando também impedidas a verificação das condições (a) e (b) do Corolário 20, se M é TU então deve verificar-se (d). Em particular, se $m+n < 8$ então, a matriz M não pode ser TU. A primeira tarefa, verificar se M é uma das, no máximo, $2 \times (2^5 \times 2^5 \times 5! \times 5!)$ diferentes matrizes que se podem obter a partir de uma qualquer das duas matrizes (3.26) através de operações elementares (troca de linhas ou colunas, multiplicação de linhas ou colunas por -1), emprega tempo $\mathcal{O}(mn)$. A segunda tarefa, verificar se M ou M^T é matriz de rede, emprega tempo $\mathcal{O}(m^5n^4) + \mathcal{O}(n^5m^4) = \mathcal{O}(m^5n^5)$, pelo Teorema 41, e que é, portanto, também o tempo total empregue no Passo 1 (e até ao Passo 1) do algoritmo **TU**. Por isso, existe uma constante $c_1 > 0$ tal que

$$c_1(m^5n^4 + n^5m^4) = c_1(m^4n^4 + n^4m^3)m \leq c_1(m+n)^8m \quad (4.97)$$

é um majorante para o tempo que o algoritmo **TU** emprega a implementar as tarefas dos Passos 0 e 1.

No Passo 2, efectuam-se operações elementares (troca de linhas ou colunas, multiplicação de linhas ou colunas por -1) na matriz M de modo a obter uma matriz M' definida por

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (4.98)$$

para adequadas matrizes A , B , C e D de modo a satisfazer

$$\text{mín}\{m(A) + n(A), m(D) + n(D)\} \geq 4 \quad (4.99)$$

e tal que $\rho(B) + \rho(C)$ seja o menor possível. Pelo exposto na subsecção 4.2, podemos fazer isto em tempo limitado por (ver (4.67))

$$c_2(m+n)^{12}m, \quad (4.100)$$

para alguma constante $c_2 > 0$. Seja $c \geq 2\max\{c_1, c_2\}$ e, sem perda de generalidade, $c \geq 1$, em que c_1 e c_2 são as constantes que figuram em (4.97) e (4.100)),

resp. Então, claramente,

$$c(m+n)^{12}m \quad (4.101)$$

é um majorante para a soma dos tempos (4.97) e (4.100)), isto é, para o tempo total das tarefas envolvidas até ao Passo 2.

Se $\rho(B) + \rho(C) > 2$ (as características de B e C , submatrizes de M' , podem ser determinadas usando o método de eliminação de Gauss em tempo $\mathcal{O}(m^2n)$, claramente inferior a (4.100)) então M também não satisfaz (d) do Corolário 20 e, esgotadas as condições deste Corolário, M não é TU. Se $\rho(B) + \rho(C) \leq 2$ temos que considerar 6 casos: (i) $\rho(B) + \rho(C) = 0$; (ii) $\rho(B) = 1$ e $\rho(C) = 0$; (iii) $\rho(B) = 0$ e $\rho(C) = 1$; (iv) $\rho(B) = 2$ e $\rho(C) = 0$; (v) $\rho(B) = 0$ e $\rho(C) = 2$; (vi) $\rho(B) = 1$ e $\rho(C) = 1$. Os casos (iii) e (v) podem ser reduzidos aos casos (ii) e (iv), resp., se substituirmos M' pela sua transposta pois uma matriz é TU se e só se a sua transposta também é TU. Portanto, analisaremos agora os casos (i), (ii), (iv) e (vi). No Passo 3, analisamos os casos (i), (ii) e (iv), e no Passo 4 analisamos o caso (vi).

Se $\rho(B) = 0$ e $\rho(C) = 0$ então, pelo Corolário 6, M' (e, portanto, M) é TU se e só se A e D são TU. Se $\rho(B) = 1$ (i.e., $B = ab$ para adequado vector-coluna a e adequado vector-linha b) e $\rho(C) = 0$ então, pelo Corolário 7, M' (e, portanto, M) é TU se e só se as matrizes $[A \ a]$ e $\begin{bmatrix} b \\ D \end{bmatrix}$ são TU. Portanto, neste caso, a Unimodularidade Total de M pode ser verificada através da averiguação da Unimodularidade Total de duas matrizes cujas somas do número de linhas com o número de colunas são, no máximo,

$$m(A) + n(A) + 1, \quad m(D) + n(D) + 1, \quad (4.102)$$

resp. Se $\rho(B) = 2$ e $\rho(C) = 0$ então, pelo Lema 25, a Unimodularidade Total de M' pode ser verificada através averiguação da Unimodularidade Total de uma matriz M^* com as mesmas dimensões que M' (que resulta de M' por trocas de linhas e colunas e uma operação pivotal) e que admite uma decomposição (4.98) que satisfaz (4.99) e $\rho(B) = \rho(C) = 1$. Portanto, ficamos na situação (vi). Todas as operações envolvidas no Passo 3 podem ser executadas em tempo $\mathcal{O}(mn)$ e, portanto, até ao Passo 3, o tempo do algoritmo é dominado por (4.101).

Finalmente, no Passo 4, consideremos a situação (vi). É conhecida uma decomposição (4.98) de M' (ou M^*) satisfazendo (4.99) e $\rho(B) = \rho(C) = 1$. Neste Passo, começamos por efectuar operações elementares na matriz M' de modo a obter

$$M'' = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ A_3 & A_4 & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & D_1 & D_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & D_3 & D_4 \end{bmatrix}$$

com

$$A'' = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D'' = \begin{bmatrix} D_1 & D_2 \\ D_3 & D_4 \end{bmatrix},$$

o que leva tempo $\mathcal{O}(mn)$. Seja I (R , resp.) o conjunto de índices de linha de A'' (A_4 , resp.) e seja J (K , resp.) o conjunto de índices de coluna de A'' (A_4 , resp.). Seja também, $G = G(I, J, E)$ o grafo bipartido cuja matriz de adjacência é $|A''|$. De igual modo, seja I^* (R^* , resp.) o conjunto de índices de linha de D'' (D_1 , resp.) e seja J^* (K^* , resp.) o conjunto de índices de coluna de D'' (D_1 , resp.). Seja também, $G^* = G^*(I^*, J^*, E^*)$ o grafo bipartido cuja matriz de adjacência é $|D''|$.

Suponhamos que se verificam ambas as condições (a) e (b) do Lema 20 ou ambas as condições (a) e (b) do Lema 21. Para averiguar isto, basta, por exemplo, no caso do grafo G , retirar as arestas $\{i, j\}$, $i \in R$, $j \in K$ e averiguar a existência de algum caminho em G (G tem $m(A) + n(A)$ vértices e, no máximo, $m(A)n(A)$ arestas - lembre-se que G é bipartido) de R para K no novo grafo. Este problema pode ser resolvido determinando os $|R||K| \leq m_A n_A$ caminhos mais curtos entre qualquer vértice $r \in R$ e qualquer vértice $k \in K$. Isto pode ser feito em tempo $m(A)n(A)\mathcal{O}(m(A)n(A)) = \mathcal{O}(m(A)^2n(A)^2)$. De modo análogo, no caso do digrafo G^* , obteríamos $\mathcal{O}(m(D)^2n(D)^2)$. Somando, obtém-se

$$\mathcal{O}(m(A)^2n(A)^2 + m(D)^2n(D)^2) \leq \mathcal{O}(m^2n^2) \leq \mathcal{O}[(m+n)^4], \quad (4.103)$$

pelo que (4.101) continua a ser o tempo das tarefas executadas até aqui. Pelos Lemas 20 e 21, M é TU se e só se as matrizes

$$\begin{bmatrix} A'_1 & A'_2 & \mathbf{0} \\ A'_3 & A'_4 & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & d \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} a & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & D_1 & D_2 \\ \mathbf{0} & D_3 & D_4 \end{bmatrix}, \quad (4.104)$$

em que a e d são entradas quaisquer das matrizes A_4 e D_1 , resp., são ambas TU. As somas do número de linhas com o número de colunas das duas matrizes (4.104) são, resp.,

$$m(A) + n(A) + 2, \quad \text{e} \quad m(D) + n(D) + 2. \quad (4.105)$$

Por fim, no Passo 4, suponhamos que não se verificam simultaneamente 1 e 2 do Lema 20 nem 1 e 2 do Lema 21. Em particular, existe caminho em G de R para K e existe caminho em G^* de R^* para K^* . Seja π (π^*) o caminho mais curto em G (G^*) de R (R^*) para K (K^*) (como já vimos, esta tarefa emprega tempo dado por $\mathcal{O}[(m+n)^4]$). Defina-se ε_1 de acordo com (4.77) e ε_2 de acordo com (4.79). Se $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ então, pelo Teorema 46, M' (e M) não é TU. Se $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ e M (e M') é TU, então, pelo mesmo Teorema, as matrizes

$$\begin{bmatrix} A & a & a \\ d & 0 & \varepsilon_1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & b \\ c & c & D \end{bmatrix} \quad (4.106)$$

são TU. Reciprocamente, se as matrizes (4.106) são TU, então, pelo Corolário 8, M' (e, portanto, M) é TU. Portanto, se $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ então, M é TU se e só se as matrizes (4.106) são TU (e assim termina o Passo 4). Portanto, nestas condições, a Unimodularidade Total de M pode ser verificada através da averiguação da Unimodularidade Total de duas matrizes cujas somas do número de linhas com o número de colunas são, no máximo, resp.,

$$m(A) + n(A) + 3, \quad m(D) + n(D) + 3. \quad (4.107)$$

Em conclusão, com o algoritmo **TU** descrito nas páginas 167-168, ou concluímos até ao Passo 2 (inclusivé) que M é ou não TU em tempo polinomial limitado, de acordo com (4.101), por $c(m+n)^{12}m$, para uma adequada constante $c \geq 1$, ou averiguar a Unimodularidade Total de M é equivalente a averiguar a Unimodularidade Total de duas matrizes cujas somas do número de linhas com o número de colunas são, no máximo, $m(A) + n(A) + 3$ e $m(D) + n(D) + 3$, resp., em que $m(A) + m(D) = m$, $n(A) + n(D) = n$ e $m(A) + n(A), m(D) + n(D) \geq 4$. Portanto, o tempo do algoritmo **TU** aplicado à matriz M é a soma de três parcelas: o tempo para executar as tarefas até ao Passo 2 (inclusivé) mais (se entrarmos no Passo 3 ou seguintes) os dois tempos totais do algoritmo **TU** quando aplicado às duas matrizes referidas.

Vamos mostrar por indução em $m+n \geq 8$ que o algoritmo **TU**, até decidir se M é ou não TU, emprega um tempo computacional limitado por $C(m+n)^{13}m$ para alguma constante

$$C > c \sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k},$$

sendo $c \geq 1$ a constante que figura em (4.101), sem perda de generalidade. Suponhamos que isto é verdade para uma qualquer matriz com no máximo m linhas e no máximo n colunas e cuja soma do número de linhas com o número de colunas é menor que $m+n$. Se $m+n = 8$ então $C(m+n)^{13} \geq 8^{13}$, que é, claramente, um majorante do número de operações a efectuar por este algoritmo para concluir se uma matriz, cuja soma do número de linhas com o número de colunas é somente 8, é ou não TU.

Suponhamos que $m+n > 8$. Por comodidade, denotemos agora $m(A)$, $n(A)$ por m_1 , n_1 , resp., e $m(D)$, $n(D)$ por m_2 e n_2 , resp. Como $m_1, m_2 \leq m$, $n_1, n_2 \leq n$ e $m_1 + n_1, m_2 + n_2 \geq 4$, então

$$\begin{aligned} (m_1 + n_1) + 3 &= [m + n - (m_2 + n_2)] + 3 \leq m + n - 1 \quad \text{e} \\ (m_2 + n_2) + 3 &= [m + n - (m_1 + n_1)] + 3 \leq m + n - 1. \end{aligned} \quad (4.108)$$

Por hipótese de indução, o tempo que o algoritmo **TU** emprega a decidir se M é ou não TU, é limitado por

$$c(m+n)^{12}m + C(m_1 + n_1 + 3)^{13}m_1 + C(m_2 + n_2 + 3)^{13}m_2. \quad (4.109)$$

Agora, usando a fórmula do binômio de Newton temos que

$$\begin{aligned}
c(m+n)^{12}m &= c[(m+n-1)+1]^{12}m = c\left(\sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k} (m+n-1)^k\right)m \\
&\leq c\left(\sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k} (m+n-1)^{12}\right)m \leq C(m+n-1)^{12}m \\
&\leq 13C(m+n-1)^{12}m \leq C\left[\sum_{i=0}^{12} (m+n)^i (m+n-1)^{12-i}\right]m \\
&= C[(m+n)^{13} - (m+n-1)^{13}]m. \tag{4.110}
\end{aligned}$$

Por (4.108) e (4.110), (4.109) é menor ou igual a

$$\begin{aligned}
C[(m+n)^{13} - (m+n-1)^{13}]m + C(m+n-1)^{13}m_1 + C(m+n-1)^{13}m_2 &= \\
&= C(m+n)^{13}m, \tag{4.111}
\end{aligned}$$

atendendo a que $m_1 + m_2 = m$. □

Capítulo 5

Matriz quase Totalmente Unimodular

Neste capítulo desenvolvemos o conceito de matriz quase Totalmente Unimodular, que é uma matriz que não é Totalmente Unimodular mas qualquer sua submatriz própria é.

Portanto, em particular, uma matriz quase Totalmente Unimodular é uma matriz de zeros, uns ou menos uns. É fácil verificar que tem que ser quadrada e deverá possuir pelo menos duas entradas não-nulas por linha e por coluna. Decorre, então, de algumas das caracterizações de matriz Totalmente Unimodular expostas na Secção 2.3, que: toda a matriz quase Totalmente Unimodular tem determinante igual a ± 2 ; toda a linha e toda a coluna têm um número par de componentes não-nulas; e, a soma de todas as entradas desta matriz é igual a 2 (módulo 4). No entanto, veremos que estas não são condições suficientes para que uma matriz seja quase Totalmente Unimodular.

Como o determinante de uma matriz A quase Totalmente Unimodular é igual a ± 2 então A é não-singular e $\det(A^{-1}) = \pm \frac{1}{2}$. Mais, como $A^{-1} = (1/\det(A))\text{adj}(A)$ e as componentes da matriz $\text{adj}(A)$ são, a menos de um sinal, os determinantes de adequadas submatrizes próprias de A que, por hipótese, são iguais a 0 ± 1 , então, concluímos que a matriz A^{-1} tem apenas componentes $0, \pm \frac{1}{2}$. Portanto, o determinante de qualquer submatriz quadrada de A^{-1} não-singular é igual a $\pm \frac{1}{2}$. Mostraremos que o determinante de qualquer submatriz não-singular de A^{-1} também é igual a $\pm \frac{1}{2}$ e que o recíproco também é verdade, ou seja, se A for uma matriz quadrada não-singular e se o determinante de qualquer submatriz não-singular de A^{-1} for igual a $\pm \frac{1}{2}$, então A é quase Totalmente Unimodular. Assim, teremos obtido uma outra caracterização das matrizes quase Totalmente Unimodulares.

Como vimos no parágrafo anterior, se A é uma matriz quase Totalmente Unimodular então, a matriz A^{-1} tem apenas componentes $0, \pm \frac{1}{2}$. Camion e

Gomory (ver (Camion, 1965)) mostraram ainda que A^{-1} tem apenas entradas iguais a $\pm\frac{1}{2}$. Por isso, após adequadas multiplicações de linhas e/ou colunas de A^{-1} por -1 , esta matriz pode escrever-se de forma única como a soma de duas matrizes do seguinte modo:

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{array} \right] -U, \quad (5.1)$$

em que a matriz do lado esquerdo em (5.1) é uma matriz quadrada de tudo uns e U é uma adequada matriz quadrada de zeros e uns. Veremos que U pertence a uma classe de matrizes Totalmente Unimodulares muito restrita, que são as matrizes Totalmente Unimodulares por Complementos, que definiremos na Secção 5.1. Truemper (Truemper, 1980) mostrou que o recíproco também é verdade, ou seja, se tivermos uma matriz quadrada apenas com entradas $\pm\frac{1}{2}$ escrita na forma (5.1) (após eventual multiplicação de linhas e/ou colunas por -1) tal que U é uma matriz Totalmente Unimodular por Complementos, então esta matriz é não singular e a sua inversa é uma matriz quase Totalmente Unimodular. Assim, obtém-se uma outra caracterização das matrizes quase Totalmente Unimodulares à custa das matrizes Totalmente Unimodulares por Complementos, as quais serão estudadas previamente na Secção 5.1. Na Secção 5.2 veremos algumas propriedades e outras caracterizações de matriz quase Totalmente Unimodular, para além das duas caracterizações já referidas.

A caracterização de matriz quase Totalmente Unimodular do parágrafo anterior permitirá definir um algoritmo polinomial para o seu reconhecimento. Com efeito, veremos que uma matriz A , de dimensão $m \times n$, é Totalmente Unimodular por Complementos se e só se ela própria é Totalmente Unimodular juntamente com mais m adequadas matrizes de zeros e uns, com o mesmo número de colunas que A e apenas mais uma linha. Por isso, se dispusermos de um algoritmo polinomial para reconhecer matrizes Totalmente Unimodulares (por exemplo, o algoritmo **TU** descrito na Figura 4.5 do Capítulo 4) então, também dispomos de um algoritmo polinomial para reconhecer matrizes quase Totalmente Unimodulares.

5.1 Unimodularidade Total por Complementos

As matrizes que definiremos nesta secção, são uma classe restrita de matrizes TU. Estas matrizes aparecem na caracterização de matrizes quase TU que serão estudadas na Secção 5.2.

Definição 13 *Seja U uma matriz de zeros e uns. Denote-se por U^i a matriz que resulta de U através da seguinte operação: os elementos da linha i de U^i e de U são os mesmos; os elementos da coluna k de U^i e de U tal que $U_{ik} = 0$ também são os mesmos; todos os restantes elementos de U^i são os complementos dos correspondentes elementos de U . Diz-se, então, que U^i é o Complemento de U relativamente à linha i .*

Por exemplo, se a matriz U for definida por

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

então a matriz U^3 é definida por

$$U^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Definição 14 *Seja U uma matriz de zeros e uns. Denote-se por U_j a matriz que resulta de U através da seguinte operação: os elementos da coluna j de U_j e de U são os mesmos; os elementos da linha k de U_j e de U tal que $U_{kj} = 0$ também são os mesmos; todos os restantes elementos de U_j são os complementos dos correspondentes elementos de U . Diz-se, então, que U_j é o Complemento de U relativamente à coluna j .*

Retomando a matriz U definida em (5.2), a matriz U_5 é definida por

$$U^5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Diremos que U^i (U_j) resulta de U através de uma operação de complemento. Note-se que a matriz U^i também poderia ter sido definida do seguinte modo:

$$(U^i)_{kj} = \begin{cases} U_{kj} & \text{se } k = i \\ |U_{kj} - U_{ij}| & \text{se } k \neq i \end{cases}, \quad \forall j \quad (5.3)$$

A matriz U_j teria uma definição alternativa análoga. Além disso, o Complemento de uma matriz relativamente a uma coluna j é a transposta do Complemento da transposta dessa matriz relativamente à linha j . Matematicamente,

$$U^i = ((U^T)_i)^T \quad \text{e} \quad U_j = ((U^T)^j)^T.$$

Proposição 5 *As operações de complemento aplicadas a matrizes quadradas preservam o módulo do determinante dessas matrizes.*

Prova: Seja U uma matriz quadrada de zeros e uns e i uma linha qualquer de U . A matriz U^i resulta de U através das seguintes operações elementares:

- (a). Se $k \neq i$, substituição da linha k pela soma da linha k com o simétrico da linha i .
- (b). Multiplicação por -1 das colunas l tais que $U_{il} = 1$.
- (c). Multiplicação por -1 da linha i .

Agora, seja j uma coluna qualquer de U relativamente à coluna j . A matriz U_j resulta de U através das seguintes operações elementares:

- (a). Se $l \neq j$, substituição da coluna l pela soma da coluna l com o simétrico da coluna j .
- (b). Multiplicação por -1 das linhas k tais que $U_{kj} = 1$.
- (c). Multiplicação por -1 da coluna j .

Todas estas operações elementares preservam o módulo do determinante. \square

Definição 15 *Uma matriz U de zeros e uns Totalmente Unimodular diz-se Totalmente Unimodular por Complementos (CTU) se todas as matrizes que se obtêm de U através de sucessivas operações de complemento (por linha ou por coluna) permanecem Totalmente Unimodulares.*

Daqui em diante, usaremos a notação 'CTU' para designar Totalmente Unimodular por Complementos. Em particular, uma matriz CTU é, por definição, TU mas nem toda a matriz TU é CTU. Por exemplo, para U definida por

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

tem-se que o Complemento de U relativamente à coluna 1,

$$U_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

não é uma matriz TU porque a submatriz quadrada de U_1 constituída pelas três últimas colunas tem determinante 2. Até mesmo uma matriz TU de aparência muito simples como a matriz identidade I de ordem 4 não é CTU. Com efeito,

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (I^1)_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e a matriz $(I^1)_1$ não é TU porque a submatriz quadrada de $(I^1)_1$ de ordem 3 situada no canto inferior direito de $(I^1)_1$ tem determinante 2. No entanto, a matriz U definida por

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

é CTU porque, pelo Corolário 10, as únicas matrizes de zeros e uns que não são TU têm um aspecto muito específico. Em particular, têm 3 linhas e 3 colunas. Por isso, toda a matriz de zeros e uns com 2 linhas e 3 colunas é TU. Em particular, U definida em (5.4) é CTU.

Proposição 6 *Toda a matriz de zeros e uns com no máximo 3 linhas e 3 colunas é CTU se e só se é TU.*

Prova: Se U é uma matriz CTU, então, U é, por definição, TU. Seja U uma matriz de zeros e uns com no máximo 3 linhas e 3 colunas TU. Se U tem menos que 3 linhas ou menos que 3 colunas, então, pelo Corolário 10, U é CTU. Suponhamos que U tem exactamente 3 linhas e 3 colunas. As operações de complemento preservam o módulo do determinante. Por isso, todas as matrizes que se obtêm de U por operações de complemento possuem determinante $0, \pm 1$. Todas estas matrizes são TU porque, pelo Corolário 10, as únicas matrizes de zeros e uns que não são TU têm determinante ± 2 . \square

Concluimos, em particular, que a matriz identidade de ordem 3 é CTU.

Proposição 7 *Toda a submatriz de uma matriz CTU é CTU.*

Prova: Seja U' uma submatriz qualquer de uma matriz U CTU. Consideremos todas as matrizes $U'(n), n \in \mathbb{N}_0$ e com $U'(0) = U'$, obtidas a partir de U' por

uma sucessão qualquer de operações de complemento. Apliquemos a U essas mesmas operações utilizando as linhas e as colunas de U correspondentes às linhas e colunas de U' . Assim, obtemos uma sucessão de matrizes $U(n), n \in \mathbb{N}_0$ e com $U(0) = U$. É óbvio que cada matriz $U'(n), n \in \mathbb{N}_0$, é uma submatriz de $U(n)$. Por hipótese, $U(n)$ é TU, $\forall n \in \mathbb{N}_0$. Como qualquer submatriz de uma matriz TU é TU, então, $U'(n)$ é TU, $\forall n \in \mathbb{N}_0$. \square

Quantas matrizes diferentes podem ser obtidas a partir de uma matriz quadrada U de zeros e uns, após uma sequência de operações de complemento? Daremos a resposta com a sequência de resultados que se segue. A seguinte proposição é de demonstração imediata e, por isso, é omitida.

Proposição 8 *Seja U uma matriz de zeros e uns e P uma matriz de permutação. Para todo o índice de linha i ,*

$$(PU)^i = PU^{p(i)} \quad e \quad (UP)^i = U^i P$$

sendo $p(i)$ tal que $P_{i,p(i)} = 1$, isto é, $p(i)$ é a linha original em U da linha i da matriz PU . Para todo j ,

$$(PU)_j = PU_j \quad e \quad (UP)_j = U_{p(j)} P$$

sendo $p(j)$ tal que $P_{p(j),j} = 1$, isto é, $P(j)$ é a coluna original em U da coluna j da matriz UP .

Lema 26 *Seja U uma matriz de zeros e uns. Para quaisquer índices de linha i_1, i_2 distintos*

$$(U^{i_1})^{i_1} = U, \quad e \quad (U^{i_1})^{i_2} = P_{i_1 i_2} U^{i_2}.$$

Para quaisquer índices de coluna j_1, j_2 distintos

$$(U_{j_1})_{j_1} = U \quad e \quad (U_{j_1})_{j_2} = U_{j_2} P_{j_1 j_2},$$

onde P_{ij} denota a matriz de permutação simples linha i com linha j (ou coluna i com coluna j).

Prova: É óbvio que $(U^{i_1})^{i_1} = (U_{j_1})_{j_1} = U$. Mostremos que $(U^{i_1})^{i_2} = P_{i_1 i_2} U^{i_2}$. Designemos a matriz U^{i_1} por \bar{U} , a matriz $(U^{i_1})^{i_2}$ por U' , a matriz U^{i_2} por U^* e, por fim, a matriz $P_{i_1 i_2} U^{i_2}$ por \tilde{U} . Queremos mostrar que $U' = \tilde{U}$. Por (5.3), temos que, para um índice de linha $i \neq i_1, i_2$ qualquer e para um índice j de coluna qualquer,

$$\begin{array}{lcl} U_{ij} \equiv a & \xrightarrow{i_1} & \tilde{U}_{ij} = |a - b| \\ U_{i_1 j} \equiv b & & \tilde{U}_{i_1 j} = b \\ U_{i_2 j} \equiv c & & \tilde{U}_{i_2 j} = |b - c| \end{array} \quad \xrightarrow{i_2} \quad \begin{array}{l} U'_{ij} = ||a - b| - |b - c|| \\ U'_{i_1 j} = ||b - c| - b| \\ U'_{i_2 j} = |b - c| \end{array} \quad (5.5)$$

e

$$\begin{aligned} U_{ij} &\equiv a & U_{ij}^* &= |a - c| \\ U_{i_1j} &\equiv b & \xrightarrow{i_2} U_{i_1j}^* &= |b - c| \\ U_{i_2j} &\equiv c & U_{i_2j}^* &= c \end{aligned} \quad (5.6)$$

Como, para quaisquer $a, b, c \in \{0, 1\}$,

$$\|a - b| - |b - c|\| = \begin{cases} \|a| - |c|\| & \text{se } b = 0 \\ \|(b - a) - (b - c)|\| & \text{se } b = 1 \end{cases} = |a - c|, \quad (5.7)$$

então, em (5.5),

$$U'_{ij} = |a - c| \quad \text{e} \quad U'_{i_1j} = \|c - b| - |b - 0|\| = |c - 0| = c.$$

Por (5.5) e (5.6), concluímos que

$$U'_{ij} = U_{ij}^* = \tilde{U}_{ij}, \quad \forall i \neq i_1, i_2, \quad \forall j, \quad U'_{i_1j} = U_{i_2j}^* = \tilde{U}_{i_1j}, \quad \text{e} \quad U'_{i_2j} = U_{i_1j}^* = \tilde{U}_{i_2j}, \quad \forall j$$

o que prova que $U' = \tilde{U}$.Agora, provemos que $(U_{j_1})_{j_2} = U_{j_2} P_{j_1j_2}$. Temos que

$$\begin{aligned} (U_{j_1})_{j_2} &= ((U_{j_1})^T)^{j_2} = ((U^T)^{j_1})^{j_2} \\ &= [P_{j_1j_2} (U^T)^{j_2}]^T = [(U^T)^{j_2}]^T P_{j_1j_2}^T = U_{j_2} P_{j_1j_2} \end{aligned}$$

A quarta igualdade vale pelo que já foi demonstrado neste Lema. Além disso, na última igualdade, note-se que $P_{j_1j_2}$ é uma matriz simétrica. \square **Lema 27** *Seja U uma matriz quadrada de zeros e uns. Para todo i, j ,*

$$(U^i)_j = (U_j)^i$$

Prova: Designemos a matriz U^i por \bar{U} , a matriz $(U^i)_j$ por U' , a matriz U_j por U^* e, por fim, a matriz $(U_j)^i$ por \tilde{U} . Queremos mostrar que $U' = \tilde{U}$. Por (5.3), temos que, para um índice de linha $k \neq i$ qualquer e para um índice de coluna $l \neq j$ qualquer,

$$\begin{aligned} U_{kl} &\equiv a & \bar{U}_{ij} &= |a - b| & U'_{kl} &= \|a - b| - |c - d|\| \\ U_{il} &\equiv b & \xrightarrow{i} \bar{U}_{i_1j} &= b & \xrightarrow{j} U'_{il} &= |b - d| \\ U_{kj} &\equiv c & \bar{U}_{i_2j} &= |c - d| & U'_{kj} &= |c - d| \\ U_{ij} &\equiv c & \bar{U}_{i_2j} &= d & U'_{ij} &= d \end{aligned} \quad (5.8)$$

e

$$\begin{aligned} U_{kl} &\equiv a & U_{ij}^* &= |a - c| & \tilde{U}_{kl} &= \|a - b| - |c - d|\| \\ U_{il} &\equiv b & \xrightarrow{j} U_{i_1j}^* &= |b - d| & \xrightarrow{i} \tilde{U}_{il} &= |b - d| \\ U_{kj} &\equiv c & U_{i_2j}^* &= |c - d| & \tilde{U}_{kj} &= |c - d| \\ U_{ij} &\equiv c & U_{i_2j}^* &= d & \tilde{U}_{ij} &= d \end{aligned} \quad (5.9)$$

Agora, mostremos que

$$\|a - b| - |c - d|\| = \|a - c| - |b - d|\|, \quad \forall a, b, c, d \in \{0, 1\} \quad (5.10)$$

Para quaisquer $a, b, c, d \in \{0, 1\}$ temos que

$$\begin{aligned} \|a - b| - |c - d|\| &= \|a - c| - |b - d|\| \\ \Leftrightarrow |a - b| - |c - d| &\equiv |a - c| - |b - d| \pmod{2} \\ \Leftrightarrow |b - d| - |d - c| &\equiv |c - a| - |a - b| \pmod{2} \\ \Leftrightarrow \||b - d| - |d - c|\| &= \||c - a| - |a - b|\| \\ \Leftrightarrow |b - c| &= |c - b| \end{aligned}$$

A última equivalência vale por (5.7) e, assim provamos (5.10). Logo, por (5.10), temos que em (5.8) e (5.9), $U'_{kl} = \tilde{U}_{kl}$. Por (5.8) e (5.9), concluímos que $U'_{kl} = \tilde{U}_{kl}, \forall i, j$, ou seja, $U' = \tilde{U}$. \square

Pelo Lema 27, usaremos sem ambiguidade a notação U_j^i para designar $(U^i)_j$ ou $(U_j)^i$. A Proposição 8 e os Lemas 26 e 27 provam que qualquer matriz obtida a partir de uma matriz quadrada U de zeros e uns após uma sequência qualquer de operações de complemento, pode também ser construída a partir de, no máximo, uma operação de complemento por linha e uma operação de complemento por coluna, seguidas de trocas de linhas e/ou colunas. Por exemplo, consideremos a matriz

$$\left[\left[\left[(U^3)_5 \right]_4 \right]^1 \right]^4.$$

Como $\left[(U^3)_5 \right]_4 = (U^3)_4 P_{45}$, então

$$\left[\left[(U^3)_5 \right]_4 \right]^1 = \left[(U^3)_4 P_{45} \right]^1 = \left[(U^3)_4 \right]^1 P_{45} = \left[(U^3)_4 \right]^1 P_{45} = P_{13} (U^1)_4 P_{45}.$$

Por isso,

$$\begin{aligned} \left[\left[\left[(U^3)_5 \right]_4 \right]^1 \right]^4 &= \left[\left[P_{13} (U^1)_4 \right] P_{45} \right]^4 = \left(P_{13} (U^1)_4 \right)^4 P_{45} = P_{13} \left[(U^1)_4 \right]^4 P_{45} \\ &= P_{13} \left[(U^1)_4 \right]^4 P_{45} = P_{13} (P_{14} U^4)_4 P_{45} = P_{13} P_{14} (U^4)_4 P_{45} \end{aligned}$$

Logo, se U é de ordem $m, m \geq 2$, então o número máximo de matrizes diferentes (a menos de trocas de linhas e/ou colunas) que podem ser obtidas a partir de U após uma sequência qualquer de operações de complemento é $(m + 1)^2$. Então, para verificarmos se a matriz U é CTU temos de verificar se $(m + 1)^2$ matrizes de ordem m são TU. Vamos ver que podemos diminuir este número.

Teorema 48 *Seja U uma matriz de zeros e uns com m linhas, U^i o Complemento de U em relação à linha $i, i = 1, 2, \dots, m$. Então, U é CTU se e só se U é Totalmente Unimodular e*

$$M(i) = \begin{bmatrix} \mathbf{1}^T \\ U^i \end{bmatrix} \quad \text{é Totalmente Unimodular, } \forall i = 1, 2, \dots, m \quad (5.11)$$

Prova: (\Rightarrow) Como U é CTU, então U é TU. Mostremos (5.11). Seja $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ qualquer. Seja H uma submatriz não-singular de $M(i)$. Se H é também uma submatriz de U^i , então $|\det(H)| = 1$ uma vez que, por hipótese, U^i é TU. Caso contrário,

$$H = \begin{bmatrix} \mathbf{1}^T \\ (U^i)_{IJ} \end{bmatrix}$$

em que $(U^i)_{IJ}$ é uma submatriz de U^i . O Complemento de H em relação à coluna 1 é

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ y & V \end{bmatrix}$$

com y a primeira coluna de $(U^i)_{IJ}$ e V uma matriz adequada. Se a primeira coluna de H é uma sub-coluna da coluna j de $M(i)$, então V é uma submatriz de U_j^i , o Complemento de U^i em relação à coluna j . Por hipótese, U_j^i é TU e, por isso, $\det(V) \in \{0, \pm 1\}$. Pela Proposição 5 e como H é não-singular,

$$|\det(H)| = |\det(H_1)| = |\det(V)| = 1.$$

Em qualquer caso, $|\det(H)| = 1$ e, por isso, $M(i)$ é TU.

(\Leftarrow) Já vimos que, a menos de trocas de linhas e/ou colunas, toda a matriz $U(n), n \in \mathbb{N}$, obtida a partir de U por uma sucessão qualquer de operações de complemento é tal que $U(n) = U_j^i$, para adequados índices $i, j \in \{0, \dots, m\}$ (com $U_j^0 \equiv U_j, U_0^i \equiv U^i, U_0^0 \equiv U$ e $U_j^i \equiv (U^i)_j = (U_j)^i$). Consideremos, então, uma qualquer matriz U_j^i e seja $(U_j^i)_{IJ}$ uma submatriz qualquer não-singular de U_j^i . Queremos mostrar que $|\det((U_j^i)_{IJ})| = 1$. Se $j \in J$, então $(U_j^i)_{IJ} = ((U^i)_{IJ})_j$. Pela Proposição 5,

$$|\det((U_j^i)_{IJ})| = |\det(((U^i)_{IJ})_j)| = |\det((U^i)_{IJ})| = 1$$

porque, por hipótese, U^i é TU. Caso contrário, consideremos a matriz

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{1}^T \\ y & (U^i)_{IJ} \end{bmatrix}$$

em que y é uma sub-coluna da coluna j de U^i cujas componentes são indexadas por I . Como M é uma submatriz de $M(i)$, então, por hipótese, $\det(M) \in \{0, \pm 1\}$. O Complemento de M em relação à coluna 1 é

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ y & (U_j^i)_{IJ} \end{bmatrix}.$$

Logo, pela Proposição 5,

$$|\det((U_j^i)_{IJ})| = |\det(M_1)| = |\det(M)| = 1$$

Em qualquer caso, $|\det((U_j^i)_{IJ})| = 1$ e, por isso, U é CTU. \square

Portanto, se dispusermos de um “bom” algoritmo para reconhecer uma matriz TU, então, também dispomos de um “bom” algoritmo para reconhecer matrizes CTU.

5.2 Propriedades e outras caracterizações

Definição 16 *Uma matriz diz-se quase Totalmente Unimodular se não é Totalmente Unimodular, mas qualquer submatriz própria é Totalmente Unimodular.*

Portanto, os elementos de uma matriz quase Totalmente Unimodular são zeros, uns e menos uns. Um exemplo de uma matriz quase Totalmente Unimodular é

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

Pela Proposição 3 e pelo Corolário 12, uma classe de matrizes quase TU são as matrizes-ciclo desequilibradas, de que são exemplo, pela Proposição 2, as seguintes matrizes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.13)$$

Daqui em diante, usaremos a notação ‘quase TU’ para designar quase Totalmente Unimodular (outros autores usam a designação minimalmente não Totalmente Unimodular).

Teorema 49 *Seja A uma matriz quase TU. Então,*

- (a). A é quadrada.
- (b). $\det(A) = \pm 2$.
- (c). Toda a linha e toda a coluna de A têm um número par de componentes não-nulas.

(d). A soma de todas as entradas de A é igual a 2 (módulo 4).

Prova: Suponhamos que A não fosse quadrada. Como A não é Totalmente Unimodular, existe uma submatriz Q de A quadrada e própria tal que $\det(Q) \notin \{0, \pm 1\}$, o que contradiz o facto de A ser quase Totalmente Unimodular. Concluimos que A é uma matriz quadrada.

Suponhamos que $\det(A) \neq \pm 2$. Como A não é Totalmente Unimodular então, pelo Teorema 16, existe uma submatriz Q de A quadrada com determinante ± 2 , o que contradiz o facto de A ser quase Totalmente Unimodular. Concluimos que $\det(A) = \pm 2$.

Finalmente, pelo Teorema 18, existe uma submatriz Q de A quadrada cuja soma das componentes por linha e por coluna é par e tal que a soma de todas as componentes é 2 (módulo 4). Mas Q não pode ser submatriz própria de A , pelo que $Q = A$. Portanto, A verifica (c) e (d). \square

Nem toda a matriz que satisfaz as condições (a), (b), (c) e (d) do Teorema 49 é quase Totalmente Unimodular conforme ilustramos com o seguinte exemplo:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.14)$$

A matriz (5.14) não é quase Totalmente Unimodular pois admite

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

como submatriz própria. Necessitamos, pois, de pensar noutras caracterizações equivalentes.

Teorema 50 *Seja A uma matriz quase TU. Então, A é uma matriz quadrada invertível e A^{-1} tem apenas entradas iguais a $\pm \frac{1}{2}$.*

Prova: Já vimos, no Teorema 49, que A é uma matriz quadrada e que $\det(A) = \pm 2$. Em particular, A é uma matriz invertível. Através da caracterização

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A),$$

podemos ainda concluir o seguinte. As componentes da matriz $\text{adj}(A)$ são, a menos de um sinal, os determinantes de adequadas submatrizes próprias de A que, por hipótese, são $0, \pm 1$. Concluimos que a matriz A^{-1} tem apenas

componentes iguais a $0, \pm 1/2$. Para concluir a demonstração falta demonstrar que A^{-1} não tem componentes nulas.

Por absurdo, suponhamos que existe uma coluna c de A^{-1} que tem uma componente nula, pelo menos. Denote-se por $|c|$ o vector-coluna cujas componentes são as componentes de c em módulo. Primeiro, vamos mostrar que $A|c|$ é um vector inteiro. Seja A_i uma qualquer linha de A e sejam

$$\begin{aligned} M &\equiv \{j: a_{ij} = 1, c_j = 1/2\}, & N &\equiv \{j: a_{ij} = 1, c_j = -1/2\} \\ P &\equiv \{j: a_{ij} = -1, c_j = 1/2\} & Q &\equiv \{j: a_{ij} = -1, c_j = -1/2\}. \end{aligned}$$

de modo que

$$A_i c = \sum_{j \in MUQ} \left(\frac{1}{2}\right) - \sum_{j \in NUP} \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(|M| + |Q|) - (|N| + |P|)}{2}$$

e

$$A_i |c| = \sum_{j \in M \cup N} \left(\frac{1}{2}\right) - \sum_{j \in P \cup Q} \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(|M| - |P|) - (|N| - |Q|)}{2}.$$

Como $AA^{-1} = I$ então, $A_i c \in \{0, 1\}$ de onde se conclui que $|M| + |Q| = |N| + |P|$ ou $|M| + |Q| = |N| + |P| + 2$ ou, de modo equivalente, $|M| - |P| = |N| - |Q|$ ou $|M| - |P| - 2 = |N| - |Q|$. Por isso, $A_i |c| \in \{|M| - |P|, |M| - |P| - 1\}$. Concluímos que $A|c|$ é um vector de inteiros.

Seja B o conjunto de índices das componentes não-nulas de c e suponhamos que

$$AP = [A_B \ A_N],$$

com P uma adequada matriz de permutação de colunas. Então $A_B \mathbf{1} \equiv 0 \pmod{2}$, onde $\mathbf{1}$ representa um vector-coluna de tudo uns, porque $A_B \left(\frac{1}{2} \mathbf{1}\right) = A|c|$ é um vector de inteiros. Por hipótese, A_B é Totalmente Unimodular. Pelo Teorema 15 de Ghouila-Houri, (2.19), existe um vector \bar{y} com componentes ± 1 tal que $A_B \bar{y}$ é um vector de zeros, uns e menos uns. Como $\bar{y} - \mathbf{1} \equiv 0 \pmod{2}$ então

$$A_B \bar{y} = A_B (\bar{y} - \mathbf{1}) + A_B \mathbf{1} \equiv 0 \pmod{2},$$

o que implica que $A_B \bar{y} = 0$. Consideremos o vector $y = P(\bar{y}, 0) \neq 0$. Então,

$$Ay = AP \begin{bmatrix} \bar{y} \\ 0 \end{bmatrix} = [A_B \ A_N] \begin{bmatrix} \bar{y} \\ 0 \end{bmatrix} = A_B \bar{y} = 0,$$

o que contradiz o facto de A ser uma matriz não-singular. Concluímos que nenhuma coluna da matriz A^{-1} possui alguma componente nula. \square

Se A é quase TU, então, pelos Teoremas 49 e 50, A é uma matriz quadrada não-singular tal que $\det(A^{-1}) = \pm \frac{1}{2}$ e todas as entradas de A^{-1} são iguais a

$\pm \frac{1}{2}$. Vamos mostrar que o determinante de qualquer submatriz quadrada não-singular de A^{-1} também é igual a $\pm \frac{1}{2}$. Mais, vamos mostrar que o recíproco também é verdadeiro, ou seja, se A for uma matriz quadrada não-singular e se o determinante de qualquer submatriz quadrada não-singular de A^{-1} for $\pm \frac{1}{2}$, então A é quase TU. Assim, teremos uma outra caracterização das matrizes quase TU. Este resultado será formalizado nos Teoremas 52 e 53. O Teorema 53 vai permitir abrir portas para outra caracterização das matrizes quase TU muito mais interessante e que será formalizada no Teorema 55. A ideia para demonstrar o Teorema 53 é relacionar as submatrizes não-singulares de A^{-1} com as submatrizes de A . É evidente que as submatrizes não-singulares de A^{-1} não são as inversas das submatrizes não-singulares de A mas, são as inversas dos complementos Schur das submatrizes não-singulares de A .

Teorema 51 *Se A é uma matriz quase TU e A_{IJ} é uma submatriz própria não singular então $(A|A_{IJ})$ é uma matriz quase TU.*

Prova: Como A_{IJ} é uma submatriz própria de A , A_{IJ} é Totalmente Unimodular. Pela Fórmula de Schur (Lema 3 da Introdução),

$$|\det(A|A_{IJ})| = \frac{|\det(A)|}{|\det(A_{IJ})|} = |\det(A)| \neq 1 \quad (5.15)$$

porque A não é Totalmente Unimodular. Toda a submatriz própria de $(A|A_{IJ})$ é da forma $(A_{KL}|A_{IJ})$, para alguma submatriz própria A_{KL} de A que contém A_{IJ} como submatriz. Como

$$\det(A_{KL}|A_{IJ}) = \frac{\det(A_{KL})}{\det(A_{IJ})} = 0, \pm 1$$

porque A_{IJ} e A_{KL} são submatrizes próprias de A , concluímos que $(A|A_{IJ})$ é quase TU. \square

Teorema 52 *Seja A uma matriz quadrada não-singular de zeros, uns e menos uns. Então, A é quase TU se e só se para toda a submatriz não-singular de A^{-1} a sua inversa é quase TU.*

Prova: (\Leftarrow) A condição suficiente possui demonstração trivial. Em particular, a matriz A^{-1} é uma submatriz não-singular de A^{-1} . Por hipótese, $A = (A^{-1})^{-1}$ é quase TU.

(\Rightarrow) Seja S uma submatriz não-singular de A^{-1} . Se $S = A^{-1}$ então $S^{-1} = A$. Por hipótese, A é quase TU e, por isso, S^{-1} é quase TU. Se S é uma submatriz própria de A^{-1} , então, pelo Lema 4 da Introdução, existe uma submatriz

quadrada A_{IJ} própria de A e não-singular, com $I, J \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$, tal que

$$S^{-1} = (A|A_{IJ}).$$

Pelo Teorema 51, S^{-1} é uma matriz de zeros, uns e menos uns, quase TU. \square

O Teorema 52 pode-se estabelecer, de modo equivalente, na forma do Teorema 53 que apresentamos abaixo.

Teorema 53 *Seja A uma matriz quadrada não-singular de zeros, uns e menos uns. Então, A é quase TU se e só se toda a submatriz quadrada não-singular de A^{-1} tem determinante igual a $\pm \frac{1}{2}$.*

Definição 17 *Uma matriz M está na forma padrão se os elementos da primeira linha de M e da primeira coluna de M são não-negativos.*

Definição 18 *“Escalar a matriz M ” é transformar a matriz M numa matriz na forma padrão após uma multiplicação conveniente de algumas das suas linhas e/ou colunas por -1 .*

Se uma dada matriz é quase TU, então, pelo Teorema 50, todas as suas entradas são iguais a $\pm \frac{1}{2}$. Qualquer matriz M quadrada, com entradas $\pm \frac{1}{2}$, de ordem n , $n \geq 2$ e na forma padrão pode escrever-se de forma única como a soma de duas matrizes do seguinte modo:

$$M = \frac{1}{2}E + Z(U) \quad (5.16)$$

em que E é uma matriz de tudo uns,

$$Z(U) = \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & -U \end{array} \right] \quad (5.17)$$

e U é uma matriz $(n-1) \times (n-1)$ de zeros e uns. É fácil verificar que

$$M = RY(U)C \quad (5.18)$$

com

$$R = \left[\begin{array}{c|ccc} \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline \frac{1}{2}\mathbf{1} & & & I \end{array} \right], \quad Y(U) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & -U \end{array} \right] \quad (5.19)$$

e

$$C = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & I \end{array} \right]. \quad (5.20)$$

Como $\det(R) = \frac{1}{2}$ e $\det(C) = 1$, então,

$$|\det(M)| = \frac{1}{2} |\det(U)| \quad (5.21)$$

Lema 28 *Seja \mathcal{M} o conjunto das matrizes quadradas não-singulares com entradas ± 1 e de ordem m . Então,*

$$\min\{|\det(Q)| : Q \in \mathcal{M}\} = 2^{m-1}. \quad (5.22)$$

Prova: Seja $Q \in \mathcal{M}$ qualquer. Como Q é uma matriz com entradas ± 1 , então, $\frac{1}{2}Q$ é uma matriz com entradas $\pm \frac{1}{2}$. Depois de escalarmos $\frac{1}{2}Q$, a matriz $\frac{1}{2}Q'$ obtida é tal que $\frac{1}{2}Q' = RY(U)C$ com U uma matriz de zeros e uns, e $R, Y(U)$ e C matrizes definidas como em (5.18). Por (5.21),

$$|\det(Q)| = |\det(2(\frac{1}{2}Q))| = 2^m |\det(\frac{1}{2}Q')| = 2^m \frac{1}{2} |\det(U)| \geq 2^{m-1}$$

pois, como Q é não-singular (e, portanto, também U o é) e U é uma matriz inteira, $|\det(U)| \geq 1$. Seja I a matriz identidade de ordem $m - 1$. Como $Q' \equiv RY(I)C = \frac{1}{2}E + Z(I)$, então Q' é uma matriz com entradas $\pm \frac{1}{2}$ de ordem m e, portanto, $2Q'$ é uma matriz com entradas ± 1 de ordem m . Logo, $2Q' \in \mathcal{M}$ e

$$|\det(2Q')| = 2^m |\det(Q')| = 2^m \frac{1}{2} |\det(I)| = 2^{m-1},$$

o que prova (5.22). \square

Teorema 54 *Seja A uma matriz quadrada não-singular. Então, A é quase TU se e só se A^{-1} é uma matriz com entradas $\pm \frac{1}{2}$ e o determinante de toda a submatriz não-singular de $2A^{-1}$ é mínimo entre os determinantes de todas as matrizes não-singulares com entradas ± 1 da mesma ordem.*

Prova: (\Rightarrow) Seja H uma submatriz não-singular de $2A^{-1}$ de ordem m . Como A é quase TU, então, pelo Teorema 50, $2A^{-1}$ é uma matriz com entradas ± 1 . Pelo Lema 28, queremos provar que $|\det(H)| = 2^{m-1}$. Como $\frac{1}{2}H$ é uma submatriz não-singular de A^{-1} , então, por hipótese e pelo Teorema 53, $|\det(\frac{1}{2}H)| = \frac{1}{2}$ e, portanto,

$$|\det(H)| = |\det[2(\frac{1}{2}H)]| = 2^m |\det(\frac{1}{2}H)| = 2^m \cdot \frac{1}{2} = 2^{m-1}.$$

(\Leftarrow) Pelo Teorema 53, basta provar que para toda a submatriz não-singular de A^{-1} , o seu determinante é $\pm \frac{1}{2}$. Seja Q uma submatriz qualquer não-singular de A^{-1} de ordem r . Como $2Q$ é uma submatriz não-singular de $2A^{-1}$, então por hipótese e pelo Lema 28, $|\det(2Q)| = 2^{r-1}$ e, portanto,

$$|\det(Q)| = |\det[\frac{1}{2}(2Q)]| = (\frac{1}{2})^r |\det(2Q)| = (\frac{1}{2})^r 2^{r-1} = \frac{1}{2}.$$

□

Lema 29 *Seja M uma matriz quadrada de ordem maior ou igual que 2 com entradas $\pm \frac{1}{2}$. Depois de escalarmos a matriz M obtemos uma matriz \bar{M} tal que $\bar{M} = \frac{1}{2}E + Z(U)$ para uma adequada matriz U de zeros e uns. Sejam k e l índices quaisquer de linha e de coluna da matriz U , resp., e $U^k(U_l)$ o Complemento de U em relação à linha k (coluna l) (ver Definições 13 e 14 da Seção 5.1). Obtenhamos a partir de \bar{M} as matrizes \bar{M}^1 e \bar{M}^2 pelas seguintes operações:*

\bar{M}^1 : *Troquemos as linhas 1 e $k+1$ de \bar{M} entre si. Em seguida, multipliquemos as colunas $j+1$ por -1 , para cada j tal que $U_{kj} = 1$.*

\bar{M}^2 : *Troquemos as colunas 1 e $l+1$ de \bar{M} entre si. Em seguida, multipliquemos as linhas $i+1$ por -1 , para cada i tal que $U_{il} = 1$.*

Então, \bar{M}^1 e \bar{M}^2 estão na forma padrão e

$$\bar{M}^1 = \frac{1}{2}E + Z(U^k) \quad e \quad \bar{M}^2 = \frac{1}{2}E + Z(U_l) \quad (5.23)$$

Prova: Provemos a primeira igualdade de (5.23). Seja $\tilde{M}^1 = \frac{1}{2}E + Z(U^k)$. Queremos mostrar que $\bar{M}_{ij}^1 = \tilde{M}_{ij}^1, \forall i, j$. A coluna 1 de \bar{M} é o vector $\frac{1}{2}\mathbf{1}$. Por definição de \bar{M}^1 , a coluna 1 de \bar{M}^1 é a coluna 1 de \bar{M} com as componentes 1 e $k+1$ trocadas. Logo, as colunas 1 de \bar{M} e \tilde{M}^1 são as mesmas e iguais ao vector $\frac{1}{2}\mathbf{1}$. Seja $\bar{M}_{1,j+1}^1$ a componente $j+1$ da primeira linha de \bar{M}^1 com j índice de coluna de U . Sejam $A = \{j: U_{kj} = 1\}$ e $\bar{A} = \{j: U_{kj} = 0\}$. Temos o seguinte:

$$\begin{aligned} j \in A &\Rightarrow \bar{M}_{1,j+1}^1 = -\bar{M}_{k+1,j+1} = -(\frac{1}{2} - U_{kj}) = -(\frac{1}{2} - 1) = \frac{1}{2}, \quad \forall j, \\ j \in \bar{A} &\Rightarrow \bar{M}_{1,j+1}^1 = \bar{M}_{k+1,j+1} = \frac{1}{2} - U_{kj} = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}, \quad \forall j. \end{aligned}$$

Acabámos de mostrar que a linha 1 de \bar{M}^1 é o vector $\frac{1}{2}\mathbf{1}$ e, portanto, a linha 1 de \bar{M}^1 e a linha 1 de \tilde{M}^1 também coincidem. Concluimos, ainda, que \bar{M}^1 está na forma padrão. Seja agora $\bar{M}_{i+1,j+1}^1$ uma entrada genérica da matriz \bar{M}^1 que

não pertence à primeira coluna nem à primeira linha, com i e j índices de linha e de coluna de U , resp. Então, para todo j temos o seguinte:

$$\begin{aligned} j \in A &\Rightarrow \bar{M}_{k+1,j+1}^1 = -\bar{M}_{1,j+1} = -\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - U_{kj} = \frac{1}{2} - (U^k)_{kj} \\ j \in \bar{A} &\Rightarrow \bar{M}_{k+1,j+1}^1 = \bar{M}_{1,j+1} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - U_{kj} = \frac{1}{2} - (U^k)_{kj} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} i \neq k \quad e \quad j \in A &\Rightarrow \bar{M}_{i+1,j+1}^1 = -\bar{M}_{i+1,j+1} = -(\frac{1}{2} - U_{ij}) = \\ &= \frac{1}{2} - (1 - U_{ij}) = \frac{1}{2} - (U^k)_{ij} \\ i \neq k \quad e \quad j \in \bar{A} &\Rightarrow \bar{M}_{i+1,j+1}^1 = \bar{M}_{i+1,j+1} = \frac{1}{2} - U_{ij} = \frac{1}{2} - (U^k)_{ij} \end{aligned}$$

Em qualquer caso, $\bar{M}_{i+1,j+1}^1 = \tilde{M}_{i+1,j+1}^1, \forall i, j$. Logo, concluímos que $\bar{M}^1 = \tilde{M}^1$. A segunda igualdade de (5.23) prova-se de modo semelhante. \square

Teorema 55 *Seja A uma matriz quadrada não-singular de ordem n . Então, A é quase TU se e só se, depois de escalarmos A^{-1} , a matriz $(A^{-1})'$ obtida é tal que*

$$(A^{-1})' = \frac{1}{2}E + Z(U)$$

com U uma matriz não-singular de zeros e uns, e CTU .

Prova: (\Rightarrow) Como, por hipótese, A é quase TU, então, pelo Teorema 50, todas as entradas de A^{-1} são $\pm \frac{1}{2}$. Depois de escalarmos A^{-1} , a matriz obtida $(A^{-1})'$ é tal que $(A^{-1})' = \frac{1}{2}E + Z(U)$ com U uma matriz quadrada de zeros e uns de ordem $n-1$ e com linhas e colunas indexadas por $\{1, 2, \dots, n-1\}$ (suponhamos que a primeira linha de $(A^{-1})'$ é indexada por 1^+). Seja U' igual a U ou a qualquer matriz resultante de U por operações de complemento e seja U'_{IJ} uma qualquer submatriz não-singular de U' com $I, J \subseteq \{1, 2, \dots, n-1\}$. Queremos mostrar que $|\det(U'_{IJ})| = 1$.

Sabemos que $U' = U_j^i$ com $U_j^i \equiv (U^i)_j = (U_j)^i$ para adequados índices $0 \leq i, j \leq n-1$ (com $U_j^0 \equiv U_j, U_0^i \equiv U^i$ e $U_0^0 \equiv U$). Pelo Lema 29, $(A^{-1})^* \equiv \frac{1}{2}E + Z(U^i)$ (com $U^i \equiv U$, se $i=0$) é uma matriz que se obtém de $(A^{-1})'$ por uma eventual (se $i \neq 0$) troca de linhas seguida, possivelmente, por multiplicação de algumas colunas por -1 . De igual modo, pelo Lema 29, a matriz

$$(A^{-1})^{**} \equiv \frac{1}{2}E + Z((U^i)_j) = \frac{1}{2}E + Z(U')$$

é uma matriz que se obtém de $(A^{-1})^*$ por uma eventual (se $j \neq 0$) troca de colunas seguida, possivelmente, por multiplicação de algumas linhas por -1 . Logo, é óbvio que $(A^{-1})^{**}$ se obtém de $(A^{-1})'$ e também de A^{-1} por uma

eventual (se $i \neq 0$) troca de linhas, uma eventual (se $j \neq 0$) troca de colunas seguida, possivelmente por multiplicação de algumas linhas e/ou colunas por -1 . É óbvio que $H^{**} \equiv [(A^{-1})^{**}]_{I \cup \{1+\}, J \cup \{1+\}}$ é uma submatriz de $(A^{-1})^{**}$ tal que $H^{**} = \frac{1}{2}E + Z(U'_{IJ})$. Por (5.21), $|\det(H^{**})| = \frac{1}{2}|\det(U'_{IJ})|$. Logo, como U'_{IJ} é não-singular, então, H^{**} e a submatriz H de A^{-1} correspondente a H^{**} são não-singulares. Como, por hipótese, A é quase TU, então, pelo Teorema 53, $|\det(H^{**})| = |\det(H)| = \frac{1}{2}$ e, portanto, $|\det(U'_{IJ})| = 1$.

(\Leftarrow) Pelo Teorema 53, basta provar que toda a submatriz não-singular de A^{-1} tem determinante igual a $\pm \frac{1}{2}$. Seja H uma submatriz não-singular de A^{-1} . Por hipótese, depois de escalarmos A^{-1} , a matriz obtida $(A^{-1})'$ é tal que $(A^{-1})' = \frac{1}{2}E + Z(U)$ com U uma matriz não-singular de zeros e uns. Seja H' a submatriz de $(A^{-1})'$ correspondente a H . Suponhamos que a primeira linha de H' é indexada por $k+1$, $k \geq 0$ e a primeira coluna de H' por $l+1$, $l \geq 0$, com k e l índices de linha e de coluna de U , resp., se $k, l > 0$. Se $k, l > 0$, então, a partir de $(A^{-1})'$, construímos as matrizes $(A^{-1})^*$ e $(A^{-1})_*$ do seguinte modo:

- (a). $(A^{-1})^*$: Troquemos as linhas 1 e $k+1$ de $(A^{-1})'$ entre si. Em seguida, multipliquemos as colunas $j+1$ por -1 , para cada j tal que $U_{kj} = 1$.
- (b). $(A^{-1})_*$: Troquemos as colunas 1 e $l+1$ de $(A^{-1})'$ entre si. Em seguida, multipliquemos as linhas $i+1$ por -1 , para cada i tal que $(U^k)_{il} = 1$.

Pelo Lema 29, $(A^{-1})^*$ está na forma padrão e $(A^{-1})^* = \frac{1}{2}E + Z(U^k)$. De igual modo, $(A^{-1})_*$ está na forma padrão e $(A^{-1})_* = \frac{1}{2}E + Z(U_l^k)$ com, lembre-se, $U_l^k \equiv (U^k)_l = (U_l)^k$. Se $k = 0$, então, omitimos o passo (a). e no passo (b) consideramos $U^k = U^0 \equiv U$. Se $l = 0$, então, omitimos o passo (b). Se $k = l = 0$, então não fazemos nada. Concluimos que a matriz final obtida, $(A^{-1})''$, é tal que $(A^{-1})'' = \frac{1}{2}E + Z(U_l^k)$ (com $U_l^0 \equiv U_l$, $U_0^k \equiv U^k$ e $U_0^0 \equiv U$).

Seja H'' a submatriz de $(A^{-1})''$ correspondente a H' . Por construção da matriz $(A^{-1})''$, a linha 1 e a coluna 1 de H'' são uma sub-linha e uma sub-coluna da linha 1 e da coluna 1 de $(A^{-1})''$. Logo, como $(A^{-1})''$ está na forma padrão, então H'' está na forma padrão e $H'' = \frac{1}{2}E + Z((U_l^k)'')$ com $(U_l^k)''$ uma submatriz de U_l^k . Por (5.18) e (5.21), $H'' = RY((U_l^k)'')C$ e $|\det(H'')| = \frac{1}{2}|\det((U_l^k)'')|$. Uma vez que H é não-singular (e, portanto, também H''), então, $(U_l^k)''$ também o é. Como, por hipótese, U é CTU, então, U_l^k é TU e, portanto, $|\det((U_l^k)'')| = 1$. Logo, $|\det(H)| = |\det(H'')| = \frac{1}{2}$. \square

Finalmente, estamos em condições de definir um algoritmo para reconhecimento de uma matriz quase TU. Exibi-lo-emos na página seguinte.

Algoritmo **QTU**(A)

(1/1)

Input: Matriz A quadrada de ordem n , de zeros, uns e menos.

Output: *Verdadeiro* se A é quase Totalmente Unimodular.
Falso se A não é quase Totalmente Unimodular.

Iteração Genérica:

Passo 1: Verificar se a matriz A é não-singular.

Se A é singular

então $QTU:=Falso$; STOP.

senão calcular a matriz inversa, A^{-1} .

Passo 2: Se A^{-1} não é uma matriz apenas com entradas iguais a $\pm\frac{1}{2}$

então $QTU:=Falso$; STOP.

Multiplicar adequadas linhas e/ou colunas de A^{-1}

de modo que todos os elementos da primeira linha e da primeira coluna sejam não-negativos.

Passo 3: Seja $(A^{-1})'$ a submatriz de A^{-1} obtida por eliminação em A^{-1} da primeira linha e da primeira coluna.

Calcular a matriz $U = (A^{-1})' - \frac{1}{2}E$, de zeros e uns, em que E denota uma matriz $(n-1) \times (n-1)$ de tudo-uns.

Passo 4: Calcular as $n-1$ matrizes quadradas de ordem $n-1$, U^i , $i = 1, 2, \dots, n-1$, em que U^i denota o Complemento de U em relação à linha i , ou seja,

$$(U^i)_{kj} = \begin{cases} U_{kj} & \text{se } k = i \\ |U_{kj} - U_{ij}| & \text{se } k \neq i \end{cases}, \quad \forall k, j = 1, 2, \dots, n-1$$

Passo 5: Testar a Unimodularidade Total da matriz U e de cada uma das matrizes

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1}^T \\ U^i \end{bmatrix} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.24)$$

com o algoritmo **TU** descrito na Figura 4.5 (pgs. 167-168).

Se a matriz U ou alguma das matrizes em (5.24) não é TU

então $QTU:=Falso$; STOP.

senão $QTU:=Verdadeiro$; STOP.

Figura 5.1: **QTU**(A)

Teorema 56 O algoritmo **QTU** da Figura 5.1 averigua em tempo polinomial se uma dada matriz de zeros, uns e menos uns, é **QTU** ou não.

Prova: Consideremos uma matriz quadrada de ordem n , $A = [a_{ij}]$, com $i, j = 1, \dots, n$, de zeros, uns e menos uns, e implementemos o algoritmo **QTU** referido. O Passo 1 pode ser executado usando o método de eliminação de Gauss em tempo $\mathcal{O}(n^3)$. Sabemos que durante a aplicação deste método, as entradas das matrizes intervenientes são limitadas polinomialmente, em módulo, por $M \equiv \max\{|a_{ij}| : i, j = 1, \dots, n\}$. O Passo 2 tem tempo $\mathcal{O}(n^2)$ e o Passo 3 $\mathcal{O}(n^3)$. Pelo Teorema 47 (ver (4.111)), testar a Unimodularidade Total da matriz U do Passo 4 pode ser feito em tempo $\mathcal{O}[(2n - 2)^{13}(n - 1)] = \mathcal{O}(n^{14})$ e testar a Unimodularidade Total de todas as $n - 1$ matrizes em (5.24), pode ser feito em tempo

$$(n - 1)\mathcal{O}[(2n - 2)^{13}(n - 1)] = \mathcal{O}(n^{15}).$$

Somando todos os tempos parciais, concluímos que o tempo total do algoritmo **QTU** é $\mathcal{O}(n^{15})$. \square

Relembrando a definição de matrizes de zeros uns e menos uns Equilibrada (e Desequilibrada), a seguir ao Teorema 18 do Capítulo 2, é fácil verificar que qualquer matriz quase Totalmente Unimodular é uma matriz-ciclo desequilibrada ou (exclusivo) uma matriz Equilibrada. Com efeito, seja A uma matriz quase Totalmente Unimodular que não é uma matriz-ciclo desequilibrada e seja A' uma submatriz própria de A que é uma matriz-ciclo. Como A é quase Totalmente Unimodular então, por definição, A' é Totalmente Unimodular. Em particular, pelo Teorema de Camion II, A' é uma matriz-ciclo equilibrada e, assim, concluímos que A não contém qualquer submatriz que seja uma matriz-ciclo desequilibrada, isto é, A é uma matriz Equilibrada, o que prova o pretendido. Portanto, temos o seguinte esquema:

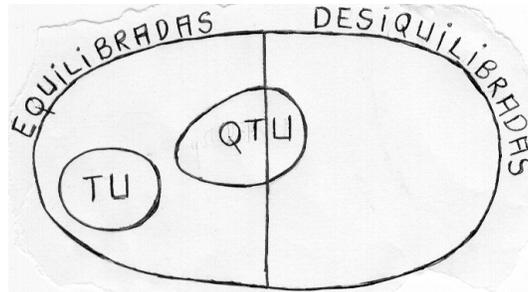


Figura 5.2: Matrizes de zeros, uns e menos uns

em que o conjunto das matrizes quase Totalmente Unimodulares Desequilibradas é apenas constituído pelas matrizes-ciclo (desequilibradas).

Capítulo 6

Matriz Unimodular

Neste capítulo desenvolvemos o conceito de matriz Unimodular que generaliza o conceito de matriz Totalmente Unimodular. Uma matriz A de números inteiros e de característica completa por linhas diz-se Unimodular se toda a sua base tiver determinante ± 1 (uma base de A é uma submatriz quadrada maximal de A não singular). Quando A não tem característica completa por linhas diremos que, uma matriz A de números inteiros, de dimensão $m \times n$, e de característica r é Unimodular se para toda a base de A , o máximo divisor comum de todos os seus subdeterminantes de ordem r é 1 (uma base de uma matriz de característica r é um conjunto de r colunas linearmente independente). Se $r = m$ então esta definição coincide com a anterior.

Claramente, toda a matriz Totalmente Unimodular é Unimodular mas uma matriz Unimodular não tem que ser sequer uma matriz de zeros, uns e menos uns. Além disso, veremos que uma matriz de zeros, uns e menos uns Unimodular não tem que ser Totalmente Unimodular. Em geral, temos a seguinte relação, já enunciada na Proposição 1 do Capítulo 2. Uma matriz A é Totalmente Unimodular se e só se a matriz $[I \ A]$ (que tem característica completa por linhas) é Unimodular, em que I representa uma matriz identidade. Existem outras afinidades entre as matrizes Unimodulares e as matrizes Totalmente Unimodulares. As matrizes Unimodulares aparecem também no contexto da Programação Linear. Por exemplo, veremos que uma matriz A é Unimodular se e só se o poliedro $\{x \in \mathbb{R}: Ax = b, x \geq 0\}$ é inteiro para todo vector b inteiro (note-se o paralelismo com o Teorema de Hoffman e Kruskal). Por isso, uma matriz de inteiros A é Unimodular se e só se existir alguma solução óptima

inteira para ambos os problemas $\max\{cx: Ax = b, x \geq 0\}$ e $\min\{yb: yA \geq c\}$, para todos os vectores inteiros b, c tal que um deles tenha valor óptimo finito (note-se o paralelismo com o Corolário 3 do Teorema de Hoffman e Kruskal). Veremos estes e outros resultados na Secção 6.1.

Na Secção 6.2 estudaremos outras propriedades das matrizes Unimodulares. Algumas das propriedades que são válidas para as matrizes Totalmente Unimodulares mantêm-se válidas para as matrizes Unimodulares. Por exemplo, é óbvio que a Unimodularidade de uma matriz é preservada por trocas de linhas ou de colunas, multiplicação de linhas ou colunas por -1 , já não tão óbvio, por acréscimo de uma linha (mas não coluna) da matriz identidade, etc. Entretanto, nem toda a submatriz de uma matriz Unimodular é Unimodular. Veremos que, para garantir Unimodularidade, apenas podemos remover colunas ou então remover linhas nulas, linhas da matriz identidade, ou linhas que sejam combinação linear inteira das restantes linhas. De igual modo, a matriz transposta de uma matriz Unimodular pode não ser Unimodular. Também existem propriedades de Unimodularidade que não se verificam para a Unimodularidade Total. Por exemplo, a Unimodularidade de uma matriz é preservada (enquanto a Unimodularidade Total não é) por substituição de uma das suas linhas pela sua adição com outra linha previamente multiplicada por um número inteiro ou por acréscimo de uma linha que seja combinação linear inteira das linhas dessa matriz.

Já vimos que uma matriz A é Totalmente Unimodular se e só se a matriz $[I \ A]$ é Unimodular. Na Secção 6.2, veremos outras relações entre matrizes Totalmente Unimodulares e matrizes Unimodulares. O resultado principal, devido a Truemper (Truemper, 1978), afirma que uma matriz A de inteiros é Unimodular se e só se existe uma base B de A tal que B é Unimodular e a (única) matriz C tal que $BC = A$ é Totalmente Unimodular. Uma base de uma dada matriz pode ser encontrada com o método de eliminação de Gauss que é polinomial. Veremos que uma matriz B de característica completa por colunas (como é o caso de uma base de uma matriz) é Unimodular se e só se a matriz B^T pode ser conduzida à Forma Normal de Hermite $[H \ 0]$ (ver Definição 3) com $H = I$. Pelo exposto, podemos definir um algoritmo polinomial para reconhecimento de uma matriz Unimodular se dispusermos de um algoritmo polinomial para encontrar

a Forma Normal de Hermite de uma matriz (este algoritmo está descrito em (Schrijver, 1986) na Secção 5.3 e nos textos de apoio de Teoria de Optimização) e de um algoritmo polinomial para reconhecimento de uma matriz Totalmente Unimodular (por exemplo, o algoritmo **TU** descrito na Figura 4.5 do Capítulo 4). Este algoritmo para reconhecimento de uma matriz Unimodular será devidamente descrito no final da Secção 6.2. Truemper (Truemper, 1978) descobriu outros resultados semelhantes que relacionam o conceito de Unimodularidade com o de Unimodularidade Total.

6.1 Definição e propriedades

Nesta secção continuamos a trabalhar com matrizes inteiras mas não necessariamente de zeros, uns e menos uns.

Definição 19 *Uma matriz A de números inteiros e de característica completa por linhas diz-se Unimodular se toda a sua base tiver determinante ± 1 (uma base de uma matriz é um conjunto de colunas dessa matriz linearmente independente e maximal).*

A matriz A_1 abaixo é Unimodular enquanto que a matriz A_2 não é:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad (6.1)$$

A Definição 19 impõe que a matriz tenha característica completa por linhas. Na Definição 20, mais abaixo, alargaremos a definição de matriz Unimodular a matrizes que não tenham característica completa por linhas. O facto de ambas as definições imporem que a matriz seja uma matriz de inteiros tem a ver com o contexto em que estas matrizes ocorrem. Agora generalizamos o conceito de matriz Unimodular para matrizes que não sejam de característica completa por linhas.

Definição 20 *Uma matriz A de números inteiros e de característica r diz-se Unimodular se para toda a base de A , o máximo divisor comum de todos os seus subdeterminantes de ordem r é 1.*

Note-se que, no caso da matriz ter característica completa por linhas, a Definição 20 coincide com a Definição 19. Consideremos a matriz A definida por

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

que tem característica 2 pois a linha 3 é a soma da linha 1 multiplicada por $1/3$ com a linha 2 multiplicada por $1/2$. As bases de A são

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Em cada uma delas o m.d.c. de todos os subdeterminantes 2×2 é 1. Por isso, A é Unimodular. Existem matrizes, de zeros, uns e menos uns, Unimodulares que não são matrizes TU, conforme se ilustra com a seguinte matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (6.2)$$

Os itens (a), (b) e (c) da seguinte propriedade são de demonstração imediata enquanto que o item (d) já não. Demonstraremos este item.

Propriedade 10 *Uma matriz Unimodular permanece Unimodular se sobre ela efectuarmos uma das seguintes operações por colunas:*

- (a). *trocamos as posições de duas colunas.*
- (b). *duplicamos uma coluna ou acrescentamos uma coluna nula.*
- (c). *multiplicamos uma coluna por -1 .*
- (d). *retiramos uma coluna.*

Prova: (do item (d).) Seja A uma matriz Unimodular, seja c uma qualquer coluna de A e seja A' a matriz que resulta de A por remoção da coluna c . Se existe pelo menos uma base de A em que não aparece a coluna c então A' possui $r = \text{car}(A)$ colunas linearmente independentes e, por isso, $\text{car}(A') = \text{car}(A)$ e A' permanece Unimodular porque a família das bases de A' está contida na família das bases de A .

Portanto, para o resto da demonstração assumimos que c aparece em todas as bases de A . Neste caso, A' não possui r colunas linearmente independentes e, portanto, $\text{car}(A') = \text{car}(A) - 1$ e qualquer base de A resulta de uma base de A' por acréscimo da coluna c , assim como qualquer base de A' resulta de uma base de A por remoção da coluna c . Seja C' uma qualquer base de A' . Seguidamente provamos que

$$d' \equiv \text{m.d.c.}\{\det(C'[I']): |I'| = \text{car}(A) - 1\} = 1.$$

Denote-se por C a submatriz de A constituída pelas colunas de C' e pela coluna c . Esta matriz C é uma base de A . Seja I tal que $|I| = \text{car}(A)$ qualquer. Por

aplicação do Teorema de Laplace na coluna $c[I]$ da matriz $C[I]$,

$$\det(C[I]) = \sum_{i \in I} \pm c_i \det(C'[I \setminus \{i\}])$$

Como $c[I]$ é um vector de inteiros e d' divide $\det(C'[I \setminus \{i\}])$ para todo I , concluimos que d' divide $\det(C[I])$. Como I é qualquer, d' divide $\det(C[I])$, para todo I tal que $|I| = \text{car}(A)$. Concluimos que d' divide $\text{m.d.c.}\{\det(C[I]): |I| = \text{car}(A)\} = 1$. Concluimos que $d' = 1$. \square

Por aplicação sucessiva do item (d) da Propriedade 10, concluimos que qualquer submatriz de A formada por colunas de A é Unimodular.

Os itens (a), (b) e (c) da seguinte propriedade são de demonstração imediata, enquanto os itens (d), (e), (f), (g) e (h) já não. Demonstraremos estes últimos.

Propriedade 11 *Uma matriz Unimodular permanece Unimodular se sobre ela efectuarmos uma das seguintes operações por linhas:*

- (a). *trocamos as posições de duas linhas.*
- (b). *multiplicamos uma linha por -1 .*
- (c). *acrescentamos ou retiramos uma linha nula;*
- (d). *substituímos uma das suas linhas pela sua adição com outra linha previamente multiplicada por um número inteiro;*
- (e). *acrescentamos uma linha que seja combinação linear inteira das linhas dessa matriz;*
- (f). *removermos uma linha que seja combinação linear inteira das restantes linhas;*
- (g). *acrescentamos uma linha da matriz identidade;*
- (h). *retiramos uma linha da matriz identidade;*

Prova: (do item (d).) Seja A uma matriz Unimodular e seja A' a matriz que resulta de A por substituição da linha i de A , denotada L_i , por $L_i + zL_j$, onde

z denota um escalar inteiro e L_j denota a linha j de A . Seja C um qualquer conjunto de colunas de A e C' o conjunto de colunas de A' correspondente às mesmas posições. Decorre de resultados clássicos de Álgebra Linear que C' é uma base de A' se e só se C é uma base de A . Além disso, $\text{car}(A) = \text{car}(A')$. Sejam C e C' bases de A e A' , resp., quaisquer. Vamos provar que

$$d \equiv \text{m.d.c.}\{\det(C[I]): |I| = \text{car}(A)\} = \text{m.d.c.}\{\det(C'[I]): |I| = \text{car}(A)\} \equiv d'$$

onde $C[I]$ e $C'[I]$ denotam as submatrizes de C e C' , resp., com linhas indexadas por I .

Seja I tal que $|I| = \text{car}(A)$, qualquer. Se $i \notin I$ então $C[I] = C'[I]$ e, em particular, $\det(C'[I]) = \det(C[I])$. Por isso, d divide $\det(C'[I])$ e d' divide $\det(C[I])$. Se $i, j \in I$ então, embora $C'[I] \neq C[I]$, tem-se que $\det(C'[I]) = \det(C[I])$. Por isso, d divide $\det(C'[I])$ e d' divide $\det(C[I])$. Agora suponhamos que $i \in I$ e $j \notin I$. Então,

$$\det(C'[I]) = \det(C[I]) \pm z \det(C[I^*]) \quad (6.3)$$

com I^* tal que $|I^*| = \text{car}(A)$ e $j \in I^*$. Como d divide $\det(C[I])$ e $\det(C[I^*])$, concluímos, por (6.3), que d divide $\det(C'[I])$ e, pela arbitrariedade de I , d divide d' . Por outro lado, uma vez que $j \in I^*$, isto implica, como já vimos nos dois casos anteriores, que $\det(C[I^*]) = \det(C'[I^*])$ e, por isso, d' divide $\det(C[I^*])$. Por definição, d' divide $\det(C'[I])$, logo, por (6.3), d' divide $\det(C[I])$ e, pela arbitrariedade de I , d' também divide d . Concluimos que $d = d'$. \square

Prova: (do item (e)) Seja A uma matriz Unimodular. A matriz A' definida pelo acréscimo de uma linha de zeros à matriz A é Unimodular. Pelo item (d) da Propriedade 11, se substituirmos essa linha de zeros por uma combinação linear inteira das restantes linhas continuamos a obter uma matriz Unimodular. \square

Prova: (do item (f)) Seja A uma matriz Unimodular e seja L_i uma linha dessa matriz que é combinação linear inteira das restantes linhas, i.e., $L_i = \sum_{j \neq i} z_j L_j$, com z_j , para $j \neq i$, a denotarem escalares inteiros. Pelo item (d) da Propriedade 11, se substituirmos a linha L_i pela sua subtracção

com $\sum_{j \neq i} z_j L_j$ continuamos a obter uma matriz Unimodular. Esta matriz resultante coincide com a matriz A excepto na linha i que agora é uma linha de zeros. Por uma propriedade imediata, se removermos esta linha de zeros a matriz resultante permanece Unimodular. \square

Prova: (do item (g)) Seja A uma matriz Unimodular de característica r e A' a matriz que resulta de A por acréscimo da linha i , que é a linha e_j da matriz identidade. Se e_j pertence ao espaço das linhas de A então pelo item (e) da Propriedade 11, A' é Unimodular. Suponhamos, portanto, que e_j não pertence ao espaço das linhas de A . Então $\text{car}(A') = r + 1$. Além disso, a coluna j de A' , c'_j , pertence a todas as bases de A' , caso contrário, A' conteria $r + 1$ colunas linearmente independentes.

Seja C' uma base de A' . Queremos provar que

$$d' \equiv \text{m.d.c.}\{\det(C'[I']): |I'| = \text{car}(A')\} = 1$$

Se retirarmos a C' a coluna c'_j e a linha i obtemos uma base C de A . Seja I' tal que $|I'| = \text{car}(A')$ qualquer. Se $i \notin I'$ então $\det(C'[I']) = 0$, caso contrário, A' conteria $r + 1$ colunas linearmente independentes. Se $i \in I'$ então, usando regra de Laplace ao longo da linha de $C'[I']$ indexada por i , $\det(C'[I']) = \det(C[I' \setminus \{m + 1\}])$. Logo

$$d' \equiv \text{m.d.c.}\{\det(C'[I']): |I'| = \text{car}(A')\} = \text{m.d.c.}\{\det(C[I]): |I| = \text{car}(A)\} = 1.$$

\square

Prova: (do item (h)) Suponhamos que a linha i de A é a linha e_j da matriz identidade e seja A' a matriz que resulta de A por remoção da linha i . Se e_j pertence ao espaço das restantes linhas de A então, pelo item (f) da Propriedade 11, A' é Unimodular. Suponhamos, portanto, que e_j não pertence ao espaço das linhas de A . Então, $\text{car}(A') = r - 1$. Seja c_j a coluna j de A . Temos que c_j pertence a todas as bases de A , caso contrário, A' conteria r colunas linearmente independentes.

Seja C' uma base qualquer de A' cujas colunas são indexadas por J' . Queremos provar que

$$d' \equiv \text{m.d.c.}\{\det(C'[I']): |I'| = \text{car}(A')\} = 1$$

Como é evidente, as colunas de A indexadas por J' são $r - 1$ colunas de A linearmente independentes. Uma vez que $\text{car}(A) = r$, então existe $j^* \notin J'$ tal que as colunas de A indexadas por $J' \cup \{j^*\}$ formam uma base C de A . Seja I' tal que $|I'| = \text{car}(A')$ qualquer. Se usarmos regra de Laplace ao longo da linha de $C[I' \cup \{i\}]$ indexada por i , temos que $\det(C[I' \cup \{i\}]) = \pm \det(C'[I'])$. Então

$$d' = \text{m.d.c.}\{\det(C[I]): |I| = \text{car}(A) \text{ e } i \in I\}$$

Seja I tal que $|I| = \text{car}(A)$ qualquer. Se $i \notin I$ então $\det(C[I]) = 0$, caso contrário, A' conteria r colunas linearmente independentes. Logo

$$d' = \text{m.d.c.}\{\det(C[I]): |I| = \text{car}(A)\} = 1$$

□

Teorema 57 *Seja A uma matriz inteira de característica completa por colunas. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a). A é Unimodular.
- (b). Para todo o vector y tal que Ay é um vector inteiro, y é um vector inteiro.
- (c). Para todo o vector inteiro b , o sistema $A^T x = b$ tem solução inteira.
- (d). A matriz A^T pode ser conduzida à Forma Normal de Hermite $[H \ 0]$ com $H = I$.

Prova: Suponhamos que a matriz A é de dimensão $m \times n$. Pelo Teorema 4, podemos transformar a matriz A^T na Forma Normal de Hermite $[H \ 0]$ através de uma sequência de operações elementares por colunas (a), (b) ou (c) da Definição 4. Isto significa que, para uma adequada matriz quadrada U inteira e unimodular (isto é, $\det(U) = \pm 1$), $A^T U = [H \ 0]$. Como $U^{-1} = (1/\det(U))\text{adj}(U)$ e como U é uma matriz inteira unimodular então, U^{-1} também é uma matriz

inteira. Podemos assumir que em (c), $A^T = [H \ 0]$. Com efeito, para qualquer vector inteiro b de dimensão n , as soluções do sistema $A^T x = b$ e do sistema $(A^T U)x' = b$ estão relacionadas por $x = Ux' \Leftrightarrow x' = U^{-1}x$ o que prova que o sistema $A^T x = b$ tem uma solução inteira se e só se o sistema $(A^T U)x' = b$ também tiver. Além disso, para qualquer vector y de dimensão adequada, Ay é um vector inteiro se e só se $U^T Ay$ também o é e, por isso, podemos assumir que em (b), $A = [H \ 0]^T$. Por (a), (b) e (c) da Propriedade 11, A é unimodular se e só se $U^T A$ é unimodular e, por isso, podemos assumir também que em (a), $A = [H \ 0]^T$.

Vamos mostrar que (a), (b) e (c), com $A = [H \ 0]^T$, são ambos equivalentes a (d). Afirmar em (d) que $H = I$ é equivalente, por definição de Forma Normal de Hermite, a afirmar que $\det(H) = 1$.

(d) \Rightarrow (a) Considerando $A = [H \ 0]^T$, com $H = I$ (por hipótese), é óbvio que A é Unimodular.

(a) \Rightarrow (d) Consideremos que $A = [H \ 0]^T$. A única submatriz quadrada de A de ordem $n = \text{car}(A)$ é a matriz H^T . Por hipótese, $|\det(H^T)| = |\det(H)| = 1$. Como H é uma matriz triangular inferior cujos elementos da diagonal principal são todos positivos, $\det(H) = 1$.

(d) \Rightarrow (b) Considerando $A = [H \ 0]^T$, com $H = I$, é óbvio que, para qualquer vector inteiro y de dimensão n , se $Ay = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix}$ é um vector inteiro então, em particular, y é inteiro.

(b) \Rightarrow (d) Suponhamos que $A = [H \ 0]^T$. Por hipótese, para cada vector inteiro y de dimensão n , se $Ay = [H \ 0]^T y$ (ou, equivalentemente, $y[H \ 0] = [yH \ 0]$, agora, y como vector linha) é um vector inteiro, então y é inteiro. Isto é, se yH é inteiro então y é inteiro. Por definição de Forma Normal de Hermite, H é uma matriz não-singular. Seja l_i , $i = 1, \dots, n$ a i -ésima linha da matriz H^{-1} . Então, $l_i H = (e^i)^T$, para cada $i = 1, \dots, n$, em que e^i representa a i -ésima coluna da matriz identidade de ordem n . Por hipótese, l_i é um vector (linha) inteiro e, por isso, H^{-1} é uma matriz de inteiros. Como $HH^{-1} = I$ então $\det(H)\det(H^{-1}) = 1$. Como H e H^{-1} são matrizes de inteiros então, $|\det(H)| \geq 1$ (e $|\det(H^{-1})| \geq 1$). Por isso, $|\det(H)| = 1$, ou seja, como H é uma matriz triangular inferior cujos elementos da diagonal principal são todos positivos, $\det(H) = 1$.

(d) \Rightarrow (c) Consideremos $A^T = \begin{bmatrix} H & 0 \end{bmatrix}$ com $H = I$. Seja b um vector inteiro de dimensão n qualquer. O vector $\begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}$ de dimensão m é uma solução inteira do sistema $A^T x = b$.

(c) \Rightarrow (d) Consideremos que $A^T = \begin{bmatrix} H & 0 \end{bmatrix}$ e seja e^i , $i = 1, \dots, n$ a i -ésima coluna da matriz identidade de ordem n . Por hipótese, para cada $i = 1, \dots, n$, $A^T x^i = e^i$, para adequado vector inteiro x^i . Denotemos por x_H^i e x_0^i os vectores constituídos pelas componentes de x^i indexadas em $\begin{bmatrix} H & 0 \end{bmatrix} x^i = e^i$ pela matriz H e pela matriz nula, resp. Então, $Hx_H^i = e^i$, $i = 1, \dots, n$. Consideremos a matriz quadrada $X = [x_H^1 \ x_H^2 \ \dots \ x_H^n]$. Como $HX = I$ e H é uma matriz não-singular, $X = H^{-1}$ e, portanto, H^{-1} é uma matriz de inteiros. Tal como vimos em (b) \Rightarrow (d), $\det(H) = 1$. \square

Teorema 58 *Seja A uma matriz de inteiros. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a). A é Unimodular.

(b). O poliedro $P = \{x: Ax = b, x \geq 0\}$ é inteiro para todo vector inteiro b .

(c). O poliedro $Q = \{y: yA \geq c\}$ é inteiro para todo vector inteiro c .

Prova: (a) \Rightarrow (b) Seja b um vector inteiro qualquer tal que $P \equiv \{x: Ax = b, x \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^n$ é um poliedro não-vazio. Como o poliedro P tem pontos extremos, para provar que P é inteiro basta provar que todos os seus pontos extremos são inteiros. Seja \bar{x} um qualquer ponto extremo de P . Então, existe um subsistema $'Ax = b, x_N \geq 0'$ do sistema $'Ax = b, x \geq 0'$ tal que \bar{x} é a única solução do sistema

$$\begin{bmatrix} A \\ I[N] \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.4)$$

Sejam A_B e A_N as submatrizes de A constituídas pelas colunas $j \in B \equiv \{1, 2, \dots, n\} \setminus N$ e $j \in N$, resp. Então, \bar{x}_B é solução única do sistema $A_B x_B = b$. A matriz A_B tem característica completa por colunas e é Unimodular pelo item (d) da Propriedade 10. Por isso, pelo Teorema 57, \bar{x}_B é inteiro. Portanto $\bar{x} = (\bar{x}_B, 0)$ é um vector de inteiros, o que conclui a demonstração

(b) \Rightarrow (c) Suponhamos que o poliedro $P = \{x: Ax = b, x \geq 0\}$ é inteiro para todo b inteiro. Seja c um qualquer vector de inteiros tal que $Q = \{y: yA \geq c\}$ é não vazio. Seja b um qualquer vector de inteiros tal que o problema de optimização

$$\begin{aligned} \min \quad & yb \\ \text{s.a.} \quad & yA \geq c \end{aligned} \tag{6.5}$$

tenha valor óptimo finito. Por Dualidade Forte da Programação Linear, esse valor óptimo coincide com o valor óptimo de

$$\begin{aligned} \max \quad & cx \\ \text{s.a.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

Como $\{x: Ax = b, x \geq 0\}$ é um poliedro inteiro é c é inteiro, concluímos que o valor óptimo de (6.5) é inteiro. Da arbitrariedade de b , por um teorema leccionado nas aulas de Teoria de Optimização, o poliedro $\{y: yA \geq c\}$ é inteiro (aliás, acabámos de provar que o sistema de desigualdades “ $yA \geq c$ ” é TDI).

((c) \Rightarrow (a).) Suponhamos que A não é Unimodular. Então possui uma submatriz A_B constituída por $r = \text{car}(A)$ colunas linearmente independentes, tal que os subdeterminantes de B de ordem r têm um divisor comum $k > 1$. Como A_B^T não é Unimodular então, pelo Teorema 57, existe um vector de inteiros \tilde{c} tal que $A_B^T y = \tilde{c}$ (ou seja, $yA_B = \tilde{c}$) não tem solução inteira. Como A_B^T é uma matriz com característica completa por linhas então o sistema $A_B^T y = \tilde{c}$ é possível. Seja y_0 uma das soluções e consideremos o poliedro

$$Q_1 = \{y: yA \geq \lfloor y_0 A \rfloor\},$$

que é não vazio porque contém y_0 . O conjunto

$$F \equiv \{y \in Q_1: yA_B = \tilde{c}\}$$

é uma face de Q_1 , e é não vazia porque contém y_0 . Mas $F \subseteq \{y: yA_B = \tilde{c}\}$, que não contém qualquer vector de inteiros. Por isso, F não contém qualquer vector de inteiros pelo que, pelo Teorema 8 do Capítulo 1, Q_1 não seria um poliedro inteiro. \square

Como a matriz A_1 definida em (6.1) é Unimodular, o poliedro $P = \{x: A_1 x = b, x \geq 0\}$ é inteiro para todo inteiro b . Como a matriz A_2 definida em (6.1)

não é Unimodular, existe pelo menos um vector inteiro b tal que o poliedro $P = \{x: A_2x = b, x \geq 0\}$ não é inteiro. Por exemplo, para $b = (1, 1)$, o poliedro P possui o ponto extremo $(0, 0.3, -0.1)$.

Pela equivalência entre (a) e (c) do Teorema 58, concluímos que para qualquer matriz inteira A , o poliedro $\{x: Ax \leq b\}$ é inteiro para todo o b inteiro se e só se A^T é Unimodular.

Teorema 59 *Seja A uma matriz inteira. Então, A é Unimodular se e só existir alguma solução ótima inteira em ambos os problemas*

$$\max\{cx: Ax = b, x \geq 0\} \quad e \quad \min\{yb: yA \geq c\} \quad (6.6)$$

para todos os vectores inteiros b, c tal que um deles tenha valor ótimo finito.

Prova: (\Rightarrow) Suponhamos que A^T é Unimodular e sejam b, c vectores inteiros quaisquer tal que um dos problemas lineares em (6.6) tenha valor ótimo finito. Por Dualidade Forte da Programação Linear, ambos os problemas em (6.6) possuem valor ótimo finito, que até é o mesmo. Pelo teorema anterior, ambos os poliedros

$$\{x: Ax = b, x \geq 0\}, \quad \{y: yA \geq c\} \quad (6.7)$$

são inteiros. Num problema linear com valor ótimo finito, o conjunto de soluções ótimas é uma face da região admissível. Como ambos os poliedros são inteiros, todas as suas faces possuem vectores inteiros. Por isso, em ambos os problemas em (6.6) existe solução ótima inteira.

(\Leftarrow) Para provar o recíproco, suponhamos que A não é Unimodular. Pelo teorema anterior, existe um vector inteiro b tal que o poliedro $\{x: Ax = b, x \geq 0\}$ não é inteiro. Pelo Teorema 8, existe uma função objectivo cx , definida por um vector inteiro c sem perda de generalidade, tal que o problema $\max\{cx: Ax = b, x \geq 0\}$ possui valor ótimo finito e nenhuma solução ótima é inteira, o que é absurdo. \square

6.2 Relação com a Unimodularidade Total

Evidentemente, toda a matriz Totalmente Unimodular é Unimodular. Além disso, uma matriz de zeros, uns e menos uns, Unimodular não tem que ser

Totalmente Unimodular conforme ilustrámos com a matriz (6.2). Em geral, temos a seguinte relação, já enunciada na Proposição 1 do Capítulo 1.

Proposição 9 *Uma matriz A de zeros, uns e menos uns, é Totalmente Unimodular se e só se a matriz $[I \ A]$ é Unimodular.*

Lema 30 *Seja A uma matriz de inteiros com característica completa por linhas. Então as seguintes afirmações equivalem-se:*

- (a). *Para toda a base B de A a matriz $B^{-1}A$ é Totalmente Unimodular;*
- (b). *Para toda a base B de A a matriz $B^{-1}A$ é Unimodular;*
- (c). *Para toda a base B de A a matriz $B^{-1}A$ é inteira;*
- (d). *Existe uma base B de A tal que a matriz $B^{-1}A$ é Totalmente Unimodular;*
- (e). *Existe uma base B de A tal que a matriz $B^{-1}A$ é Unimodular.*

Prova: Vamos mostrar que (c) e (e) são equivalentes a (b) e fica provado que (b), (c) e (e) são equivalentes entre si. Depois, mostraremos que (a) é equivalente a (b) e (d) é equivalente a (e), o que prova que (a), (b), (c), (d) e (e) são equivalentes entre si.

(b) \Rightarrow (c) É imediato.

(c) \Rightarrow (b) Seja B uma qualquer base de A . Por hipótese, a matriz $B^{-1}A$ é inteira. Seja B^* uma qualquer base desta matriz. Então, B^* é inteira e $B^* = B^{-1}B'$, sendo B' uma adequada base de A . Por hipótese

$$(B')^{-1}A \text{ é inteira.}$$

A matriz $(B')^{-1}B$ é uma submatriz de $(B')^{-1}A$; logo, também é inteira. Além disso, é uma base desta matriz porque

$$\det((B')^{-1}B) = \det((B')^{-1}) \cdot \det(B) \neq 0.$$

Como

$$B^{*-1} = (B')^{-1}B,$$

concluimos que B^{*-1} é inteira. Uma vez que B^* e B^{*-1} são matrizes invertíveis inteiras, então $|\det(B^*)| \geq 1$ e $|\det(B^{*-1})| \geq 1$. De $|\det(B^*)| \cdot |\det(B^{*-1})| = 1$ vem que $|\det(B^*)| = 1$. Concluimos que $B^{-1}A$ é Unimodular.

(b) \Rightarrow (e) É imediato.

(e) \Rightarrow (b) Seja B_0 a base de A tal que $B_0^{-1}A$ é Unimodular. Seja B uma qualquer base de A e B' uma qualquer base de $B^{-1}A$. Queremos provar que $|\det(B')| = 1$. Como B' é uma base de $B^{-1}A$, então, $B' = B^{-1}B^*$ com B^* uma adequada base de A . Como B e B^* são bases de A , então, $B_0^{-1}B$ e $B_0^{-1}B^*$ são bases de $B_0^{-1}A$. Uma vez que $B_0^{-1}A$ é Unimodular, então, $|\det(B_0^{-1}B)| = |\det(B_0^{-1}B^*)| = 1$. Logo,

$$|\det(B')| = |\det(B^{-1}B^*)| = |\det[(B_0^{-1}B)^{-1}B_0^{-1}B^*]| = \frac{|\det(B_0^{-1}B^*)|}{|\det(B_0^{-1}B)|} = \frac{1}{1} = 1.$$

(a) \Rightarrow (b) e (d) \Rightarrow (e) É imediato.

(b) \Rightarrow (a) e (e) \Rightarrow (d) Seja B uma qualquer base de A . Basta mostrar que se $B^{-1}A$ é Unimodular, então, $B^{-1}A$ é TU. Como I é uma base de $B^{-1}A$, então, $B^{-1}AP = [I \ C]$ para uma adequada matriz de permutação P e uma determinada matriz C . É óbvio que $[I \ C]$ é Unimodular. Pela Proposição 9, C é TU e, pela Propriedade imediata (f) das matrizes TU, $[I \ C]$ também é TU. Por isso, $B^{-1}A = [I \ C]P^{-1}$ também é TU. \square

Lema 31 *Seja A uma matriz Unimodular com característica completa por linhas e B uma base qualquer de A . Então, $\det(B) = \pm 1$ e $B^{-1}A$ é Totalmente Unimodular.*

Prova: Seja B uma base qualquer de A . Por hipótese, A é Unimodular e, portanto, $\det(B) = \pm 1$. Como B é uma matriz inteira e $\det(B) = \pm 1$, então

$$B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} \text{adj}(B)$$

é uma matriz inteira. Logo, $B^{-1}A$ é uma matriz inteira. Pelo Lema 30, $B^{-1}A$ é TU. \square

Lema 32 *Seja A uma matriz com característica completa por linhas. Se existe uma base B de A tal que $\det(B) = \pm 1$ e a matriz $B^{-1}A$ é Totalmente Unimodular, então A é Unimodular.*

Prova: Por hipótese, existe uma base B_0 de A tal que $\det(B_0) = \pm 1$ e a matriz $B_0^{-1}A$ é TU. Seja B uma base qualquer de A . Queremos mostrar que $|\det(B)| = 1$. A matriz $B^{-1}B_0$ é uma base de $B^{-1}A$ pois é uma submatriz quadrada de colunas de $B^{-1}A$ e

$$\det(B^{-1}B_0) = \det(B^{-1}) \det(B_0) \neq 0 \quad (6.8)$$

uma vez que B_0 e B são bases de A . Pelo Lema 30, $B^{-1}A$ é TU. Logo, $|\det(B^{-1}B_0)| = 1$. Como também $|\det(B_0)| = 1$, então, por (6.8), $|\det(B^{-1})| = 1$ e $|\det(B)| = 1/|\det(B^{-1})| = 1$. \square

Lema 33 *Seja A uma matriz $m \times n$ Unimodular, de característica r e seja B uma qualquer base de A . Então, existe uma única matriz $r \times n$, denotada C , tal que $BC = A$. Mais, C é uma matriz Totalmente Unimodular.*

Prova: A matriz $r \times n$, denotada C , tal que $BC = A$ está unicamente determinada. Com efeito, um determinado vector é a j -ésima coluna de C se e só se é solução do sistema $Bc = a_j$, onde a_j denota a j -ésima coluna de A . Como B é uma base de A , então a_j pertence ao espaço gerado pelas colunas de B e, por isso, o sistema $Bc = a_j$ é possível, $\forall j = 1, \dots, n$. Como r é o número de colunas de B e $\text{car}(B) = r$, isto significa que no sistema possível $Bc = a_j$ não existem incógnitas livres. Então, o sistema $Bc = a_j$ é possível determinado, $\forall j = 1, \dots, n$.

Suponhamos que B é uma base de A . Pela Propriedade (d), B é uma matriz Unimodular. Existe uma matriz de permutação P tal que $AP = [B \ D]$. Como B^T é uma matriz de inteiros de característica completa por linhas, B^T pode ser conduzida a uma matriz na Forma Normal de Hermite $[H \ 0]$ através de uma sequência de operações elementares (unimodulares) por colunas. Como A é Unimodular, então, pelo Teorema 57, existe uma matrix U , inteira, $m \times m$, unimodular, tal que $B^T U = [I \ 0]$. Assim,

$$U^T AP = U^T [B \ D] = [U^T B \ U^T D] = \begin{bmatrix} I & E \\ 0 & F \end{bmatrix}. \quad (6.9)$$

com E, F matrizes de inteiros. Além disso, $F = 0$ porque $\text{car}(U^T AP) = \text{car}(A) = \text{car}(B) = r$. Por isso,

$$A = (U^T)^{-1} \begin{bmatrix} I & E \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^T. \quad (6.10)$$

Seja $C = [I \ E]P^T$, que é uma matriz de inteiros. Como

$$BC = B[I \ E]P^T = \left((U^T)^{-1} \begin{bmatrix} I & E \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) [I \ E]P^T = (U^T)^{-1} \begin{bmatrix} I & E \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^T,$$

concluimos que $BC = A$. A unicidade decorre do que observamos num parágrafo anterior. A matriz AP resulta de A por troca de colunas de A . Esta operação preserva a unimodularidade de A . A matriz $U^T AP$ resulta de AP após operações elementares de trocas de linhas e adição a linhas de múltiplos inteiros de outras linhas. Estas operações preservam a unimodularidade. Por isso, a matriz $U^T AP$ é Unimodular. A matriz $[I \ E]$ é uma submatriz de $U^T AP$ por remoção de linhas nulas. Pelo item (c) da Propriedade 11 das matrizes Unimodulares, $[I \ E]$ também é Unimodular. Pela Proposição 9, E é uma matriz TU. Por isso, $[I \ E]$ é TU. A matriz P^T é uma matriz de permutação. Por isso, $C = [I \ E]P^T$ é TU. \square

Teorema 60 *Seja A uma matriz de inteiros de dimensão $m \times n$ e de característica r . Então as seguintes afirmações equivalem-se:*

- (a). *A é Unimodular;*
- (b). *Toda a base B de A é tal que: B é Unimodular e a (única) matriz C , $r \times n$, tal que $BC = A$ é Totalmente Unimodular;*
- (c). *Existe uma base B de A tal que: B é Unimodular e a (única) matriz C , $r \times n$, tal que $BC = A$ é Totalmente Unimodular.*

Prova: Se A é de característica completa por linhas, então, a matriz C de (b) e (c) é $B^{-1}A$. Por isso, (a) \Rightarrow (b) é válida pelo Lema 31 e (c). \Rightarrow (a) é válida pelo Lema 32. Logo, fica provado este teorema. Suponhamos que A não é de característica completa por linhas.

(a) \Rightarrow (b) Seja B uma qualquer base de uma matriz unimodular A , $m \times n$ e de característica r . Pelo item (d) da Propriedade 10 das matrizes Unimodulares,

B é Unimodular. Seja C a única matriz $r \times n$ tal que $BC = A$. A existência, unicidade e caracterização estão expressas no Lema 33. Como B é Unimodular, então, também por este Lema, C é TU.

(b) \Rightarrow (c) É imediato.

(c) \Rightarrow (a) Seja A uma matriz de inteiros, $m \times n$ de característica r . Por hipótese, existe uma base B_0 de A tal que B_0 é unimodular e a (única) matriz C_0 , $r \times n$, tal que $BC_0 = A$ é TU. Já vimos na demonstração do Lema 33 que $C_0 = [IE]P^T$ e que

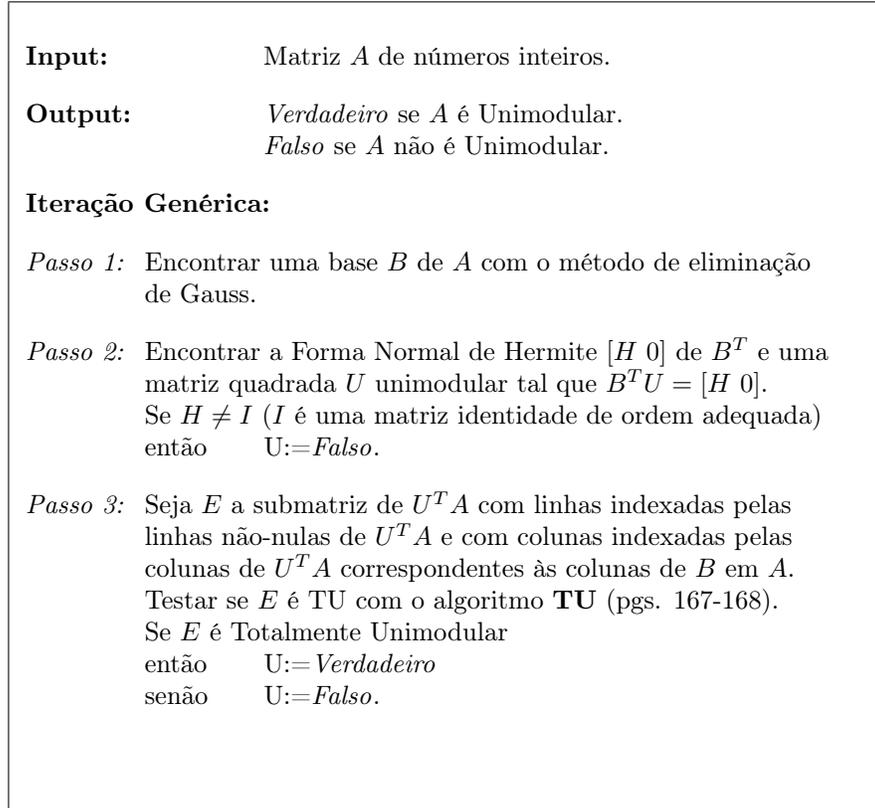
$$\begin{aligned} A &= (U^T)^{-1} \begin{bmatrix} I & E \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^T \\ &= (U^T)^{-1} \begin{bmatrix} C_0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

O factor da direita em (6.11) é TU, por hipótese. Em particular, também é Unimodular. Assim, a matriz A resulta desta última matriz por aplicação de operações elementares por linhas (por acção de $(U^T)^{-1}$) que, pelos itens (a) e (d) da Propriedade 11 das matrizes Unimodulares, preservam a unimodularidade. Por isso, A é Unimodular. \square

O Teorema 60 permite definir um algoritmo para testar se uma dada matriz é Unimodular ou não, à custa de um algoritmo para testar se uma dada matriz é Totalmente Unimodular ou não. O algoritmo está descrito na página seguinte.

Algoritmo $\mathbf{U}(A)$

(1/1)

Figura 6.1: $\mathbf{U}(A)$

Teorema 61 *O algoritmo \mathbf{U} da Figura 6.1 averigua em tempo polinomial se uma dada matriz de zeros, uns e menos uns, é Unimodular ou não.*

Prova: Começamos por provar que o algoritmo \mathbf{U} averigua a unimodularidade de uma matriz A de números inteiros e de dimensão, digamos, $m \times n$. Seja B a base de $A = [a_{ij}]$, $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$, encontrada no final da implementação do Passo 1 do algoritmo. Implementemos o Passo 2 com a matriz B^T . No final, se a Forma Normal de Hermite de B^T não é $[I \ 0]$, então, pelo Teorema 57, B não é Unimodular. Logo, por definição de matriz Unimodular, a matriz A também não é Unimodular. Se a Forma Normal de Hermite de B^T é $[I \ 0]$, então, B é Unimodular e avançamos para o Passo 3.

Relembre-se agora que, pelo Lema 33,

$$U^T A P = \begin{bmatrix} I & E \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

em que E é precisamente a matriz definida no Passo 3. Além disso, a matriz C do Teorema 60 é tal que $C = [IE]P^T$. No final da implementação do Passo 3, se E é TU, então, C também é TU porque, pelas propriedades (c) e (f) das matrizes TU, C é TU se e só se E é TU. Pela equivalência entre (a) e (c) do Teorema 60, A é Unimodular. Se a matriz E não é TU, então, C também não é TU e, pela equivalência entre (a) e (b) do Teorema 60, A não é Unimodular.

Falta só mostrar que o tempo do algoritmo **U** é polinomial. Começemos por notar que se implementarmos o Passo 1 com o método de eliminação de Gauss e o Passo 2 com o algoritmo **H** da Figura 1.2 descrito na página 23, então, pelo exposto no Capítulo 1, as entradas das matrizes que ocorram são limitadas, em módulo, polinomialmente por $\max\{|a_{ij}| : i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n\}$. Por isso, basta contabilizar o número de operações numéricas (somar, multiplicar, dividir e comparar números). O Passo 1 tem tempo $\mathcal{O}(m^2n) \leq \mathcal{O}[(m+n)^2m]$. Pelo Corolário 1 do Teorema 6, o Passo 2 pode ser executado em tempo $\mathcal{O}(m^3) \leq \mathcal{O}[(m+n)^2m]$. No Passo 3, $U^T A$ é uma matriz que tem a mesma dimensão que A , e E é uma submatriz de $U^T A$. Por isso, a unimodularidade total de E pode ser testada em tempo polinomial

$$\mathcal{O}[(m+n)^{13}m], \quad (6.12)$$

pelo Teorema 47 (ver (4.111)). Claramente, (6.12) é o tempo total do algoritmo **U** e, assim, testar a unimodularidade ou a unimodularidade total de uma matriz emprega o mesmo tempo polinomial. \square

Referências Bibliográficas

- CAMION, PAUL. 1965. Characterization of totally unimodular matrices. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **16**, 1068–1073.
- CORNUÉJOLS, GÉRARD. 2001. *Combinatorial optimization*. CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, vol. 74. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM). Packing and covering.
- CUNNINGHAM, WILLIAM H., & EDMONDS, JACK. 1980. A combinatorial decomposition theory. *Canad. J. Math.*, **32**(3), 734–765.
- GREENBERG, HARVEY J. (ed). 1982. *Advanced techniques in the practice of operations research*. Publications in Operations Research Series, vol. 4. New York: Elsevier. Papers presented at the ORSA/TIMS Meeting held in Colorado Springs, Colo., November 10–12, 1980.
- KORTE, BERNHARD, & VYGEN, JENS. 2000. *Combinatorial optimization*. Algorithms and Combinatorics, vol. 21. Berlin: Springer-Verlag. Theory and algorithms.
- MAURRAS, J.-F., TRUEMPER, K., & AKGÜL, M. 1981. Polynomial algorithms for a class of linear programs. *Math. Programming*, **21**(2), 121–136.
- NEMHAUSER, GEORGE, & WOLSEY, LAURENCE. 1999. *Integer and combinatorial optimization*. Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization. New York: John Wiley & Sons Inc. Reprint of the 1988 original, A Wiley-Interscience Publication.

- SCHRIJVER, ALEXANDER. 1986. *Theory of linear and integer programming*. Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics. Chichester: John Wiley & Sons Ltd. A Wiley-Interscience Publication.
- SEYMOUR, P. D. 1980. Decomposition of regular matroids. *J. Combin. Theory Ser. B*, **28**(3), 305–359.
- SEYMOUR, P. D. 1985. Applications of the regular matroid decomposition. *Pages 345–357 of: Matroid theory (Szeged, 1982)*. Colloq. Math. Soc. János Bolyai, vol. 40. Amsterdam: North-Holland.
- TRUEMPER, KLAUS. 1978. Algebraic characterizations of unimodular matrices. *SIAM J. Appl. Math.*, **35**(2), 328–332.
- TRUEMPER, K. 1980. Complement total unimodularity. *Linear Algebra Appl.*, **30**, 77–92.
- WEST, DOUGLAS B. 1996. *Introduction to graph theory*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall Inc.
- WOLSEY, LAURENCE A. 1998. *Integer programming*. Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization. New York: John Wiley & Sons Inc. A Wiley-Interscience Publication.