

Teoria dos Jogos em socorro da Democracia

João Luís Soares - Universidade de Coimbra

Escola Secundária José Falcão
Coimbra, 9 de março de 2026



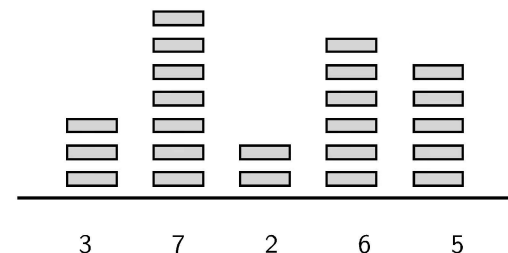
Motivação 1/3 - Jogos Combinatórios

(NIM) A partir de um conjunto de uma ou várias pilhas de fichas, dois jogadores alternam na remoção de uma ou mais fichas de uma das pilhas.

O primeiro que não puder efetuar uma

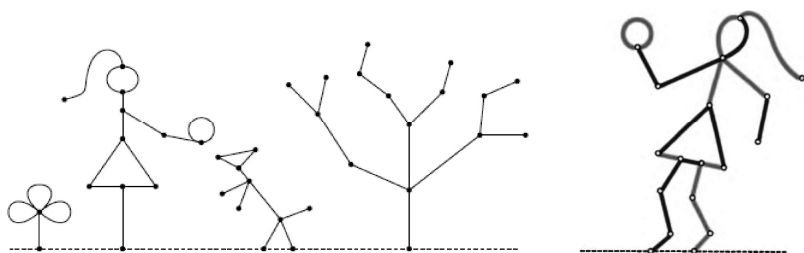
jogada, perde (regra *normal*) ou ganha (regra *misère*).

Pode o primeiro a jogar assegurar a vitória? O segundo?



Motivação 1/3 - Jogos Combinatórios

Hackenbush - imparcial (*green*) e partizan (*red-and-blue*):



Dois jogadores alternam na remoção de arestas ligando dois vértices. Sempre que uma parte da figura ficar desconectada do *chão*, ela é completamente removida também. A vitória é atribuída consoante a regra de término adotada, normal ou *misère*.

Winning Ways for Your Mathematical Plays, vols 1-4, Berlekamp, Conway, Guy (2001,2003),

Fair Games, Guy, COMAP (1989), etc



Motivação 2/3 - Partilha de uma renda mensal de habitação

Ana, Becas e Cocas pretendem partilhar os 500 euros da renda mensal de um apartamento com três quartos. Em que quarto e quanto deverá pagar cada uma, de modo a que a partição da renda seja satisfatória para todas (livre de invejas)?



Francis Su, *Rental Harmony: Sperner's Lemma vs Fair Division*, Amer. Math. Monthly, 106 (1999), 930-942



Motivação 3/3 - Índice de Poder de Shapley-Shubik

Assembleia da República Portuguesa

2024	1/2	2/3	2025	1/2	2/3
80	0,33	0,5	91	0,33	0,5917
78	0,33	0,5	58	0,33	0,1381
50	0,33	0	60	0,33	0,1583
8	0	0	9	0	0,0381
5	0	0	1	0	0,0048
4	0	0	3	0	0,0214
4	0	0	6	0	0,0381
1	0	0	1	0	0,0048
0	0	0	1	0	0,0048
	>115	>153		>115	>153



Índice

- 1 **Representação Proporcional** (*Apportionment*) - identificar os elementos de uma comissão representativa de toda uma população de indivíduos. Eg: Deputados num parlamento nacional, ou europeu; Elementos de uma Comissão Administrativa numa grande empresa.
- 2 **Definição de Círculos Eleitorais** (*Political (Re)Districting*) - agrupar unidades básicas geográficas em círculos (distritos) eleitorais, Eg: Agrupar freguesias em círculos eleitorais; Agrupar concelhos em regiões administrativas.



Representação Proporcional (*Apportionment*)

- Em sistemas uninominais, o conjunto global de eleitores é particionado em círculos eleitorais (eg, agrupamentos de reguesias). Cada círculo elege um deputado seguindo um método de seriação, como os que vimos.
- Em sistemas plurinominais, o conjunto global de eleitores está particionado de acordo com a divisão administrativa. Cada unidade administrativa elege um conjunto de deputados. Os deputados são, então, afetados aos partidos por métodos que asseguram proporcionalidade do número de votantes relativamente ao número total de eleitores (na mesma unidade)
- Neste caso, a identificação do número de deputados de cada unidade administrativa é também feita métodos que asseguram proporcionalidade (da população na unidade relativamente à população global).
- Se V é o número de eleitores (ou pessoas) e M é o número de lugares (assentos, deputados, representantes). Então,

$\frac{V}{M}$ é o número médio de eleitores representados por um deputado

- Excel: V/M em diversos países da união europeia.

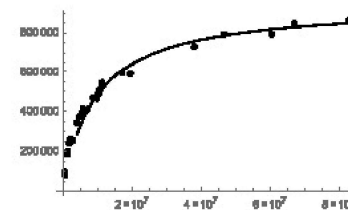


Representação Proporcional em sistemas plurinominais

- Se v_i é o número de eleitores no partido i então o **problema** é o descobrir o número $m_i \in \mathbb{N}_0$ de lugares afetos ao partido i tal que

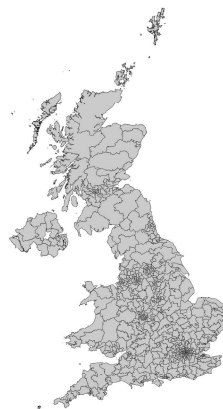
$$m_1 + m_2 + \dots + m_n = M, \quad m_i \approx q_i \equiv \left(\frac{v_i}{V} \right) M, \text{ para todo } i.$$

- Solução:** métodos de arredondamento (Hamilton) e métodos dos divisores (Adams, D'Hondt=Jefferson, Dean, Huntigton-Hill, Webster=Sainte-Laguë). Todos são soluções legítimas porque o problema não está bem definido.
- Excel: Coimbra, Parlamento Europeu.



Sistema eleitoral britânico (Ing+Esc+Gal+IrN)

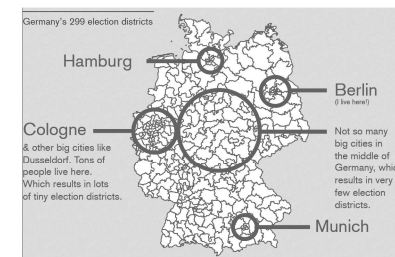
- Monarquia constitucional e parlamentar. Os 650 lugares da Câmara baixa do Parlamento são eleitos de cinco em cinco anos.
- No dia da eleição, cada eleitor escolhe um candidato de entre vários numa lista específica do seu distrito eleitoral. Existem 650 distritos eleitorais (cada um com 80 mil eleitores, aprox).
- Em cada distrito, o candidato mais votado ocupará um lugar na Câmara baixa do Parlamento.
- O partido (ou coligação) com maioria no Parlamento (> 325) tem o direito de constituir governo.



Sistema eleitoral alemão

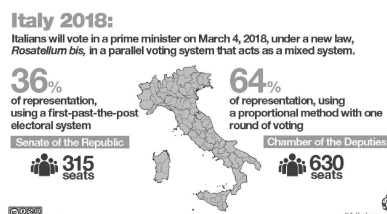
- República Parlamentar e Federal, com 16 estados. Os 630 lugares da Câmara baixa (Bundestag) do Parlamento são eleitos de quatro em quatro anos.
- No dia da eleição, cada eleitor escolhe no seu seu distritos eleitoral um candidato e um partido. A escolha do candidato é independente da escolha do partido. Existem 299 distritos eleitorais (cada um com 280 mil eleitores, aprox).
- Os 630 lugares são distribuídos pelos partidos proporcionalmente ao total nacional de votos, excluindo < 5% e < 3 vitórias (nos 299 distritos).
- A totalidade dos lugares atribuídos a cada partido é repartida pelos 16 estados (proporcionalmente aos votos obtidos por esse partido em cada estado).
- A afetação de pessoas aos lugares decorre de acordo com uma lista do partido, com prioridade para os candidatos que venceram distritos.

- Candidatos independentes vitoriosos no seu distrito são eleitos automaticamente. Pode eventualmente ser necessário uma ajustamento no número total de deputados para respeitar proporcionalidade.
- O partido (ou coligação) com maioria no Parlamento tem o direito de constituir governo.



Sistema eleitoral italiano

- República Parlamentar. Os 400 (eram 630) lugares da Câmara baixa (Camera di Deputati) do Parlamento são eleitos de cinco em cinco anos.
- No dia da eleição, cada eleitor escolhe um candidato de entre vários numa lista específica do seu distrito eleitoral e um partido.
- Existem 147 distritos eleitorais (cada um com 350 mil eleitores, aprox). Em cada distrito, o candidato mais votado ocupará um lugar no Parlamento.
- Os restantes 253 lugares são distribuídos pelos partidos proporcionalmente ao total nacional de votos, excluindo < 3%. (oito dos quais, relativos aos italianos no estrangeiro, são eleitos em separado)
- A distribuição da proporção é especialmente complexa quanto ao tratamento dado às coligações.
- O partido (ou coligação) com maioria no Parlamento tem o direito de constituir governo.



Sistema eleitoral português

- República Parlamentar. Os 230 lugares do Parlamento são eleitos de quatro em quatro anos.
- No dia da eleição, cada eleitor escolhe um partido.
- Existem 22 distritos eleitorais (cada um com 47 mil eleitores, aprox). A cada distrito está afeto um número de lugares proporcional à sua população (ao maior, 48; ao menor, 2).
- Em cada distrito, os lugares são distribuídos pelos partidos proporcionalmente ao número de votos.
- O partido (ou coligação) com maioria no Parlamento tem o direito de constituir governo.



Excel: Distribuição de deputados no país (um único círculo), em coimbra, em lisboa, em portalegre.

Political Districting

O *Political Districting* é um problema de partição do território, i.e., agrupar células de unidades territoriais (eg, freguesias) numa quantidade pré-definida de círculos eleitorais (uninominais), de modo a satisfazer os seguintes critérios;

- **Integridade:** nenhuma freguesia é repartida entre dois círculos eleitorais
- **Contiguidade:** duas freguesias dentro dum mesmo círculo devem ser conectáveis dentro desse círculo.
- **Equilíbrio demográfico:** o número de habitantes num mesmo círculo deve ser aproximadamente o número médio da população total por círculo.
- **Fronteiras administrativas:** As freguesias num mesmo círculo devem pertencer ao mesmo distrito administrativo.
- **Fronteiras naturais:** os círculos devem respeitar barreiras naturais, rios, mar, etc
- **Outras fronteiras:** não separar grupos étnicos artificialmente.

No caso de Portugal, consiste em identificar 230 grupos de freguesias.



Political Districting - dificuldades

Considere um território com nove freguesias. Há três lugares para distribuir. Considerem-se três partições distintas para a seguinte distribuição de votos: o partido A obteve 23 votos e o partido B, 26,

A :	<table><tr><td>1</td><td>5</td><td>1</td></tr><tr><td>3</td><td>5</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>5</td><td>1</td></tr></table>	1	5	1	3	5	1	1	5	1	<table><tr><td>7</td></tr><tr><td>9</td></tr><tr><td>7</td></tr></table>	7	9	7	<table><tr><td>5</td><td>15</td><td>3</td></tr></table>	5	15	3	<table><tr><td>9</td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td>3</td></tr><tr><td></td><td>11</td><td></td></tr></table>	9					3		11	
	1	5	1																									
	3	5	1																									
1	5	1																										
7																												
9																												
7																												
5	15	3																										
9																												
		3																										
	11																											
B :	<table><tr><td>3</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td><td>5</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td><td>3</td></tr></table>	3	2	3	2	3	5	3	2	3	<table><tr><td>8</td></tr><tr><td>10</td></tr><tr><td>8</td></tr></table>	8	10	8	<table><tr><td>8</td><td>7</td><td>11</td></tr></table>	8	7	11	<table><tr><td>7</td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td>11</td></tr><tr><td></td><td>8</td><td></td></tr></table>	7					11		8	
	3	2	3																									
	2	3	5																									
3	2	3																										
8																												
10																												
8																												
8	7	11																										
7																												
		11																										
	8																											
	$0 \rightarrow A,$ $3 \rightarrow B$	$1 \rightarrow A,$ $2 \rightarrow B$	$2 \rightarrow A,$ $1 \rightarrow B$																									



Referências

- *Mathematics to the Rescue of Democracy*, P. Serafini, Springer, 2020.
- *Majority Judgement: measuring, ranking and voting*, M. Balinski, R. Laraki, MIT Press, 2010.
- *Fair representation, Meeting the Ideal of One Man, One Vote*, M. Balinski, H. Young, Brookings Institution Press, 2001.
- *Judge: don't vote!*, M. Balinski, R. Laraki, Operations Research 62 (3), 2014.
- *Matemática Aplicada às Ciências Sociais*, 10º, Maria Augusta Neves et al, Porto Editora, 2024.
- *What is Majority Judgment?*, <https://mieuxvoter.fr/en> acedido em 8 de março de 2026.

