

Paradoxo de Arrow na Seriação Social

João Luís Soares - Universidade de Coimbra

Escola Secundária José Falcão
Coimbra, 11 de março de 2026



Índice

- 1 **Seriação Social Tradicional** (*Traditional Social Choice*) - ordenar (ou encontrar um *ranking*, ou seriar) um conjunto de candidatos a partir de *propostas de ordenação individuais dos candidatos* por parte de um conjunto de eleitores.
- 2 **Novos métodos de Seriação Social** (*Majority Judgment*, Balinski e Laraki'2010) - ordenar um conjunto de candidatos a partir de *elementos de avaliação individual dos candidatos* por parte de um conjunto de eleitores. (*I.e.*, notas, medidas, julgamentos de adequação)

Problemas tipo:

Presidente da República,
Candidatos a uma vaga de emprego,
Campeonato Nacional de Futebol,
Classificar Vinhos,

Festival Eurovisão da canção,
Campeonato de Fórmula 1,
Volta a Portugal em Bicicleta,
Onde ir de férias, restaurante, etc



Desafio (*a decisão democrática é sempre a melhor?*)

- 2 Candidatos, 5 eleitores. Quem deverá ser o Presidente da República?

	A	B
Eleitor 1	(Acceptable)	X (Good)
2	(Acceptable)	X (Good)
3	X (Acceptable)	(Poor)
4	(to Reject)	X (Poor)
5	(to Reject)	X (Poor)

- Mais de 50% dos eleitores prefere o candidato *B* ao candidato *A*. A resposta parece óbvia!
- Mas, ... com mais informação da parte dos eleitores (para além de *X*), continuará o candidato *B* a ser a melhor escolha?
- Conclusão: a escolha final, o *output*, depende de tipo de informação definida como *input*.
- Desde os tempos da Revolução Francesa, e antes, obviamente, que os inputs são *rankings* individuais. Porque, afinal, o output que se pretende é também um *ranking*.



Boletim de Voto para a Eleição do Presidente da República Portuguesa em Janeiro de 2026

Eleição para a Presidência da República

Luís Ricardo Moreira de Sousa		☐
André Pestana da Silva		☐
Eduardo Jorge Costa Pinto		☐
Joana Beatriz Nunes Vicente Amaral Dias Terrinha		☐
Manuel João Gonçalves Rodrigues Vieira		☐
José António de Jesus Cardoso		☐
Catarina Soares Martins		☐
João Fernando Cotrim de Figueiredo		☐
Humberto Raimundo Joaquim Correia		☐
António José Martins Seguro		☐
Luís Manuel Gonçalves Marques Mendes		☐
André Claro Amâncio Ventura		☐
António Filipe Galão Rodrigues		☐
Henrique Eduardo Passalâquia de Gouveia e Melo		☐



Seriação de um conjunto de candidatos

Problema: Um conjunto de candidatos é apresentado a um conjunto (eventualmente vasto) de eleitores. Assume-se que cada eleitor consegue explicitar uma relação de preferência (=relação binária completa e transitiva) entre os candidatos.

Eg, um eleitor que prefira o candidato D sobre todos os demais; prefira os candidatos A, B sobre os candidatos C, E, e seja indiferente relativamente aos candidatos A e B, e também C e E, pode ter a sua preferência esquematizada como

$$D \rightarrow A \sim B \rightarrow C \sim E$$

Que significará $D \rightarrow A \sim B \sim C \sim E$?

Com base neste tipo de input, que seriação (output) dos candidatos representa melhor as preferências de todos os eleitores?

(recordar os exemplos anteriores, inclusivé os desportivos/culturais)



Métodos de Condorcet (1743-1794) e Borda (1773-1799)

1 eleitor :	A	>	B	>	C
1 eleitor :	A	>	C	>	B
2 eleitores:	C	>	A	>	B
1 eleitor :	B	>	A	>	C

	A	B	C
A	•	4	3
B	1	•	2
C	2	3	•

	B	C
B	•	2
C	3	•

Portanto, A é o vencedor de Condorcet. Depois de repetirmos a mesma ideia sem A, concluímos que a solução de Condorcet é $A > C > B$.

A solução de Borda consiste em atribuir pontos a cada candidato segundo a posição na preferência de cada eleitor (2 para primeiro, 1 para segundo, 0 para terceiro:

$$v(A) = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 7$$

$$v(B) = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 3$$

$$v(C) = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 5$$

Portanto, a solução de Borda é $A > C > B$, a mesma de Condorcet.



Métodos de Condorcet e Borda, alguns comentários

- O método de Condorcet nem sempre é aplicável. Podem existir os ciclos de Condorcet em que, eg, $A > B > C > A$. As variantes de Copeland e de Schulz desembaraçam-se dos ciclos mas não são aplicáveis sempre.
- Borda é sempre aplicável mas pode definir soluções diferentes para sistemas de pontuação diferentes (Formula 1, Eurovisão).

- Irrelevância das Alternativas Independentes:** Condorcet, sim; Borda, não. Considere-se, eg,

2 eleitores:	A	>	C	>	B
2 eleitores:	C	>	B	>	A
1 eleitor :	A	>	C	>	B

- Condorcet e Borda podem definir soluções diferentes.



Run-off e Instant Run-off

- Quando não existe um candidato preferido por mais de 50% dos eleitores, obriga-se à realização de uma ou mais voltas (*Run-off*). Deste modo, a seriação (a ordenação dos candidatos) é sempre possível.
- de modo equivalente, se a relação de preferência de cada eleitor for conhecida (eg, Austrália), os resultados das várias voltas são inferidos, sem efetivamente as realizar (*Instant Run-off*).
- Quem eliminar a cada volta? Várias possibilidades: todos menos os dois mais votados (em primeiro lugar) (*second-past-the-post*, legislativas em França); apenas o menos votado em primeiro lugar (frequente para seriar candidatos a uma vaga de emprego); o mais votado em último lugar, etc.
- Quando se aceita a ordenação implícita num primeira (e única) votação o método é conhecido por *first-past-the-post* (eg, legislativas no RU).
- Nenhum destes métodos verifica a propriedade IAI e qualquer um deles se presta a comportamento estratégico da parte dos eleitores.



Run-off e Instant Run-off, exemplos

Exemplo 1:

1 eleitor :	A > B > C
2 eleitores:	A > C > B
2 eleitores:	C > B > A
2 eleitores:	B > C > A

Com *first-past-the-post*, A é o vencedor (com 3 votos, sem maioria absoluta). Condorcet e Borda têm solução $C > B > A$.

Com *second-past-the-post*, A é afastado de uma segunda volta pois A é também quem tem mais votos em último lugar. Então, C vence com 4 votos, pelo que $C > B > A$.

Exemplo 2:

100 eleitores:	A > B > C
200 eleitores:	A > C > B
199 eleitores:	C > B > A
201 eleitores:	B > C > A

Com *first-past-the-post*, A é o vencedor (com 300 votos como primeiro lugar, sem maioria absoluta). Condorcet e Borda têm solução $C > B > A$.

Com *second-past-the-post*, C é afastado de uma segunda volta pois C é quem tem menos votos em primeiro lugar. Então, B vence com 400 votos, pelo que $B > A > C$.



Teorema da Impossibilidade de Arrow (Nobel'72)

As seguintes propriedades são desejáveis num método de Seriação Social:

Universalidade: A nenhum eleitor é vedada alguma relação de preferência.

Unanimidade: Se, para todos os eleitores, $A \rightarrow B$ então $A \Rightarrow B$.

Independência das Alternativas Irrelevantes: A posição relativa de dois candidatos na seriação global permanece a mesma em perfis sociais na qual a sua posição relativa para todos os eleitores também for a mesma.

Ausência de ditador: Não existe um eleitor para o qual $A \rightarrow B$ implica $A \Rightarrow B$, independentemente das escolhas dos restantes eleitores.

Theorem

Não existe qualquer método de seriação de (pelo menos 3) candidatos que satisfaça simultaneamente as quatro propriedades acima.

Kenneth Arrow, *Social Choice and Individual Values*, Wiley, 1955. (tese de doutoramento)



Eleições Presidenciais Francesas de 2002

Resultados obtidos no final da primeira volta:

Table 2.9
French Presidential Election, First-Round Votes, April 21, 2002

J. Chirac	19.88%	J. Saint-Josse	4.23%
J.-M. Le Pen	16.86%	A. Madelin	3.91%
L. Jospin	16.18%	R. Hue	3.37%
F. Bayrou	6.84%	B. Mégret	2.34%
A. Laguiller	5.72%	C. Taubira	2.32%
J.-P. Chevènement	5.33%	C. Lepage	1.88%
N. Mamère	5.25%	C. Boutin	1.19%
O. Besancenot	4.25%	D. Gluckstein	0.47%

À segunda volta foram admitidos Chirac e Le Pen. Chirac venceu com 80% dos votos.



Majority Judgement (Balinski, Laraki'2010)

Before describing their approach, it is useful to quote the following remarks by the authors [15]: "What is amazing about the theory of social choice is that the basic model has not changed over seven centuries. Comparing candidates has steadfastly remained the paradigm of voting. And yet, both common sense and practice show that voters and judges do not formulate their opinions as rank orders. Rank orders are grossly insufficient expressions of opinion, because a candidate who is second (or in any other place) of an input may be held in high esteem by one voter but in very low esteem by another."

Os autores propõem uma mudança conceptual no ato de votar: em vez de se pedir aos eleitores que escolham (com X) ou que ordenem os candidatos (como se faz na Austrália), solicita-se que avaliem cada candidato segundo uma escala comum, como, por exemplo,

(O)utstanding, (E)xcellent, (V)ery good, (G)ood, (A)cceptable, (P)oor, to (R)ect.

O vencedor é então determinado pela **mediana** dessas avaliações (não pela média, nem pelo número de primeiros lugares) ou por uma sequência de medianas até que seja possível distinguir candidatos.

[15] *Majority Judgement: measuring, ranking and voting*, M. Balinski, R. Laraki, MIT Press, 2010



Majority Judgement, exemplo de boletim de voto

Bulletin de vote:
Élection du Président de la République 2007
Pour présider la France,
ayant pris tous les éléments en compte,
je juge en conscience que ce candidat serait:

	Très Bien	Bien	Assez Bien	Passable	Insuffisant	A Rejeter
Olivier Besancenot						
Marie-George Buffet						
Gérard Schivardi						
François Bayrou						
José Bové						
Dominique Voynet						
Philippe de Villiers						
Ségolène Royal						
Frédéric Nihous						
Jean-Marie Le Pen						
Arlette Laguiller						
Nicolas Sarkozy						

Cochez une seule mention dans la ligne de chaque candidat.
Ne pas cocher une mention dans la ligne d'un candidat revient à le Rejeter.

Figure 1.1
Ballot, Orsay experiment, 2007 French presidential election.



Majority Judgement, ilustração 1

	A	B	C		A	B	C		A	B	C
eleitor 1:	R	A	E		E	A	E		G	A	G
eleitor 2:	A	P	V		V	A	V		A	P	P
eleitor 3:	G	A	G		G	A	G		V	A	V
eleitor 4:	V	R	P		A	P	P		R	R	P
eleitor 5:	E	A	P		R	R	P		E	A	G

o primeiro quadro mostra os votos de cinco eleitores relativamente a três candidatos

a mediana de A é G , a mediana de B é A e a mediana de C é G . Portanto A, C são preferíveis a B (pois têm mediana mais elevada)

o processo culmina com o *ranking*: $A > C > B$ (ordem lexicográfica das colunas).



Majority Judgement, ilustração 2

um exemplo com 100 eleitores e três candidatos:

	43					40			
A	O	E	V		G	A	P	R	
	25					45			
B	O	E		V		G	A	P	R
	27					48			
C	O		E	V	G	A	P		R

majority grade

$A \rightarrow (43, G+, 40)$, $B \rightarrow (25, V-, 45)$, $C \rightarrow (27, V-, 48)$

com este exemplo o processo culmina com o *ranking*: $B > C > A$.



Majority Judgement, simulação a uma semana das presidenciais francesas de 2012 (1/2)

Table 8.1 Majority judgement percentages for the 2012 French Presidential election

	O	E	V	G	A	P	R
Hollande	12.48	16.15	16.42	11.67	14.79	14.25	14.24
Bayrou	2.58	9.77	21.71	25.23	20.08	11.94	8.69
Sarkozy	9.63	12.35	16.28	10.99	11.13	7.87	31.75
Mélenchon	5.43	9.50	12.89	14.65	17.10	15.06	25.37
Dupont-Aignan	0.54	2.58	5.97	11.26	20.22	25.51	33.92
Joly	0.81	2.99	6.51	11.80	14.66	24.70	38.53
Poutou	0.14	1.36	4.48	7.73	12.48	28.08	45.73
Le Pen	5.97	7.33	9.50	9.36	13.97	6.24	47.63
Arthaud	0.00	1.36	3.80	6.51	13.16	25.24	49.93
Cheminade	0.41	0.81	2.44	5.83	11.67	26.87	51.97



Majority Judgement, simulação a uma semana das presidenciais francesas de 2012 (2/2)

Table 8.2 Majority judgement (MJ), Single vote (SV) and Approval voting (AV) for the French Presidential election 2012

	MJ	SV	AV
1. Hollande	(45.05, G+, 43.28)	(1) 28.63	(1) 49.44
2. Bayrou	(34.06, G-, 40.71)	(5) 9.09	(3) 39.20
3. Sarkozy	(49.25, A+, 39.62)	(2) 27.27	(2) 40.47
4. Mélenchon	(42.47, A+, 40.43)	(4) 11.00	(4) 39.07
5. Dupont-Aignan	(40.57, P+, 33.92)	(7) 1.49	(8) 10.69
6. Joly	(36.77, P-, 38.53)	(6) 2.31	(6) 26.69
7. Poutou	(26.19, P-, 45.73)	(8) 1.22	(7) 13.28
8. Le Pen	(46.13, P-, 47.63)	(3) 17.91	(5) 27.43
9. Arthaud	(24.83, P-, 49.93)	(9) 0.68	(9) 8.35
10. Cheminade	(48.03, R+, —)	(10) 0.41	(10) 3.23

Os candidatos são apresentados pelo *ranking* do *Majority Voting*, a uma semana da primeira volta

A segunda coluna corresponde aos resultados obtidos na primeira volta

A terceira coluna corresponde aos resultados obtidos do *Approval Voting*, a uma semana da primeira volta

Hollande e Sarkozy foram à segunda volta, que Hollande venceu com 51.7% dos votos.



Referências

- *Mathematics to the Rescue of Democracy*, P. Serafini, Springer, 2020.
- *Majority Judgement: measuring, ranking and voting*, M. Balinski, R. Laraki, MIT Press, 2010.
- *Fair representation, Metting the Ideal of One Man, One Vote*, M. Balinski, H. Young, Brookings Institution Press, 2001.
- *Judge: don't vote!*, M. Balinski, R. Laraki, Operations Research 62 (3), 2014.
- *Matemática Aplicada às Ciências Sociais*, 10º, Maria Augusta Neves et al, Porto Editora, 2024.
- *What is Majority Judgment?*, <https://mieuxvoter.fr/en> acedido em 8 de março de 2026.

