

Uma perspectiva matemática sobre cooperar, ou competir, ou cooperar para competir

João Soares

Departamento de Matemática
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Universidade de Coimbra



Cooperar, competir, ...

- Competir ...

Cooperar, competir, ...

- Competir ...
- Cooperar ...

O Ardina

- O ardina vende jornais e revistas.



O Ardina

- ▶ O ardina vende jornais e revistas.



- ▶ Um só tipo de jornal (e.g. *Público*) e

$$\begin{aligned}(p)\text{reço} &= \text{€}0,75/\text{un} \\ (c)\text{usto} &= \text{€}0,25/\text{un} \\ (s)\text{aldo} &= \text{€}0,10/\text{un}\end{aligned}$$

O Ardina

- ▶ O ardina vende jornais e revistas.



- ▶ Um só tipo de jornal (e.g. *Público*) e

$$\begin{aligned}(p)\text{reço} &= \text{€}0,75/\text{un} \\ (c)\text{usto} &= \text{€}0,25/\text{un} \\ (s)\text{aldo} &= \text{€}0,10/\text{un}\end{aligned}$$

- ▶ *Quantos jornais encomendar hoje para vender amanhã?*

O Ardina - modelo matemático

- ▶ Se D for a procura e Q for a quantidade encomendada, então, o lucro será

O Ardina - modelo matemático

- ▶ Se D for a procura e Q for a quantidade encomendada, então, o lucro será

$$L(D, Q) = p \times \underbrace{\min(D, Q)}_{\text{vendidos}} + s \times \underbrace{(Q - \min(D, Q))}_{\text{sobrados}} - c \times \underbrace{Q}_{\text{encomendados}}$$

O Ardina - modelo matemático

- Se D for a procura e Q for a quantidade encomendada, então, o lucro será

$$\begin{aligned} L(D, Q) &= p \times \underbrace{\min(D, Q)}_{\text{vendidos}} + s \times \underbrace{(Q - \min(D, Q))}_{\text{sobrados}} - c \times \underbrace{Q}_{\text{encomendados}} \\ &= (p - s) \min(D, Q) - (c - s)Q \end{aligned}$$

O Ardina - modelo matemático

- Se D for a procura e Q for a quantidade encomendada, então, o lucro será

$$\begin{aligned} L(D, Q) &= p \times \underbrace{\min(D, Q)}_{\text{vendidos}} + s \times \underbrace{(Q - \min(D, Q))}_{\text{sobrados}} - c \times \underbrace{Q}_{\text{encomendados}} \\ &= (p - s) \min(D, Q) - (c - s)Q \end{aligned}$$

- e.g. $L(14, 20) = 0,65 \times 14 - 0,15 \times 20 = 6,10$.

O Ardina - modelo matemático

- Se D for a procura e Q for a quantidade encomendada, então, o lucro será

$$\begin{aligned} L(D, Q) &= p \times \underbrace{\min(D, Q)}_{\text{vendidos}} + s \times \underbrace{(Q - \min(D, Q))}_{\text{sobrados}} - c \times \underbrace{Q}_{\text{encomendados}} \\ &= (p - s) \min(D, Q) - (c - s)Q \end{aligned}$$

- e.g. $L(14, 20) = 0,65 \times 14 - 0,15 \times 20 = 6,10$.
- Mas, ... D é desconhecido hoje.

O Ardina - modelo matemático

- Se D for a procura e Q for a quantidade encomendada, então, o lucro será

$$\begin{aligned} L(D, Q) &= p \times \underbrace{\min(D, Q)}_{\text{vendidos}} + s \times \underbrace{(Q - \min(D, Q))}_{\text{sobrados}} - c \times \underbrace{Q}_{\text{encomendados}} \\ &= (p - s) \min(D, Q) - (c - s)Q \end{aligned}$$

- e.g. $L(14, 20) = 0,65 \times 14 - 0,15 \times 20 = 6,10$.
- Mas, ... D é desconhecido hoje.
- Quanto encomendar? Q ?

O Ardina - modelo matemático

- Se D for a procura e Q for a quantidade encomendada, então, o lucro será

$$L(D, Q) = p \times \underbrace{\min(D, Q)}_{\text{vendidos}} + s \times \underbrace{(Q - \min(D, Q))}_{\text{sobrados}} - c \times \underbrace{Q}_{\text{encomendados}}$$

$$= (p - s) \min(D, Q) - (c - s)Q$$

- e.g. $L(14, 20) = 0,65 \times 14 - 0,15 \times 20 = 6,10$.
- Mas, ... D é desconhecido hoje.
- Quanto encomendar? Q ?
- **Ideia:** Estimar $\bar{D}$, a procura média, e determinar Q que torne máximo o valor de $L(\bar{D}, Q)$.

O Ardina - modelo matemático

- Se D for a procura e Q for a quantidade encomendada, então, o lucro será

$$L(D, Q) = p \times \underbrace{\min(D, Q)}_{\text{vendidos}} + s \times \underbrace{(Q - \min(D, Q))}_{\text{sobrados}} - c \times \underbrace{Q}_{\text{encomendados}}$$

$$= (p - s) \min(D, Q) - (c - s)Q$$

- e.g. $L(14, 20) = 0,65 \times 14 - 0,15 \times 20 = 6,10$.
- Mas, ... D é desconhecido hoje.
- Quanto encomendar? Q ?
- **Ideia:** Estimar $\bar{D}$, a procura média, e determinar Q que torne máximo o valor de $L(\bar{D}, Q)$.
- **(melhor) Ideia:** Estimar D , a procura, e determinar Q que torne máximo o valor da média de $L(D, Q) \equiv \bar{L}(Q)$.

O Ardina - estimação da procura (D)

- Suponhamos que a procura nos últimos 52 dias foi

15	19	9	12	9	22	4	7	8	11
14	11	6	11	9	18	10	0	14	12
8	9	5	4	4	17	18	14	15	8
6	7	12	15	15	19	9	10	9	16
8	11	11	18	15	17	19	14	14	17
13	12								

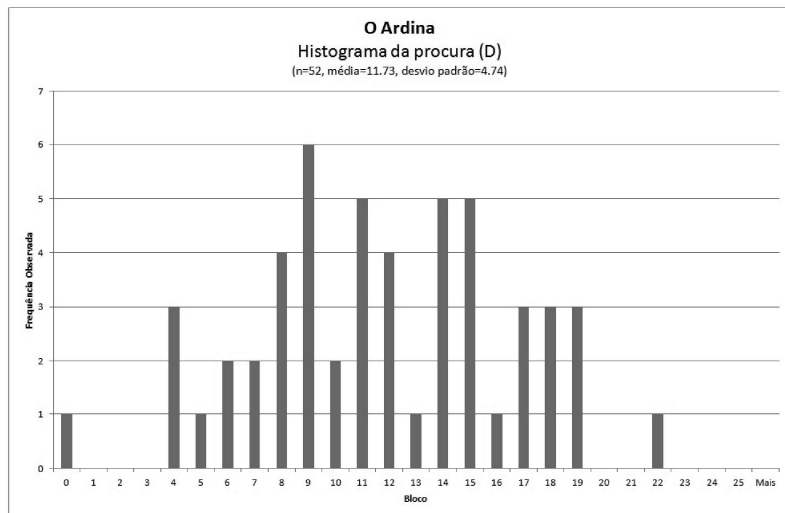
O Ardina - estimação da procura (D)

- Suponhamos que a procura nos últimos 52 dias foi

15	19	9	12	9	22	4	7	8	11
14	11	6	11	9	18	10	0	14	12
8	9	5	4	4	17	18	14	15	8
6	7	12	15	15	19	9	10	9	16
8	11	11	18	15	17	19	14	14	17
13	12								

... a que chamamos histórico.

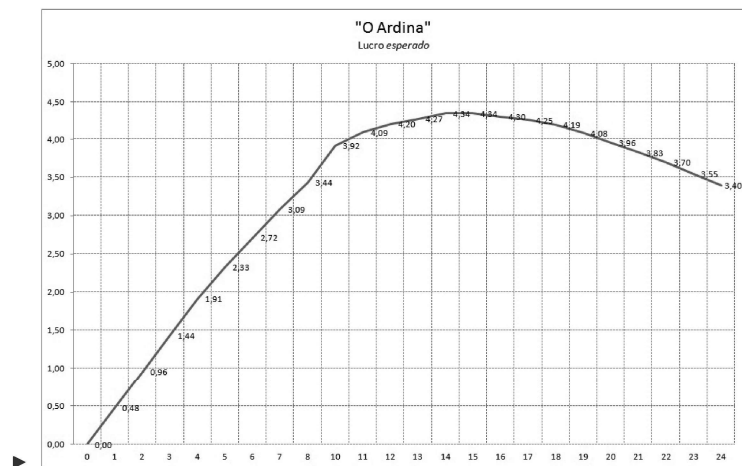
O Ardina - estimação da procura (D)



João Soares

Uma perspectiva matemática sobre cooperar, ou competir, ou coopera

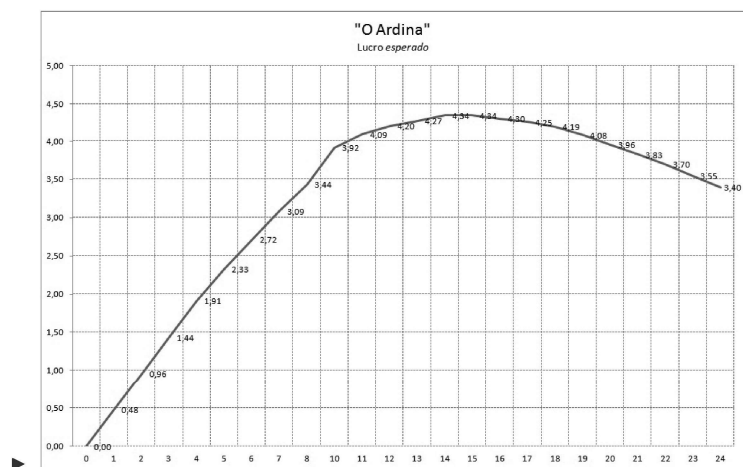
O Ardina - Lucro esperado para diferentes valores de Q



João Soares

Uma perspectiva matemática sobre cooperar, ou competir, ou coopera

O Ardina - Lucro esperado para diferentes valores de Q

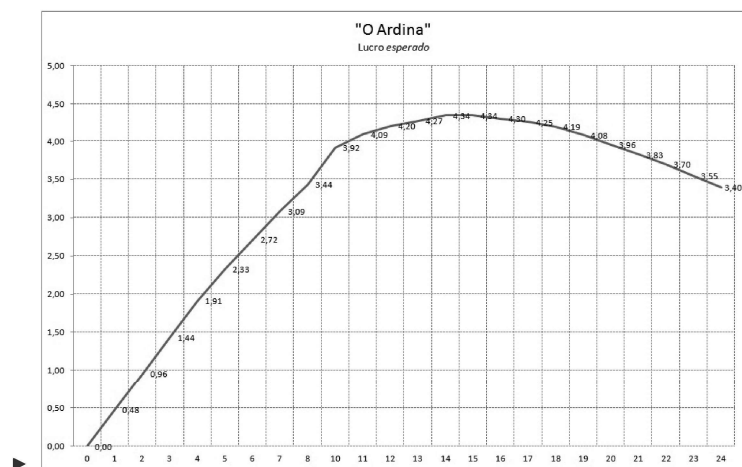


► Concluimos que o *melhor* Q é 14 ou 15.

João Soares

Uma perspectiva matemática sobre cooperar, ou competir, ou coopera

O Ardina - Lucro esperado para diferentes valores de Q

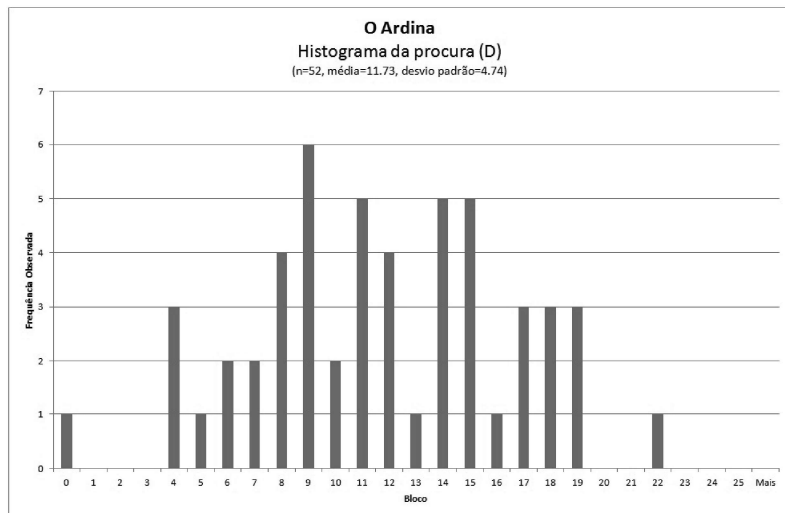


► Concluimos que o *melhor* Q é 14 ou 15. ... para aquele histórico!

João Soares

Uma perspectiva matemática sobre cooperar, ou competir, ou coopera

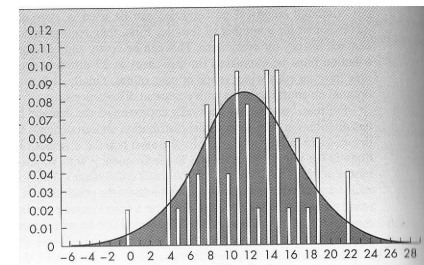
O Ardina - estimação da procura (D)



João Soares

Uma perspectiva matemática sobre cooperar, ou competir, ou coopera

O Ardina - estimação da procura D usando *distribuição normal*



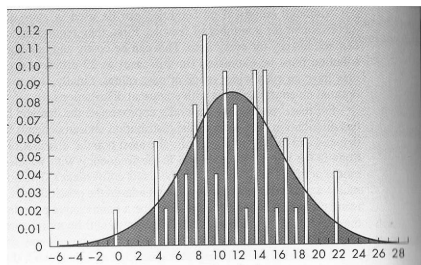
João Soares

Uma perspectiva matemática sobre cooperar, ou competir, ou coopera

O Ardina - estimação da procura D usando *distribuição normal*

Distribuição Normal:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right]$$



João Soares

Uma perspectiva matemática sobre cooperar, ou competir, ou coopera

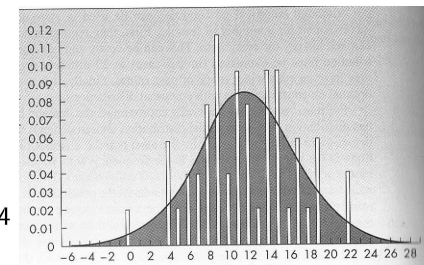
O Ardina - estimação da procura D usando *distribuição normal*

Distribuição Normal:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right]$$

μ é a média da procura $\approx 11,73$

σ é o desvio padrão da procura $\approx 4,74$



João Soares

Uma perspectiva matemática sobre cooperar, ou competir, ou coopera

O Ardina - estimação da procura D usando *distribuição normal*

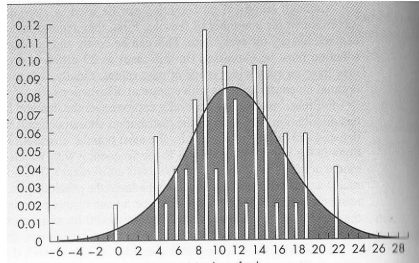
Distribuição Normal:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right]$$

μ é a média da procura $\approx 11,73$

σ é o desvio padrão da procura $\approx 4,74$

A área da região sob o gráfico é 1



O Ardina - estimação da procura D usando *distribuição normal*

Distribuição Normal:

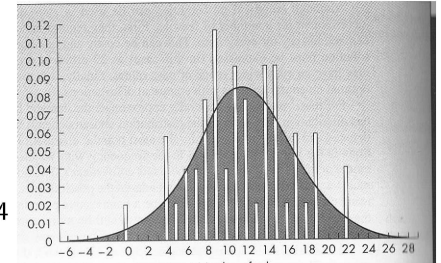
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right]$$

μ é a média da procura $\approx 11,73$

σ é o desvio padrão da procura $\approx 4,74$

A área da região sob o gráfico é 1

A área da porção dessa região limitada por duas retas verticais $x = a$ e $x = b$ é a probabilidade do valor da procura D estar entre a e b .



O Ardina - lucro médio (distribuição Normal)

O Lucro médio é

$$\bar{L}(Q) = \int_{-\infty}^{+\infty} [(p-s) \min(x, Q) - (c-s)Q] f(x) dx$$

O Ardina - lucro médio (distribuição Normal)

O Lucro médio é

$$\begin{aligned} \bar{L}(Q) &= \int_{-\infty}^{+\infty} [(p-s) \min(x, Q) - (c-s)Q] f(x) dx \\ &= (p-s) \int_{-\infty}^Q x f(x) dx + (p-s)Q \int_Q^{+\infty} f(x) dx - (c-s)Q \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \end{aligned}$$

O Ardina - lucro médio (distribuição Normal)

O Lucro médio é

$$\begin{aligned}\bar{L}(Q) &= \int_{-\infty}^{+\infty} [(p-s) \min(x, Q) - (c-s)Q] f(x) dx \\ &= (p-s) \int_{-\infty}^Q x f(x) dx + (p-s)Q \int_Q^{+\infty} f(x) dx - (c-s)Q \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx\end{aligned}$$

pelo que a sua derivada é

$$\bar{L}'(Q) = (p-s)Qf(Q) + (p-s) \left[\int_Q^{+\infty} f(x) dx - Qf(Q) \right] - (c-s)$$

O Ardina - lucro médio (distribuição Normal)

O Lucro médio é

$$\begin{aligned}\bar{L}(Q) &= \int_{-\infty}^{+\infty} [(p-s) \min(x, Q) - (c-s)Q] f(x) dx \\ &= (p-s) \int_{-\infty}^Q x f(x) dx + (p-s)Q \int_Q^{+\infty} f(x) dx - (c-s)Q \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx\end{aligned}$$

pelo que a sua derivada é

$$\begin{aligned}\bar{L}'(Q) &= (p-s)Qf(Q) + (p-s) \left[\int_Q^{+\infty} f(x) dx - Qf(Q) \right] - (c-s) \\ &= (p-c) - (p-s) \int_{-\infty}^Q f(x) dx.\end{aligned}$$

O Ardina - lucro médio (distribuição Normal)

O Lucro médio é

$$\begin{aligned}\bar{L}(Q) &= \int_{-\infty}^{+\infty} [(p-s) \min(x, Q) - (c-s)Q] f(x) dx \\ &= (p-s) \int_{-\infty}^Q x f(x) dx + (p-s)Q \int_Q^{+\infty} f(x) dx - (c-s)Q \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx\end{aligned}$$

pelo que a sua derivada é

$$\begin{aligned}\bar{L}'(Q) &= (p-s)Qf(Q) + (p-s) \left[\int_Q^{+\infty} f(x) dx - Qf(Q) \right] - (c-s) \\ &= (p-c) - (p-s) \int_{-\infty}^Q f(x) dx.\end{aligned}$$

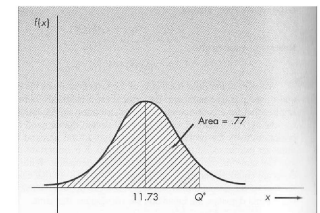
Posto isto, $\bar{L}'(Q) = 0$ se e só se

$$\underbrace{\int_{-\infty}^Q f(x) dx}_{\text{probabilidade de } D \leq Q} = \frac{p-c}{p-s}$$

O Ardina - solução (distribuição Normal)

Para $p = 0.75$, $c = 0.25$ e $s = 0.1$

$$\int_{-\infty}^{Q^*} f(x) dx = \frac{0.75 - 0.25}{0.75 - 0.1} (= 0.77) \iff Q^* = 15.24$$



Conclusões

Conclusões

- O modelo matemático que vimos *perscreve* uma solução para o problema.

Conclusões

- O modelo matemático que vimos *perscreve* uma solução para o problema.
- Os elementos aleatórios do problema são analisados estatisticamente (histórico) e uma *distribuição de probabilidade* é adotada - neste caso, a distribuição normal.

Conclusões

- O modelo matemático que vimos *perscreve* uma solução para o problema.
- Os elementos aleatórios do problema são analisados estatisticamente (histórico) e uma *distribuição de probabilidade* é adotada - neste caso, a distribuição normal.
- A média ponderada do lucro segundo a *distribuição de probabilidade* adotada é a função a otimizar.

Conclusões

- ▶ O modelo matemático que vimos *perscreve* uma solução para o problema.
- ▶ Os elementos aleatórios do problema são analisados estatisticamente (histórico) e uma *distribuição de probabilidade* é adotada - neste caso, a distribuição normal.
- ▶ A média ponderada do lucro segundo a *distribuição de probabilidade* adotada é a função a otimizar.
- ▶ Este modelo simples está na base de outros modelos mais complexos de gestão de inventários. (**Nota:** a solução deduzida pode ser obtida através de um fórmula em Excel NORMINV).

Conclusões

- ▶ O modelo matemático que vimos *perscreve* uma solução para o problema.
- ▶ Os elementos aleatórios do problema são analisados estatisticamente (histórico) e uma *distribuição de probabilidade* é adotada - neste caso, a distribuição normal.
- ▶ A média ponderada do lucro segundo a *distribuição de probabilidade* adotada é a função a otimizar.
- ▶ Este modelo simples está na base de outros modelos mais complexos de gestão de inventários. (**Nota:** a solução deduzida pode ser obtida através de um fórmula em Excel NORMINV).
- ▶ Complexidade advém da consideração de sazonalidade, acumulação de stocks para períodos subsequentes, correlação com outros produtos, etc.

Conclusões

- ▶ O modelo matemático que vimos *perscreve* uma solução para o problema.
- ▶ Os elementos aleatórios do problema são analisados estatisticamente (histórico) e uma *distribuição de probabilidade* é adotada - neste caso, a distribuição normal.
- ▶ A média ponderada do lucro segundo a *distribuição de probabilidade* adotada é a função a otimizar.
- ▶ Este modelo simples está na base de outros modelos mais complexos de gestão de inventários. (**Nota:** a solução deduzida pode ser obtida através de um fórmula em Excel NORMINV).
- ▶ Complexidade advém da consideração de sazonalidade, acumulação de stocks para períodos subsequentes, correlação com outros produtos, etc.
- ▶ **Nota:** a decisão é tomada independentemente da existência de competidores ou potenciais parceiros estratégicos.

Jogo de Coordenação

Payoffs dos dois jogadores

▶ Jogador I:

1	10	0
2	6	8

▶ Jogador II:

	1	2
1	10	6
2	0	8

Jogar 2×

Dilema de Prisioneiro

Payoffs dos dois jogadores

► Jogador I:

1	6	0
2	10	4

► Jogador II:

1	2
6	10
0	4

Jogar 2x

Jogo

Dilema do Prisioneiro - interpretação do jogo

Dois suspeitos, I e II, foram capturados sem haver provas suficientes para os condenar. Os suspeitos são interrogados em quartos separados.

- Se um dos prisioneiros testemunhar contra o outro e este se calar, o que confessou sai livre e o cúmplice silencioso é condenado por muito tempo.
- Se ambos testemunharem, cada um cumpre uma sentença média.
- Se ambos permanecerem em silêncio então, ambos terão de cumprir uma sentença leve.

I \ II	Calar	Culpar
Calar	6, 6	0, 10
Culpar	10, 0	4, 4

- O que deve cada um fazer?

Jogo

Dilema do Prisioneiro - vida real

Em geral, uma situação diz-se um *Dilema do Prisioneiro* quando a situação pode ser encarada como um jogo e há uma **estratégia dominante**. Contudo, se ambos usassem a **estratégia dominada** obteriam ambos maiores payoffs.
 Por exemplo:

Jogo

Dilema do Prisioneiro - vida real

Em geral, uma situação diz-se um *Dilema do Prisioneiro* quando a situação pode ser encarada como um jogo e há uma **estratégia dominante**. Contudo, se ambos usassem a **estratégia dominada** obteriam ambos maiores payoffs.
 Por exemplo:

- Preço da gasolina

Jogo

Dilema do Prisioneiro - vida real

Em geral, uma situação diz-se um *Dilema do Prisioneiro* quando a situação pode ser encarada como um jogo e há uma **estratégia dominante**. Contudo, se ambos usassem a **estratégia dominada** obteriam ambos maiores payoffs.

Por exemplo:

- ▶ Preço da gasolina
- ▶ Trabalho de grupo

Jogo

Dilema do Prisioneiro - vida real

Em geral, uma situação diz-se um *Dilema do Prisioneiro* quando a situação pode ser encarada como um jogo e há uma **estratégia dominante**. Contudo, se ambos usassem a **estratégia dominada** obteriam ambos maiores payoffs.

Por exemplo:

- ▶ Preço da gasolina
- ▶ Trabalho de grupo
- ▶ Pescas (Tragédia dos Comuns)

Jogo

Dilema do Prisioneiro - vida real

Em geral, uma situação diz-se um *Dilema do Prisioneiro* quando a situação pode ser encarada como um jogo e há uma **estratégia dominante**. Contudo, se ambos usassem a **estratégia dominada** obteriam ambos maiores payoffs.

Por exemplo:

- ▶ Preço da gasolina
- ▶ Trabalho de grupo
- ▶ Pescas (Tragédia dos Comuns)
- ▶ ...

Jogo

Equilíbrio de Nash

Num jogo entre dois jogadores, um par de estratégias diz-se um **Equilíbrio de Nash** se cada jogador joga a sua melhor estratégia face à estratégia do outro jogador.

Jogo

Equilíbrio de Nash - ilustração

- No jogo da Coordenação há dois Equilíbrios de Nash

$I \backslash II$	<i>Calar</i>	<i>Culpar</i>
<i>Calar</i>	10*, 10*	0, 6
<i>Culpar</i>	6, 0	8*, 8*

Jogo

Equilíbrio de Nash - ilustração

- No jogo da Coordenação há dois Equilíbrios de Nash

$I \backslash II$	<i>Calar</i>	<i>Culpar</i>
<i>Calar</i>	10*, 10*	0, 6
<i>Culpar</i>	6, 0	8*, 8*

(*Calar*, *Calar*)
 (*Culpar*, *Culpar*)

Jogo

Equilíbrio de Nash - ilustração

- No jogo da Coordenação há dois Equilíbrios de Nash

$I \backslash II$	<i>Calar</i>	<i>Culpar</i>
<i>Calar</i>	10*, 10*	0, 6
<i>Culpar</i>	6, 0	8*, 8*

(*Calar*, *Calar*)
 (*Culpar*, *Culpar*)

- No Dilema do Prisioneiro há apenas um Equilíbrio de Nash

$I \backslash II$	<i>Calar</i>	<i>Culpar</i>
<i>Calar</i>	6, 6	0, 10*
<i>Culpar</i>	10*, 0	4*, 4*

Jogo

Equilíbrio de Nash - ilustração

- No jogo da Coordenação há dois Equilíbrios de Nash

$I \backslash II$	<i>Calar</i>	<i>Culpar</i>
<i>Calar</i>	10*, 10*	0, 6
<i>Culpar</i>	6, 0	8*, 8*

(*Calar*, *Calar*)
 (*Culpar*, *Culpar*)

- No Dilema do Prisioneiro há apenas um Equilíbrio de Nash

$I \backslash II$	<i>Calar</i>	<i>Culpar</i>
<i>Calar</i>	6, 6	0, 10*
<i>Culpar</i>	10*, 0	4*, 4*

(*Culpar*, *Culpar*)

Cooperar, competir (discussão)
Competir - o problema do Ardina
Cooperar
Cooperar vs Competir - o Dilema do Prisioneiro Repetido

Equilíbrio de Nash
Conclusões

Jogo
Equilíbrio de Nash - primeiro exercício

JOGO:

<i>I \ II</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>
<i>1</i>	7, 7	0, 0	0, 10
<i>2</i>	0, 0	5, 5	0, 4
<i>2</i>	10, 0	4, 0	1, 1

João SoaresUma perspectiva matemática sobre cooperar, ou competir, ou coopera

Cooperar, competir (discussão)
Competir - o problema do Ardina
Cooperar
Cooperar vs Competir - o Dilema do Prisioneiro Repetido

Equilíbrio de Nash
Conclusões

Jogo
Equilíbrio de Nash - primeiro exercício

JOGO:

<i>I \ II</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>
<i>1</i>	7, 7	0, 0	0, 10
<i>2</i>	0, 0	5, 5	0, 4
<i>2</i>	10, 0	4, 0	1, 1

e determine todos os equilíbrios de Nash.

João SoaresUma perspectiva matemática sobre cooperar, ou competir, ou coopera

Cooperar, competir (discussão)
Competir - o problema do Ardina
Cooperar
Cooperar vs Competir - o Dilema do Prisioneiro Repetido

Equilíbrio de Nash
Conclusões

Jogo
Equilíbrio de Nash - primeiro exercício

JOGO:

<i>I \ II</i>	<i>Queen</i>	<i>Stones</i>
<i>Queen</i>	5, 3	0, 0
<i>Stones</i>	0, 0	3, 5

João SoaresUma perspectiva matemática sobre cooperar, ou competir, ou coopera

Cooperar, competir (discussão)
Competir - o problema do Ardina
Cooperar
Cooperar vs Competir - o Dilema do Prisioneiro Repetido

Equilíbrio de Nash
Conclusões

Jogo
Equilíbrio de Nash - primeiro exercício

JOGO:

<i>I \ II</i>	<i>Queen</i>	<i>Stones</i>
<i>Queen</i>	5, 3	0, 0
<i>Stones</i>	0, 0	3, 5

e determine todos os equilíbrios de Nash.

João SoaresUma perspectiva matemática sobre cooperar, ou competir, ou coopera

Golden Balls

Payoffs dos dois jogadores

Golden Balls

Payoffs dos dois jogadores

► Jogador I:

1	5	0
2	10	0

► Jogador II:

1	2
5	10
0	0

Conclusões

- Em jogos não cooperativos análogos ao Dilema do Prisioneiro de nada adianta a comunicação. A estratégia dominante é Culpar.

Conclusões

- Em jogos não cooperativos análogos ao Dilema do Prisioneiro de nada adianta a comunicação. A estratégia dominante é Culpar.
- Havendo comunicação, um equilíbrio de Nash poderá ser o desfecho natural de um jogo não cooperativo pois, face uma estratégia anunciada do outro jogador cada jogador joga a sua melhor estratégia. Não há incentivo para mudar.

Conclusões

- ▶ Em jogos não cooperativos análogos ao Dilema do Prisioneiro de nada adianta a comunicação. A estratégia dominante é Culpar.
- ▶ Havendo comunicação, um equilíbrio de Nash poderá ser o desfecho natural de um jogo não cooperativo pois, face uma estratégia anunciada do outro jogador cada jogador joga a sua melhor estratégia. Não há incentivo para mudar.
- ▶ Aqui, a matemática ajuda a perceber (a explicar) o modo como os jogadores atuam; ajuda também a sistematizar, simplifica a análise do problema (jogo).

Conclusões

- ▶ Em jogos não cooperativos análogos ao Dilema do Prisioneiro de nada adianta a comunicação. A estratégia dominante é Culpar.
- ▶ Havendo comunicação, um equilíbrio de Nash poderá ser o desfecho natural de um jogo não cooperativo pois, face uma estratégia anunciada do outro jogador cada jogador joga a sua melhor estratégia. Não há incentivo para mudar.
- ▶ Aqui, a matemática ajuda a perceber (a explicar) o modo como os jogadores atuam; ajuda também a sistematizar, simplifica a análise do problema (jogo).
- ▶ Se conseguirmos transformar o jogo Dilema do Prisioneiro num jogo de Coordenação, Culpar deixa de ser dominante . . .

Conclusões

- ▶ Em jogos não cooperativos análogos ao Dilema do Prisioneiro de nada adianta a comunicação. A estratégia dominante é Culpar.
- ▶ Havendo comunicação, um equilíbrio de Nash poderá ser o desfecho natural de um jogo não cooperativo pois, face uma estratégia anunciada do outro jogador cada jogador joga a sua melhor estratégia. Não há incentivo para mudar.
- ▶ Aqui, a matemática ajuda a perceber (a explicar) o modo como os jogadores atuam; ajuda também a sistematizar, simplifica a análise do problema (jogo).
- ▶ Se conseguirmos transformar o jogo Dilema do Prisioneiro num jogo de Coordenação, Culpar deixa de ser dominante . . .
- ▶ . . . através de legislação, persuasão moral. Outras?

Dilema do Prisioneiro Repetido

Considere o jogo definido pela seguinte sequência de passos:

Dilema do Prisioneiro Repetido

Considere o jogo definido pela seguinte sequência de passos:

- Jogar o Dilema do Prisioneiro

$I \backslash II$	<i>Calar</i>	<i>Culpar</i>
<i>Calar</i>	6, 6	0, 10
<i>Culpar</i>	10, 0	4, 4

Dilema do Prisioneiro Repetido

Considere o jogo definido pela seguinte sequência de passos:

- Jogar o Dilema do Prisioneiro

$I \backslash II$	<i>Calar</i>	<i>Culpar</i>
<i>Calar</i>	6, 6	0, 10
<i>Culpar</i>	10, 0	4, 4

- Lançar um dado. Se sair 6 parar, registrar a soma dos ganhos acumulados; se sair 1, 2, 3, 4 ou 5, repetir do início.

Dilema do Prisioneiro Repetido - estratégias

Prisoner's dilemma

Cada jogador possui uma infinidade de estratégias:

Dilema do Prisioneiro Repetido - estratégias

Prisoner's dilemma

Cada jogador possui uma infinidade de estratégias:

Dilema do Prisioneiro Repetido - estratégias

Prisoner's dilemma

Cada jogador possui uma infinidade de estratégias:

Calar sempre

Dilema do Prisioneiro Repetido - estratégias

Prisoner's dilemma

Cada jogador possui uma infinidade de estratégias:

Calar sempre

Culpar sempre

Estranha : Calar numa ronda ímpar; Culpar numa ronda par.

Dilema do Prisioneiro Repetido - estratégias

Prisoner's dilemma

Cada jogador possui uma infinidade de estratégias:

Calar sempre

Culpar sempre

Estranha : Calar numa ronda ímpar; Culpar numa ronda par.

Olho-por-olho : Cooperar na primeira ronda. Nas seguintes jogar o que o seu oponente jogou na ronda anterior.

Dilema do Prisioneiro Repetido - estratégias

Prisoner's dilemma

Cada jogador possui uma infinidade de estratégias:

Calar sempre

Culpar sempre

Estranha : Calar numa ronda ímpar; Culpar numa ronda par.

Olho-por-olho : Cooperar na primeira ronda. Nas seguintes jogar o que o seu oponente jogou na ronda anterior.

...

Dilema do Prisioneiro Repetido - ganho esperado

Prisoner's dilemma

Como os ganhos de cada jogador dependem de acontecimentos aleatórios, cada jogador pretenderá maximizar o seu **ganho esperado**.

Dilema do Prisioneiro Repetido - ganho esperado

Prisoner's dilemma

Como os ganhos de cada jogador dependem de acontecimentos aleatórios, cada jogador pretenderá maximizar o seu **ganho esperado**.

Se I usa estratégia A e II usa a estratégia B , o ganho esperado de I é

Dilema do Prisioneiro Repetido - ganho esperado

Prisoner's dilemma

Como os ganhos de cada jogador dependem de acontecimentos aleatórios, cada jogador pretenderá maximizar o seu **ganho esperado**.

Se I usa estratégia A e II usa a estratégia B , o ganho esperado de I é

$$G^I(A, B) = g_1^I(A, B) + g_2^I(A, B) \times \frac{5}{6} + g_3^I(A, B) \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 + g_4^I(A, B) \times \left(\frac{5}{6}\right)^3 + \dots$$

Dilema do Prisioneiro Repetido - ganho esperado

Prisoner's dilemma

Como os ganhos de cada jogador dependem de acontecimentos aleatórios, cada jogador pretenderá maximizar o seu **ganho esperado**.

Se I usa estratégia A e II usa a estratégia B , o ganho esperado de I é

$$G^I(A, B) = g_1^I(A, B) + g_2^I(A, B) \times \frac{5}{6} + g_3^I(A, B) \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 + g_4^I(A, B) \times \left(\frac{5}{6}\right)^3 + \dots$$

De forma análoga se define $G^{II}(A, B)$.

Dilema do Prisioneiro Repetido - concurso

Prisoner's dilemma

- ▶ Na década de 80, Robert Axelrod, cientista americano, organizou um concurso que consistia no jogo Dilema de Prisioneiro Repetido.

Dilema do Prisioneiro Repetido - concurso

Prisoner's dilemma

- ▶ Na década de 80, Robert Axelrod, cientista americano, organizou um concurso que consistia no jogo Dilema de Prisioneiro Repetido.
- ▶ Cientistas de todo o mundo puderam submeter estratégias (programas de computador) que eram então confrontadas duas a duas.

Dilema do Prisioneiro Repetido - concurso

Prisoner's dilemma

- ▶ Na década de 80, Robert Axelrod, cientista americano, organizou um concurso que consistia no jogo Dilema de Prisioneiro Repetido.
- ▶ Cientistas de todo o mundo puderam submeter estratégias (programas de computador) que eram então confrontadas duas a duas.
- ▶ De entre as 40 propostas, a proposta vencedora foi proposta por Anatol Rapoport, matemático russo, com a estratégia ... **Olho-por-olho!**

Dilema do Prisioneiro Repetido - concurso

Prisoner's dilemma

- ▶ Na década de 80, Robert Axelrod, cientista americano, organizou um concurso que consistia no jogo Dilema de Prisioneiro Repetido.
- ▶ Cientistas de todo o mundo puderam submeter estratégias (programas de computador) que eram então confrontadas duas a duas.
- ▶ De entre as 40 propostas, a proposta vencedora foi proposta por Anatol Rapoport, matemático russo, com a estratégia ... **Olho-por-olho!**
- ▶ Novo concurso foi organizado com o objetivo de bater Olho-por-olho e, para surpresa dos 63 participantes, Olho-por-olho foi novamente vencedor.

Dilema do Prisioneiro Repetido - Olho-por-olho

Prisoner's dilemma

Teorema

O par de estratégias (Olho-por-olho, Olho-por-olho) é um Equilíbrio de Nash para o Dilema do Prisioneiro Repetido.

Conclusões

- ▶ Este teorema mostra que a eventualidade do jogo Dilema de Prisioneiro se repetir faz com que os jogadores se tornem mais cooperativos porque o ganho efetivo será maior.

Conclusões

- ▶ Este teorema mostra que a eventualidade do jogo Dilema de Prisioneiro se repetir faz com que os jogadores se tornem mais cooperativos porque o ganho efetivo será maior.
- ▶ Assim, se um estudante gazeta num trabalho de grupo, ele sabe que podem vir a fazer com ele o mesmo no futuro.

Conclusões

- ▶ Este teorema mostra que a eventualidade do jogo Dilema de Prisioneiro se repetir faz com que os jogadores se tornem mais cooperativos porque o ganho efetivo será maior.
- ▶ Assim, se um estudante gazeta num trabalho de grupo, ele sabe que podem vir a fazer com ele o mesmo no futuro.
- ▶ Os postos de gasolina que tentarem obter maiores lucros baixando os preços, sabem que podem sofrer retaliações dos outros postos no futuro.

Conclusões

- ▶ Este teorema mostra que a eventualidade do jogo Dilema de Prisioneiro se repetir faz com que os jogadores se tornem mais cooperativos porque o ganho efetivo será maior.
- ▶ Assim, se um estudante gazeta num trabalho de grupo, ele sabe que podem vir a fazer com ele o mesmo no futuro.
- ▶ Os postos de gasolina que tentarem obter maiores lucros baixando os preços, sabem que podem sofrer retaliações dos outros postos no futuro.
- ▶ Numa situação retratada pelo Dilema do Prisioneiro, a possibilidade de ela ocorrer várias vezes faz com que os jogadores assumam atitudes mais cooperativas e punam atitudes não cooperativas

Conclusões

- ▶ Este teorema mostra que a eventualidade do jogo Dilema de Prisioneiro se repetir faz com que os jogadores se tornem mais cooperativos porque o ganho efetivo será maior.
- ▶ Assim, se um estudante gazeta num trabalho de grupo, ele sabe que podem vir a fazer com ele o mesmo no futuro.
- ▶ Os postos de gasolina que tentarem obter maiores lucros baixando os preços, sabem que podem sofrer retaliações dos outros postos no futuro.
- ▶ Numa situação retratada pelo Dilema do Prisioneiro, a possibilidade de ela ocorrer várias vezes faz com que os jogadores assumam atitudes mais cooperativas e punam atitudes não cooperativas
- ▶ Neste tipo de situação, podemos explicar ao oponente que cooperação é a melhor opção e ameaçar jogar Olho-por-olho caso o oponente decline.

Referências

- ▶ R. Gilman e D. Housman, *Models of Conflict and Cooperation*, American Mathematical Society, 2009.
- ▶ [▶ Link](#) programa que simula o concurso de Axelrod.