

Procuramos uma relação binária transitiva, completa e não reflexiva no conjunto dos candidatos denominada *relação de preferência social* que em face do conjunto de todas as relações de preferência individuais de um conjunto de eleitores (um *perfil social*), satisfaça os seguintes axiomas (ou propriedades):

Axioma 1, o *axioma da universalidade*: cada eleitor pode definir de forma arbitrária uma relação binária transitiva, completa e não reflexiva, denominada *relação de preferência individual*, que traduza as suas preferências individuais em termos de candidatos.

Axioma 2, o *axioma da otimalidade de Pareto*: se, para um dado perfil coletivo, o candidato A é sempre preferido ao candidato B então, também na relação de preferência social, o candidato A deve ser preferido ao candidato B .

Axioma 3, o *axioma da independência das alternativas irrelevantes*: se, em dois perfis sociais distintos, a posição relativa dos candidatos A, B na relação de preferência individual de cada eleitor for a mesma então, também na relação de preferência social a posição relativa dos dois candidatos é a mesma nesses dois perfis.

Axioma 4, o *axioma da ausência de ditador*: não existe um eleitor que, para todo o par (A, B) de candidatos, se na sua relação de preferência individual A vem antes de B então, independentemente dos restantes eleitores, na relação de preferência social A vem antes de B .

21 eleitores definiram as suas relações de preferência individual do seguinte modo:

1 : $A > B > C$
7 : $A > C > B$
7 : $B > C > A$
6 : $C > B > A$

- Através de *first-past-the-post*, a ordenação dos candidatos é a seguinte: $A > B > C$ (A com oito votos, B com sete e C com seis).
- Através de *second-past-the-post*, a ordenação dos candidatos é a seguinte: $B > A > C$ (na primeira volta, C é eliminado. Na segunda volta, as relações de preferência individual são: $A > B$, oito, e $B > A$, treze).
- Através de Condorcet, a ordenação dos candidatos é a seguinte: $C > B > A$ pois: A vs B é ganho por B (8 vs 13); A vs C é ganho por C (8 vs 13); B vs C é ganho por C (8 vs 13).

- Através de Borda (3 pontos para o primeiro, 2 pontos para o segundo, 1 ponto para o terceiro), a ordenação dos candidatos é a seguinte: $C > B > A$ (A tem 37 pontos, B tem 42 e C tem 47).

Teorema 1.17: (Teorema da Impossibilidade de Arrow)

Não existe uma relação de preferência social que satisfaça os quatro axiomas acima.

Prova: Começamos por provar que, se X denota um perfil de eleitores que colocam sempre um dado candidato B em primeiro ou em último lugar, então a escolha social também coloca o candidato B em primeiro ou em último lugar.

Por absurdo, suponhamos que existem candidatos A, C tais que na relação de preferência social para o perfil X , A vem antes de B e B vem antes de C - afirmação que denotamos por $A >_X B >_X C$. Consideremos um perfil Y que resulta de X do seguinte modo. Sempre que, para algum eleitor i , na relação de preferência individual de i , A aparece antes de C - afirmação que denotamos por $A >_i C$ - então trocamos C com A , de modo que no perfil Y , $C >_i A$, para todo i . Pelo axioma da otimalidade de Pareto, $C >_Y A$. Mas, como a posição relativa dos candidatos A, B em cada uma das relações de preferência individual de ambos os perfis X, Y é a mesma então, pelo axioma da independência das alternativas irrelevantes, $A >_Y B$. Do mesmo modo, como a posição relativa dos candidatos B, C em cada uma das relações de preferência individual de ambos os perfis X, Y é a mesma então, pelo axioma da independência das alternativas irrelevantes, $B >_Y C$. Finalmente, como a relação de preferência social é transitiva então $A >_Y C$, chegamos a uma contradição.

Seja X um perfil social, qualquer, onde todo o eleitor coloca B no final da sua relação de preferência individual. Pelo axioma da otimalidade de Pareto, B também está no final da relação de preferência social do perfil X . Então, um a um, consecutivamente, altera-se a relação de preferência individual de cada eleitor movendo B do final para o topo até encontrar um eleitor $i(B)$ que provoque uma mudança na posição de B na correspondente relação de preferência social. A existência de $i(B)$ decorre do axioma da otimalidade de Pareto (se B estiver no topo da relação de preferência individual de todo o eleitor então B também deve estar no topo da relação de preferência social).

Agora, denote-se por Y (resp., Z) o perfil social imediatamente antes (resp., depois) da mudança na relação de preferência individual de $i(B)$. Para cada um dos eleitores no perfil Z , o candidato B está sempre no final ou no topo da sua relação de preferência individual. Por isso, pelo que foi provado num parágrafo anterior, a escolha social também coloca B em primeiro ou em último lugar. Não estando em último, por definição de $i(B)$, então B está no topo da relação de preferência social (do perfil Z).

Sejam A, C dois candidatos distintos tais que $i \equiv i(B)$ prefere A a C . Seja W um perfil no qual,

na relação de preferência individual de i , A é recolocado antes de B e os restantes eleitores definem a sua relação de preferência individual de forma arbitrária exceto no facto de que B permanece no topo ou no final da respetiva relação de preferência individual tal como em Y .

Como $A >_Y B$, pois B está no final da relação de preferência social do perfil Y , e a posição relativa dos candidatos A, B em cada uma das relações de preferência individual de ambos os perfis Y, W é a mesma então, pelo axioma da independência das alternativas irrelevantes, $A >_W B$.

Por outro lado, como $B >_Z C$, pois B está no topo da respetiva relação de preferência social, e a posição relativa dos candidatos B, C em cada uma das relações de preferência individual de ambos os perfis Z, W é a mesma então, pelo axioma da independência das alternativas irrelevantes, $B >_W C$. Em conclusão, $A >_W B >_W C$ de modo que, pela transitividade da relação de preferência social, $A >_W C$.

Portanto, pelo axioma da independência das alternativas irrelevantes, para todos os candidatos A, C , distintos de B , para todo o perfil S , $A >_i C$ implica $A >_S C$, *i.e.*, $i \equiv i(B)$ é um ditador relativamente a qualquer par de candidatos distintos de B .

Finalmente, seja A um candidato qualquer, e seja C um candidato distinto de ambos A, B . Pelos parágrafos anteriores, existe um eleitor $j \equiv i(C)$ tal que, para todo o perfil S , $B >_j A$ implica $B >_S A$, ou $A >_j B$ implica $A >_S B$.

Suponhamos, por absurdo, que $i \neq j$. Se na definição de Y num parágrafo anterior j tivesse sido considerado antes de i então a mudança de B do final para o topo da relação de preferência individual de j faria com que a posição de B na relação de preferência social mudasse. E isso implicaria que $i = j$, uma contradição. Portanto, na na definição de Y , quando i foi escolhido, j ainda não tinha sido considerado, pelo que, no perfil Y , $A >_j B$. No entanto, para $S \equiv Z$, tal como vimos antes, $B >_Z A$ e, no entanto, $A >_j B$ neste perfil Z , uma nova contradição. Concluimos que $i = j$.

Em conclusão, para todos os candidatos A, B , para todo o perfil S , $A >_i B$ implica $A >_S B$, *i.e.*, $i \equiv i(B)$ é um ditador relativamente a qualquer par de candidatos. ■