

Fibonacci NIM

João Luís Soares

Estágio Delfos Júnior
Coimbra, 10 de Maio de 2025

Números de Fibonacci, motivação

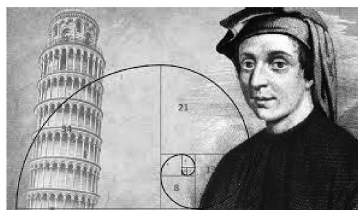


Figure: Leonardo Fibonacci, 1170-1250

Um fazendeiro cria coelhos. Cada coelho origina um outro coelho aos 2 meses de idade e, a partir daí, um coelho a cada mês. Coelhos nunca morrem e ignoramos os coelhos machos. Se começar com um coelho recém-nascido, quantos coelhos terá o fazendeiro no mês n ? F_n ?

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad F_{n+2} = F_n + F_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	$\dots$
1,	1,	2,	3,	5,	8,	13,	21,	34,	55,	89,	144,	233,	377,	$\dots$

a sucessão de Fibonacci ($F_0 = 0$).

Índice

- 1 Números de Fibonacci
- 2 Jogos Combinatórios
- 3 Fibonacci NIM

Números de Fibonacci, mais motivação

Uma escada tem n degraus. Pode-se subir um ou dois degraus de cada vez. De quantas maneiras diferentes se pode subir até ao topo?

R: F_{n+1}

Quantos subconjuntos de $\{1, 2, \dots, n\}$ que não contêm dois números inteiros consecutivos existem?

R: F_{n+2}

Números de Fibonacci, igualdades, propriedades

Através de indução matemática pode mostrar-se que:

$$F_1 + F_2 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1, \quad F_{n+2} > 2F_n$$

Através de indução matemática pode mostrar-se que:

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

... mas também usando valores próprios e outros processos (construtivos).

Números de Fibonacci, igualdades, propriedades

Teorema de (Edouard) Zeckendorf, 1901-1983: Para todo o inteiro positivo N existe um único conjunto I , de inteiros positivos e onde não existem dois consecutivos, tal que

$$N = \sum_{i \in I} F_i. \quad (1)$$

Prova: usa a propriedade se $I \subseteq \{2, 3, \dots, n\}$, de inteiros não consecutivos, então

$$\sum_{i \in I} F_i < F_{n+1}$$

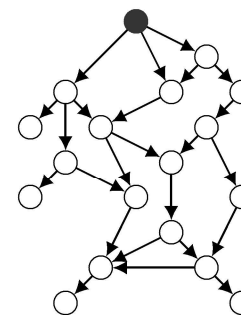
Exercício: obter a decomposição de Zeckendorf para os primeiros 20 inteiros positivos

Definição de jogo combinatório

- Dois jogadores, A e B , revezam-se na realização de jogadas, a partir de uma posição inicial.
- Uma jogada transporta o jogo de uma posição para outra posição (se as jogadas permitidas não dependem do jogador ser A ou B , o jogo diz-se **Imparcial**. Caso contrário, diz-se **Partizan**)
- Nenhuma posição de jogo poderá aparecer repetida.
- O jogo terminará após uma sequência finita de jogadas.
- O jogador que não conseguir realizar uma jogada é considerado o *perdedor* (e o outro o *vencedor*) - **Regra Normal** - ou o *vencedor* (e o outro o *perdedor*) - **Regra Misère**.

Nota: Não há dispositivos aleatórios, como dados, roletas ou distribuição de cartas, envolvidos (ou seja, não há movimentos aleatórios). Cada jogador está ciente de todos os movimentos e posições anteriores o tempo todo, ou seja, é um jogo de *informação perfeita*.

Exemplo - um jogo combinatório num digrafo



(jogada).

A posição seguinte é a indicada pelo arco escolhido.

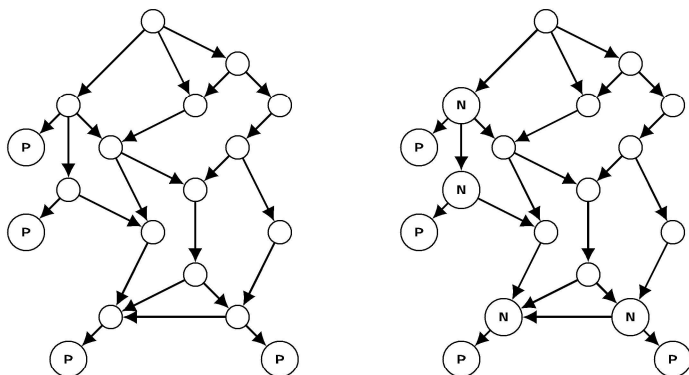
O primeiro que não puder efetuar uma jogada, perde (regra *normal*) ou ganha (regra *misère*).

Pode o primeiro a jogar assegurar a vitória? O segundo?

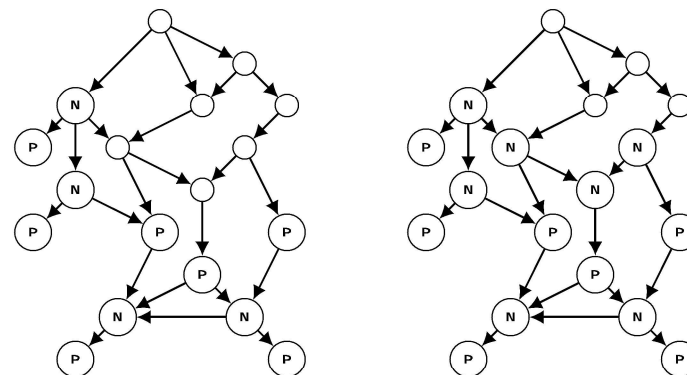
A partir de uma posição inicial associada a um vértice, dois jogadores alternam na escolha de um arco saindo desse vértice

Para quem consegue assegurar a vitória, qual é a estratégia ótima de jogo?

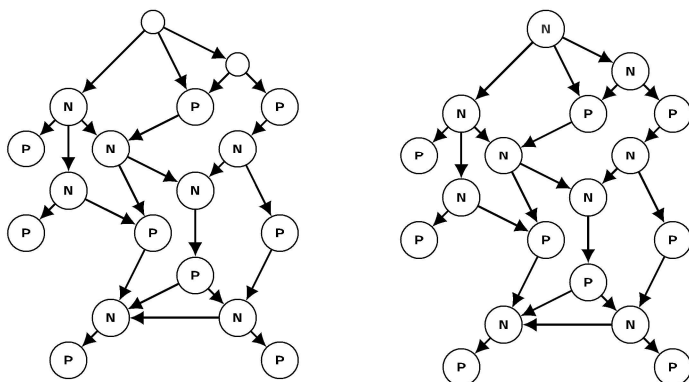
Posições-P e posições-N (1/3)



Posições-P e posições-N (2/3)



Posições-P e posições-N (3/3)



Posições-P e posições-N

Em suma, em qualquer jogo combinatório:

- Todo o conjunto de posições pode ser particionado em posições-*P* e posições-*N* (se o jogo é *partizan* a partição pode ser distinta para os dois jogadores).
- Uma posição-*P* é vencedora para o jogador que alcançou essa posição. O jogador que a observa no momento de jogar não o conseguirá impedir se o outro jogador jogar adequadamente.
- O jogador que observa uma posição-*N* no momento de jogar tem a possibilidade de ganhar o jogo independentemente de como o outro jogador jogar daí para a frente.
- A partir de uma posição-*N*, qualquer jogada que conduza o jogo a uma posição-*P* dir-se-á uma *jogada ótima*.

Em geral, analisar um jogo combinatório significa caracterizar as posições-*P* e as posições-*N* e descobrir *estratégias ótimas* de jogo.

Ou, mostrar que o jogo é equivalente a um outro jogo com análise conhecida.

Fibonacci NIM (Whinihan, 1963)

- Involves a pile of coins where upon players alternate taking a number of coins off the pile, each player may take no more than double what the previous player took.
- The first player may not take the whole pile.
- The player to take the last coin wins. Play it in <https://www.math.ucla.edu/~tom/Games/fibonim.html>
- A position in the Fibonacci Nim can be represented by a pair (l, r) , where l is the largest number of coins that can be taken (the *limit*) and r is the number of coins in the pile (the *remainder*).
- If we start with $n \geq 2$ coins, then the initial position can be represented as $(n - 1, n)$.

Exercise: Play the game several times for $n = 7, 8$.

Fibonacci NIM (optimal play - 2/3)

(...) *The player who sees a comfortable position (l, r) can always move to an uncomfortable position.*

In fact, if $\{F_i, i \in I\}$ is the Zeckendorf representation of r , with $F_k \leq l$ being the smallest element, then

$$r = \sum_{i \in I} F_i. \quad (2)$$

so that if he takes F_k coins, he takes the game to the position $(2F_k, r - F_k)$, which is uncomfortable because

$$r - F_k = \sum_{i \in I \setminus \{k\}} F_i, \quad (3)$$

i.e., $\{F_i, i \in I \setminus \{k\}\}$ is the Zeckendorf representation of $r - F_k$. The smallest Fibonacci number in (3), is larger than $2F_k$.
(...)

Fibonacci NIM (optimal play - 1/3)

The identification of the $-N$ and $-P$ positions makes use of the so called *Zeckendorf representation* of a positive integer.

(Whinihan, 1963): A position (l, r) , with $r \geq 1$, is $-N$ if and only if the smallest Fibonacci number in the Zeckendorf representation of r is at most l .

Prova:

The terminal positions of the Fibonacci NIM are of the form $(\cdot, 0)$. These are P -positions. Assume $r \geq 1$ so that, from there on, the position (l, r) is not terminal.

If $l \geq r$ then (l, r) is, clearly, an N -position because the next player can take all the remaining coins, thus, winning the game.

Let us call those positions (l, r) for which the smallest Fibonacci number F_k in the Zeckendorf representation of r is at most l as *comfortable*, i.e., $F_k \leq l$. The others are called *uncomfortable*.

(...)

Fibonacci NIM (optimal play - 3/3)

(...) *the player who sees an uncomfortable position (l, r) can only move to a comfortable position.*

In fact, assume $\{F_i, i \in I\}$ is the Zeckendorf representation of r , with $F_k > l$ being the smallest element. Suppose, by contradiction, that, for some $x \in \{1, 2, \dots, l\}$, the position $(2x, r - x)$ is still uncomfortable.

Thus, if $\{F_i, i \in I_1\}$ is the Zeckendorf representation of $r - x$, with F_p being the smallest element, and $\{F_i, i \in I_0\}$ is the Zeckendorf representation of x then, since $(2x, r - x)$ is uncomfortable, $F_p > 2x \geq 2$.

In particular, $p \geq 3$ and $F_p > F_i$, for every $i \in I_0$. Now, if $p - 1 \in I_0$ then

$$F_{p-1} + F_{p-2} \equiv F_p > 2x \geq 2F_{p-1} \equiv F_{p-1} + F_{p-1} > F_{p-1} + F_{p-2},$$

a contradiction. Therefore, from the uniqueness of the Zeckendorf representation of r , $I = I_0 \cup I_1$ and $k = \min\{i : i \in I_0\}$, implying that $l \geq x \geq F_k$, another contradiction. $\square$

Fibonacci NIM (conclusion)

So, from a position (l, r) such that $F_k \leq l$ is the smallest Fibonacci number in the Zeckendorf representation of r , the optimal play is to remove F_k chips from the pile.

Then, your opponent is faced with the position $(2F_k, r - F_k)$, which is $-P$. Whatever move he makes, he will be forced to return to you an N -position, and this repeats until you are in a position where you can take all the coins.

Exercise: No Fibonacci Nim, qual é a jogada ótima para o primeiro jogador quando a pilha começa com $n = 43$ fichas? Para que valores de n é o segundo jogador que consegue assegurar a vitória?

Prova do Teorema de Zackendorf (1/3):

Lema: $F_{n+2} > 2F_n$, para todo $n \geq 2$.

Prova: Quando $n = 2$ ou 3 temos $F_4 = 3 > 2(1) = 2F_2$ e $F_5 = 5 > 2(2) = 2F_3$. Por hipótese de indução forte, suponhamos que, para algum $n \geq 3$,

$$F_{k+2} > 2F_k, \quad \text{para todo } k = 2, 3, \dots, n.$$

Em particular, $F_{n+2} > 2F_n$ e $F_{n+1} > 2F_{n-1}$. Então, usando a hipótese de indução,

$$F_{(n+1)+2} = F_{n+2} + F_{n+1} > 2F_n + 2F_{n-1} = 2(F_{n-1} + F_n) \equiv 2F_{n+1}.$$

Referências

- *Using the Fibonacci numbers to represent whole numbers*, R Knott, University of Surrey, <https://r-knott.surrey.ac.uk/Fibonacci/fibrep.html#section4.2> (página-web consultada em 09/05/2025)
- *Discrete Mathematics: Elementary and Beyond*, L. Lovasz, J. Pelikan e K. Vesztergombi, Capítulo 4, Springer, 2003.
- *Fibonacci NIM*, Whinihan, Michael J. Fibonacci Quarterly, 1 (4): 9–13, 1963.
- *Représentation des nombres naturels par une somme de nombres de Fibonacci ou de nombres de Lucas*, E. Zeckendorf, Bull. Soc. Roy. Sci. Liège, 41:179–182, 1972.
- *Teoria dos Jogos [Apontamentos de Aula]*, João Soares, 2025.

Prova do Teorema de Zackendorf (2/3):

Lema: Se em $I \subseteq \{2, \dots, n\}$ não existem dois inteiros consecutivos então

$$\sum_{i \in I} F_i < F_{n+1}. \quad (4)$$

Prova: Se $n = 2$ ou 3 , o resultado é simples de observar. Por hipótese de indução forte, suponhamos que, para algum $n \geq 3$, tem-se que, para todo $k = 2, 3, \dots, n$, sempre que I for um subconjunto de inteiros não consecutivos em $\{2, \dots, k\}$ tem-se

$$\sum_{i \in I} F_i < F_{k+1},$$

Seja $I \subseteq \{2, \dots, n, n+1\}$ um conjunto onde não existem dois inteiros consecutivos. Se $n+1 \notin I$ então $I \subseteq \{2, \dots, n\}$. Então, pela hipótese de indução,

$$\sum_{i \in I} F_i < F_{n+1} < F_{n+2} \equiv F_{(n+1)+1}.$$

Se $n+1 \in I$ então $n \notin I$ e $I \setminus \{n+1\}$ é um subconjunto de $\{2, \dots, n-1\}$ onde não existem dois inteiros consecutivos. Então, usando a hipótese de indução,

$$\sum_{i \in I} F_i = \sum_{i \in I \setminus \{n+1\}} F_i \mid F_{n+1} < F_n \mid F_{n+1} = F_{n+2} = F_{(n+1)+1}.$$

Prova do Teorema de Zackendorf (3/3):

(*existência*) Seja N o menor inteiro positivo para o qual não existe qualquer conjunto $\{F_i, i \in I\}$ de números de Fibonacci não consecutivos que verifique (1). Como, então, N não é um número de Fibonacci, existe um inteiro positivo n tal que $F_n < N < F_{n+1}$. Como $1 \leq N - F_n < N$ então, pela definição de N , existe um conjunto $\{F_i, i \in I\}$ de números de Fibonacci não consecutivos que verifica

$$\sum_{i \in I} F_i = N - F_n.$$

Como $N - F_n < N < F_{n+1}$ então I é um subconjunto de $\{2, 3, \dots, n\}$ de inteiros não consecutivos. Se $n - 1 \in I$ então teríamos $F_{n-1} \leq N - F_n$, pelo que $(F_{n+1} \equiv) F_{n-1} + F_n \leq N$, uma contradição. Mas, então, $I \cup \{n\}$ é um subconjunto de $\{2, 3, \dots, n\}$ de inteiros não consecutivos que verifica

$$\sum_{i \in I \cup \{n\}} F_i = N,$$

uma contradição para a definição de N . (*unicidade*) Seja N o menor inteiro positivo para o qual existem pelo menos dois conjuntos distintos $\{F_i, i \in I\}$ e $\{F_i, i \in J\}$ de números de Fibonacci não consecutivos tais que

$$\sum_{i \in I} F_i = N = \sum_{i \in J} F_i$$

e seja k o maior elemento em $I \cup J$. Se $k \in I \cap J$ então N não estaria bem definido (pois $N - F_k$ também serviria no lugar de N e $N - F_k < N$). Assim, sem perda de generalidade, $k \in I \setminus J$. Como $J \subseteq \{2, 3, \dots, k - 1\}$ é um conjunto onde não existem dois inteiros consecutivos então, usando o resultado de um lema anterior,

$$F_k \leq \sum_{i \in I} F_i = N = \sum_{i \in J} F_i < F_k,$$

uma contradição.