

Uma aplicação do Lema de Sperner à Partilha de Renda

João Soares

Escola Secundária de Santa Comba Dão
Santa Comba Dão, 23 de Abril de 2025



Partilha de uma renda mensal de habitação

Ana, Becas e Cocas pretendem partilhar os 500 euros da renda mensal de um apartamento com três quartos. Quanto cabe a cada uma, de modo a que a partilha da renda seja satisfatória para todas (livre de invejas)?

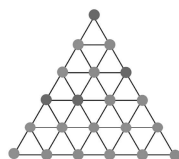
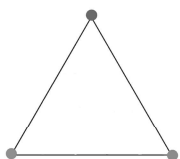


A solução deverá indicar também como distribuir os três quartos pelas três amigas.



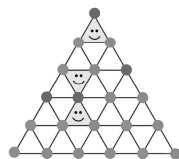
Lema de Sperner

Começamos com um triângulo. A cada vértice é atribuída uma cor distinta.



Depois, triangulamos e definimos uma triangulação *válida* dos vértices usando aquelas três cores: os vértices "exteriores" num mesmo lado têm todos uma de duas das cores de acordo com as três possibilidades.

Lema de Sperner (1928): Pelo menos um dos triângulos "interiores" (na figura há 36) tem os seus vértices coloridos com três cores distintas.

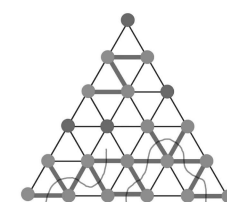
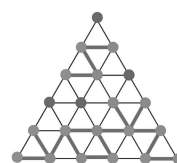


Lema de Sperner (prova abreviada - Cohen'67)

Façamos de conta que o triângulo "exterior" é uma casa e os triângulos "interiores" são quartos.

Existe uma porta em cada segmento cujas extremidades estejam coloridas de azul e verde, respetivamente.

Todas as portas "exteriores" estão num dos lados do triângulo exterior.



Precisamos provar que há pelo menos um quarto com uma única porta!

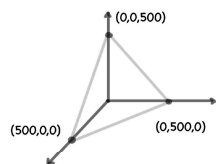
Ora, qualquer percurso pelos quartos que se inicie no exterior está unicamente determinado e termina num quarto "interior" ou numa porta "exterior" distinta.

Mas, há um número ímpar de portas "exteriores"! Portanto, um dos percursos tem de terminar num quarto com uma única porta.

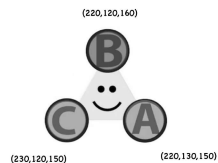
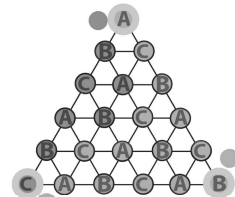
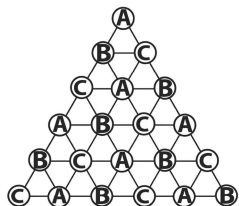
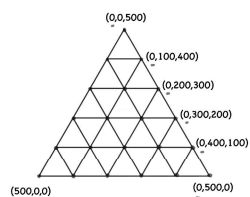
c.q.d.



Aplicação: Divisão Justa



(x, y, z)



Solução aproximada! Repetir com uma triangulação mais fina, se necessário.

Francis Su, *Rental Harmony: Sperner's Lemma vs Fair Division*, Amer. Math. Monthly, 106 (1999), 930-942

