

Teoria dos Jogos em socorro da Democracia

João Luís Soares - Universidade de Coimbra

Exploratório - Tardes de Matemática – Conversas Ímpares
Coimbra, 13 de Setembro de 2025



Motivação 2/2 - Índice de Poder de Shapley-Shubik

Assembleia da República Portuguesa

2024	1/2	2/3	2025	1/2	2/3
80	0,33	0,5	91	0,33	0,5917
78	0,33	0,5	58	0,33	0,1381
50	0,33	0	60	0,33	0,1583
8	0	0	9	0	0,0381
5	0	0	1	0	0,0048
4	0	0	3	0	0,0214
4	0	0	6	0	0,0381
1	0	0	1	0	0,0048
0	0	0	1	0	0,0048
	>115	>153		>115	>153



Motivação 1/2 - Partilha de uma renda mensal de habitação

Ana, Becas e Cocas pretendem partilhar os 500 euros da renda mensal de um apartamento com três quartos. Em que quarto e quanto deverá pagar cada uma, de modo a que a partição da renda seja satisfatória para todas (livre de invejas)?



Francis Su, *Rental Harmony: Sperner's Lemma vs Fair Division*, Amer. Math. Monthly, 106 (1999), 930-942



Índice

- 1 **Seriação Social** (*Social Choice*) - estabelecer um ranking num conjunto candidatos. Eg:
A escolha do Presidente da República;
Candidatos a um emprego;
Vencedor do prémio de Fórmula 1 ou do Campeonato Nacional de Futebol.
- 2 **Representação Proporcional** (*Apportionment*) - identificar os elementos de uma comissão representativa de toda uma população de indivíduos. Eg:
Deputados num parlamento nacional, ou europeu;
Elementos de uma Comissão Administrativa numa grande empresa.
- 3 **Definição de Círculos Eleitorais** (*Political (Re)Districting*) - agrupar unidades básicas geográficas em círculos (distritos) eleitorais, Eg:
Agrupar freguesias em círculos eleitorais;
Agrupar concelhos em regiões administrativas.



Seriação de um conjunto de candidatos

Problema: Um conjunto de candidatos é apresentado a um conjunto (eventualmente vasto) de eleitores. Assume-se que cada eleitor consegue explicitar uma relação de preferência entre os candidatos.

Eg, um eleitor que prefira o candidato D sobre todos os demais; prefira os candidatos A, B sobre os candidatos C, E, e seja indiferente relativamente aos candidatos A e B, e também C e E, pode ter a sua preferência esquematizada como

$$D \rightarrow A \sim B \rightarrow C \sim E$$

Que significará $D \rightarrow A \sim B \sim C \sim E$?

Que seriação dos candidatos representa melhor as preferências de todos os eleitores?

E por que ordem?



Seriação de um conjunto de candidatos (Propostas)

1 Por sucessiva eliminação de candidatos:

- começando pelo mais votado - *first-past-the-post* - ou
- começando pelo menos votado - *instant run-off*

a implementação pode consistir em sucessivas eleições (sucessivamente com menos um candidato) ou, de modo equivalente, cada eleitor estabelece uma única vez uma relação de preferência para cada candidato.

2 Condorcet (1785) ($\equiv$ Lull'sec XIII), comparar candidatos dois a dois quanto ao número de eleitores que prefere um sobre o outro. Borda (1770) atribuir pontos às posições dos candidatos nas diversas preferências dos eleitores $\equiv$ Fórmula 1)

Os primeiros prestam-se a comportamento estratégico da parte dos eleitores.

Os segundos são sensíveis ao facto de que se houver uma desistência (a seriação final pode ficar muito diferente da original). Podem existir ciclos de Condorcet! Há melhor?



Teorema da Impossibilidade de Arrow (Nobel da Economia'72)

Não existe qualquer método de seriação de (pelo menos 3) candidatos que satisfaça simultaneamente as seguintes quatro propriedades:

Universalidade: Todo o eleitor é livre de escolher o perfil de preferência que entender.

Unanimidade: Se $A \rightarrow B$, para todos os eleitores, então $A \Rightarrow B$.

Independência das Alternativas Irrelevantes: Se nos restringirmos a apenas a alguns dos candidatos então a seriação destes respeita a ordem na seriação global.

Ausência de ditador: Não existe um eleitor para o qual $A \rightarrow B$ implica $A \Rightarrow B$, independentemente das escolhas dos restantes eleitores.

Kenneth Arrow, *Social Choice and Individual Values*, Wiley, 1955. (tese de doutoramento)

John Geanakoplos, *Three brief proofs of Arrow's Impossibility Theorem*, Economic Theory, vol. 26 n. 1, 2005



Escolha Social: *Majority Judgement* (Balinski, Laraki'2010)

Election of the President of the United States of America 2008

To be the President of the United States of America, having taken into account all relevant considerations, I judge, in conscience, that this candidate would be:

	Excel- lent	Very Good	Good	Accept- able	Poor	To Reject	No Opinion
Michael R. Bloomberg, Ind.							
Hillary R. Clinton, Dem.							
John R. Edwards, Dem.							
Michael D. Huckabee, Rep.							
John S. McCain, Rep.							
Barack H. Obama, Dem.							
Colin L. Powell, Ind.							
W. Mitt Romney, Rep.							

You must check one single grade or *No Opinion* in the line of each candidate.
No Opinion is counted as *To Reject*.

Majority Judgement: measuring, ranking and voting, M. Balinski, R. Laraki, MIT Press, 2010.



Table 2.9
French Presidential Election, First-Round Votes, April 21, 2002

J. Chirac	19.88%	J. Saint-Josse	4.23%
J.-M. Le Pen	16.86%	A. Madelin	3.91%
L. Jospin	16.18%	R. Hue	3.37%
F. Bayrou	6.84%	B. Mégret	2.34%
A. Laguiller	5.72%	C. Taubira	2.32%
J.-P. Chevènement	5.33%	C. Lepage	1.88%
N. Mamère	5.25%	C. Boutin	1.19%
O. Besancenot	4.25%	D. Gluckstein	0.47%

Na segunda volta: Chirac obteve 80% e Le Pen, 20%



Table 2.10
French Presidential Election, First-Round Votes, April 22, 2007

N. Sarkozy	31.18%	M.-G. Buffet	1.93%
S. Royal	25.87%	D. Voynet	1.57%
F. Bayrou	18.57%	A. Laguiller	1.33%
J.-M. Le Pen	10.44%	J. Bové	1.32%
O. Besancenot	4.08%	F. Nihous	1.15%
P. de Villiers	2.23%	G. Schivardi	0.34%

Na segunda volta, Sarkozy obteve 53% e Royal, 47%.



Representação Proporcional (*Apportionement*)

- Em sistemas uninominais, o conjunto global de eleitores é particionado em círculos eleitorais (eg, agrupamentos de reguesias). Cada círculo elege um deputado seguindo um método de seriação, como os que vimos.
- Em sistemas plurinominais, o conjunto global de eleitores está particionado de acordo com a divisão administrativa. Cada unidade administrativa elege um conjunto de deputados. Os deputados são, então, afetados aos partidos por métodos que asseguram proporcionalidade do número de votantes relativamente ao número total de eleitores (na mesma unidade)
- Neste caso, a identificação do número de deputados de cada unidade administrativa é também feita métodos que asseguram proporcionalidade (da população na unidade relativamente à população global).
- Se V é o número de eleitores (ou pessoas) e M é o número de lugares (assentos, deputados, representantes). Então,

$\frac{V}{M}$ é o número médio de eleitores representados por um deputado

- Excel: V/M em diversos países da união europeia.

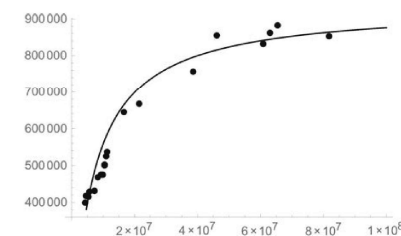


Representação Proporcional em sistemas plurinominais

- Se v_i é o número de eleitores no partido i então o **problema** é o descobrir o número $m_i \in \mathbb{N}_0$ de lugares afetos ao partido i tal que

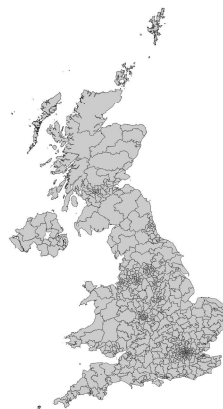
$$m_1 + m_2 + \dots + m_n = M, \quad m_i \approx q_i \equiv \left(\frac{v_i}{V}\right) M, \text{ para todo } i.$$

- Solução:** métodos de arredondamento (Hamilton) e métodos dos divisores (Adams, D'Hondt=Jefferson, Dean, Huntigton-Hill, Webster=Sainte-Laguë). Todos são soluções legítimas porque o problema não está bem definido.
- Excel: Coimbra, Parlamento Europeu.



Sistema eleitoral britânico (Ing+Esc+Gal+IrN)

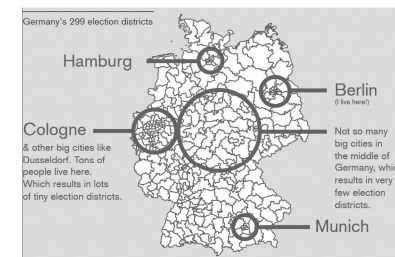
- Monarquia constitucional e parlamentar. Os 650 lugares da Câmara baixa do Parlamento são eleitos de cinco em cinco anos.
- No dia da eleição, cada eleitor escolhe um candidato de entre vários numa lista específica do seu distrito eleitoral. Existem 650 distritos eleitorais (cada um com 80 mil eleitores, aprox).
- Em cada distrito, o candidato mais votado ocupará um lugar na Câmara baixa do Parlamento.
- O partido (ou coligação) com maioria no Parlamento (> 325) tem o direito de constituir governo.



Sistema eleitoral alemão

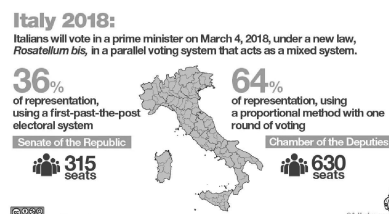
- República Parlamentar e Federal, com 16 estados. Os 630 lugares da Câmara baixa (Bundestag) do Parlamento são eleitos de quatro em quatro anos.
- No dia da eleição, cada eleitor escolhe no seu distritos eleitoral um candidato e um partido. A escolha do candidato é independente da escolha do partido. Existem 299 distritos eleitorais (cada um com 280 mil eleitores, aprox).
- Os 630 lugares são distribuídos pelos partidos proporcionalmente ao total nacional de votos, excluindo < 5% e < 3 vitórias (nos 299 distritos).
- A totalidade dos lugares atribuídos a cada partido é repartida pelos 16 estados (proporcionalmente aos votos obtidos por esse partido em cada estado).
- A afetação de pessoas aos lugares decorre de acordo com uma lista do partido, com prioridade para os candidatos que venceram distritos.

- Candidatos independentes vitoriosos no seu distrito são eleitos automaticamente. Pode eventualmente ser necessário uma ajustamento no número total de deputados para respeitar proporcionalidade.
- O partido (ou coligação) com maioria no Parlamento tem o direito de constituir governo.



Sistema eleitoral italiano

- República Parlamentar. Os 400 (eram 630) lugares da Câmara baixa (Camera di Diputadi) do Parlamento são eleitos de cinco em cinco anos.
- No dia da eleição, cada eleitor escolhe um candidato de entre vários numa lista específica do seu distrito eleitoral e um partido.
- Existem 147 distritos eleitorais (cada um com 350 mil eleitores, aprox). Em cada distrito, o candidato mais votado ocupará um lugar no Parlamento.
- Os restantes 253 lugares são distribuídos pelos partidos proporcionalmente ao total nacional de votos, excluindo < 3%. (oito dos quais, relativos aos italianos no estrangeiro, são eleitos em separado)
- A distribuição da proporção é especialmente complexa quanto ao tratamento dado às coligações.
- O partido (ou coligação) com maioria no Parlamento tem o direito de constituir governo.



Sistema eleitoral português

- República Parlamentar. Os 230 lugares do Parlamento são eleitos de quatro em quatro anos.
- No dia da eleição, cada eleitor escolhe um partido.
- Existem 22 distritos eleitorais (cada um com 47 mil eleitores, aprox). A cada distrito está afeto um número de lugares proporcional à sua população (ao maior, 48; ao menor, 2).

- Em cada distrito, os lugares são distribuídos pelos partidos proporcionalmente ao número de votos.
- O partido (ou coligação) com maioria no Parlamento tem o direito de constituir governo.



Excel: Distribuição de deputados no país (um único círculo), em coimbra, em lisboa, em portalegre.

O *Political Districting* é um problema de partição do território, i.e., agrupar células de unidades territoriais (eg, freguesias) numa quantidade pré-definida de círculos eleitorais (uninominais), de modo a satisfazer os seguintes critérios;

- **Integridade:** nenhuma freguesia é repartida entre dois círculos eleitorais
- **Contiguidade:** duas freguesias dentro dum mesmo círculo devem ser conectáveis dentro desse círculo.
- **Equilíbrio demográfico:** o número de habitantes num mesmo círculo deve ser aproximadamente o número médio da população total por círculo.
- **Fronteiras administrativas:** As freguesias num mesmo círculo devem pertencer ao mesmo distrito administrativo.
- **Fronteiras naturais:** os círculos devem respeitar barreiras naturais, rios, mar, etc
- **Outras fronteiras:** não separar grupos étnicos artificialmente.

No caso de Portugal, consiste em identificar 230 grupos de freguesias.



Referências

- *Mathematics to the Rescue of Democracy*, P. Serafini, Springer, 2020.
- *Majority Judgement: measuring, ranking and voting*, M. Balinski, R. Laraki, MIT Press, 2010.
- *Judge: don't vote!*, M. Balinski, R. Laraki, Operations Research 62 (3), 2014.
- *Matemática Aplicada às Ciências Sociais*, 10ª, Maria Augusta Neves et al, Porto Editora, 2024.



Considere um território com nove freguesias. Há três lugares para distribuir. Considerem-se três partições distintas para a seguinte distribuição de votos: o partido A obteve 23 votos e o partido B, 26,

A :	<table><tr><td>1</td><td>5</td><td>1</td></tr><tr><td>3</td><td>5</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>5</td><td>1</td></tr></table>	1	5	1	3	5	1	1	5	1	<table><tr><td>7</td></tr><tr><td>9</td></tr><tr><td>7</td></tr></table>	7	9	7	<table><tr><td>5</td><td>15</td><td>3</td></tr></table>	5	15	3	<table><tr><td>9</td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td>3</td></tr><tr><td></td><td>11</td><td></td></tr></table>	9					3		11	
	1	5	1																									
	3	5	1																									
1	5	1																										
7																												
9																												
7																												
5	15	3																										
9																												
		3																										
	11																											
B :	<table><tr><td>3</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td><td>5</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td><td>3</td></tr></table>	3	2	3	2	3	5	3	2	3	<table><tr><td>8</td></tr><tr><td>10</td></tr><tr><td>8</td></tr></table>	8	10	8	<table><tr><td>8</td><td>7</td><td>11</td></tr></table>	8	7	11	<table><tr><td>7</td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td>11</td></tr><tr><td></td><td>8</td><td></td></tr></table>	7					11		8	
	3	2	3																									
	2	3	5																									
3	2	3																										
8																												
10																												
8																												
8	7	11																										
7																												
		11																										
	8																											
	$0 \rightarrow A,$ $3 \rightarrow B$	$1 \rightarrow A,$ $2 \rightarrow B$	$2 \rightarrow A,$ $1 \rightarrow B$																									

