Departamento de Matemática | 2º semestre 2000/2001
Universidade de Coimbra | Folha Prática 5

Matemática Computacional

Interpolação polinomial unidimensional

1. Considere os seguintes pontos de $\mathbb{R}^2$, $(-3,1)$, $(-2,2)$, $(1,-1)$ e $(3,10)$. Determine o polinómio de Lagrange $P(x)$ que passa por esses pontos e calcule $P(0)$.

2. Seja $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ um conjunto de $n+1$ números reais. Mostre que $\sum_{i=0}^{n} l_i(x) = 1$, onde, para cada $i = 0, 1, \ldots, n$,
$$l_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}.$$

3. Seja $P(x)$ um polinómio de grau n e $w(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$, onde x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, são $n+1$ pontos distintos. Mostre que o coeficiente do termo de maior grau de $P(x)$ é dado por
$$a_0 = \sum_{i=0}^{n} \frac{P(x_i)}{w'(x_i)}.$$

4. Considere a função $f(x) = \cos x, x \in [0, \pi]$. Determine o número de pontos a considerar no intervalo dado para que o erro máximo da aproximação de $f(x)$ por um polinómio interpolador nesses pontos seja inferior a 0.5.

5. A seguinte tabela lista a população, em milhares de pessoas, de 1930 a 1980 num país fictício:

Ano	1930	1940	1950	1960	1970	1980
População	123.203	131.669	150.697	179.323	203.212	226.505

   Utilize o polinómio de Lagrange para estimar a população no ano 1965.

6. Seja $f(x)$ conhecido num conjunto discreto de pontos cujos valores são apresentados na tabela seguinte

x_i	-2	0	2	4	6
$f(x_i)$	1	2	-1	2	3

   Determine uma aproximação para o valor de $f(-1.5)$ usando:

   (a) o polinómio interpolador de Newton das diferenças divididas;

   (b) o polinómio interpolador de Newton das diferenças progressivas.

7. Determine uma aproximação de $\cos \frac{\pi}{8}$ usando o polinómio interpolador segmentado de grau 2 em 5 pontos no intervalo $[0, \pi]$ e indique um estimativa para o erro cometido.

8. Determine polinómios interpoladores segmentados de grau 1 e 2 para a função $f(x) = x^3$ no intervalo [-1, 1].

9. Uma empresa apresenta os seguintes lucros em função das vendas:

Nº peças vendidas (milhares)	1	2	3	4	5
Lucro (milhares de Euros)	11.2	15.3	17.1	16.9	15.0

Sabendo que o lucro previsto era de 13 mil Euros, indique uma aproximação do número de peças que foi necessário vender para atingir esse lucro.

10. De uma função contínua $f(x)$ conhecem-se os valores apresentados na tabela seguinte:

x_i	-2	0	1
$f(x_i)$	-12.5	1.5	-1

Obtenha um valor aproximado para a raiz de f.

11. Mostre que o polinómio $P_3(x)$ que toma os valores $P_3(0) = f_0$, $P_3(1) = f_1$, $P_3'(0) = f_0'$ e $P_3'(1) = f_1'$, é dado por

$$P_3(x) = (1-x)^2(1+2x)f_0 + x(1-x)^2 f_0' + x^2(3-2x)f_1 + x^2(x-1)f_1'\,.$$

12. Determine o polinómio interpolador de Hermite de grau mínimo para a função $f(x) = \cos x, x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ e calcule um valor aproximado para $\cos\frac{\pi}{4}$ e para $\sin\frac{\pi}{8}$.

13. Considere os seguintes valores tabelados relativos a uma função $f(x)$:

x_i	0	1	2	3	4	5
$f(x_i)$	1	2.5	25	104.5	289	638.5

(a) Construa o polinómio interpolador de maior grau de $f(x)$ no intervalo $[0\,,5]$.

(b) Sabendo que $f'(0) = 0$ e $f'(1) = 3$, construa o polinómio interpolador de Hermite de grau 3 usando os dados da tabela que necessite.

(c) Recorrendo aos três primeiros valores da tabela, obtenha o valor de x^* tal que $f(x^*) = 10$.

14. Construa o polinómio interpolador de uma função $f(x)$ para o suporte $f(0) = -1$, $f'(0) = -2$, $f(1) = 0$, $f'(1) = 10$, $f''(1) = 40$.

15. *em Exame 19/6/2000:*

A função $y(x) = \tan x$ é uma função contínua no intervalo $[0.3, 0.4]$ no qual são conhecidos os seguintes valores tabelados:

x_i	$y(x_i)$
0.3	0.309
0.4	0.423
0.5	0.546

Use interpolação inversa para calcular um valor x tal que $\tan x = 0.4$ e estabeleça um majorante para o erro cometido.

16. *em Exame 10/7/2000:*

A resolução numérica da equação diferencial com condições iniciais:

$$\begin{gathered} y'' = f(x, y, y'), \quad x \in [-1, 1] \\ y'(-1) = 1, \quad y(-1) = 1 \end{gathered}$$

conduziu à construção dos seguintes valores tabelados para $y(x)$ e $y'(x)$:

x_i	$y(x_i)$	$y'(x_i)$
-1	1	1
0	2	0
1	3	1

(a) Determine o polinómio interpolador de Hermite $P(x)$ de menor grau para os valores tabelados. Apresente o resultado na forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

(b) Verifique que $P(x_i) = y(x_i)$ e $P'(x_i) = y'(x_i)$, para $i = 1, 2, 3$.