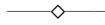


Matemática Computacional

Exercícios de Álgebra Linear e Cálculo Vectorial



1. Seja $x \in \mathbb{R}^n$. Recorde que

$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j|, \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|, \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}.$$

Mostre que

$$\|x\|_1 \geq \|x\|_2 \geq \|x\|_\infty, \quad \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2, \quad \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty,$$

e conclua que as normas l_1, l_2 e l_∞ são equivalentes.

2. Seja $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Recorde que

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \|a_{.j}\|_1, \quad \|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \|a_i\|_1, \quad \|A\|_2 = \sqrt{\text{maior valor próprio de } A^T A},$$

onde $a_{.j}$ designa a j -ésima coluna de A e a_i designa a i -ésima linha de A . Mostre que $\|A\| = \|A^T\|$ para a norma l_2 mas não para as normas l_1 e l_∞ .

3. Uma matriz $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ diz-se ortogonal se a sua inversa existe e é igual à transposta de Q . Mostre que

- (a) Todos os valores próprios de Q têm módulo um.
- (b) Seja $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Mostre que $\|QA\|_2 = \|A\|_2$ e $\|Q\|_2 = 1$.

4. Seja A uma matriz $n \times n$ simétrica. O teorema espectral assegura a existência de uma matriz ortogonal Q e uma matriz diagonal D tal que $A = QDQ^T$. Mostre que A é soma de n matrizes de característica um,

$$A = \sum_{i=1}^n d_{ii} q_i q_i^T,$$

onde q_i é a i -ésima coluna de Q .

5. Seja $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ uma matriz de característica completa.

- (a) Mostre que as matrizes $A^T A$ e AA^T são simétricas e Positiva Semi-Definidas.
- (b) Sendo $m < n$, mostre que AA^T é Positiva Definida mas $A^T A$ não.
- (c) Sendo $m > n$, mostre que AA^T não é Positiva Definida mas $A^T A$ é.
- (d) Sendo $m = n$, mostre que AA^T e $A^T A$ são ambas Positivas Definidas.

6. Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simétrica com valores próprios reais no intervalo fechado $[m, M]$.

- (a) Mostre que $m x^T x \leq x^T A x \leq M x^T x$, para todo o $x \in \mathbb{R}^n$.
- (b) Mostre que $\|A\|_2 = \max\{|\lambda_i| : \lambda_i \text{ é valor próprio de } A\} \leq \max\{|m|, |M|\}$ (**Sugestão:** Use o facto de que os valores próprios de A^2 são os valores próprios de A ao quadrado).

(c) Sabendo que A é Positiva Definida, conclua que $\|A\|_2 \leq M$.

7. Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simétrica. Mostre que se todos os valores próprios de A forem superiores a μ então a matriz $A - \mu I$ é Positiva Definida.

8. Para cada uma das matrizes A abaixo, determine uma matriz diagonal E tal que $A + E$ é Positiva Definida :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

9. Averigue quais as matrizes A abaixo são Positivas Semi-Definidas :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

10. Mostre que o conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ é convexo, onde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $b \in \mathbb{R}^m$.

11. Usando o exercício anterior, mostre que o conjunto dos pontos $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ tal que

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &\leq 5 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 &\geq 1 \end{aligned}$$

é um conjunto convexo.

12. Calcule a matriz Jacobiana da função vectorial $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$F(x) = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^3 - x_3^4 \\ x_1 x_2 x_3 \\ 2x_1 x_2 - 3x_2 x_3 + x_1 x_3 \end{bmatrix}.$$

13. Seja $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x_1^3 x_2^4 + x_2/x_1$. Determine o vector gradiente $\nabla f(x)$ e a matriz Hessiana $\nabla^2 f(x)$.

14. Mostre que se $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ for duas vezes continuamente diferenciável num conjunto $D \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto e convexo então para todo $x, x + p \in D$ tem-se

$$f(x + p) = f(x) + \nabla f(x)^T p + \frac{1}{2} p^T \nabla^2 f(z) p,$$

para algum z no interior do segmento que une x e $x + p$.

15. Considere a função $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{2} x^T A x + b^T x + c$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad c = 1.$$

(a) Escreva f por extenso (isto é, desenvolva os produtos matriciais).

(b) Mostre que o vector gradiente $\nabla f(x) = Ax + b$ e a matriz Hessiana $\nabla^2 f(x) = A$.

16. Considere a função $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$F(x) = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 1 \\ 5x_1^2 - x_2^2 - 2 \end{bmatrix}$$

e a função $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{2}F(x)^T F(x) = \frac{1}{2}\|F(x)\|_2^2$. Verifique que

$$\nabla f(x) = J(x)^T F(x),$$

onde $J(x)$ designa a matriz Jacobiana de F e $\nabla f(x)$ designa o vector gradiente de f .

17. Seja $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ duas vezes continuamente diferenciável num conjunto $D \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto e convexo. Mostre que, se $x \in D$ é mínimo local de f então $\nabla f(x) = 0$ e $\nabla^2 f(x)$ é uma matriz Positiva Semi-Definida.

18. Considere a função $\theta: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\theta(x) = 2x_1^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3 + 4x_1 - 8x_2 + 2x_3.$$

- (a) Mostre que $\bar{x} = (-2, -1, 3)$ é ponto estacionário mas não é nem mínimo local nem máximo local.
- (b) Mostre que o problema não tem nem mínimos locais nem máximos locais.

19. Escreva a função $\theta: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida na alínea anterior na forma matricial

$$\theta(x) = \frac{1}{2}x^T Ax + b^T x + c,$$

onde A é uma matriz simétrica.

20. Prove que a função quadrática de n variáveis,

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax + b^T x + c,$$

com $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simétrica, $b \in \mathbb{R}^n$ e $c \in \mathbb{R}$, possui um único mínimo local se e só se a matriz A for Positiva Definida. Caracterize esse mínimo local.

21. Utilize as condições necessárias e suficientes de optimalidade para optimização sem restrições para mostrar que as soluções do problema de mínimos quadrados

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2^2,$$

com $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $b \in \mathbb{R}^m$, sendo $\text{car}(A) = m > n$, são todos os pontos x que satisfazem $(A^T A)x = A^T b$. Quantos são?

22. Mostre que as seguintes funções são convexas no seu domínio de definição:

- (a) $f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^2$;
- (b) A função f do exercício 15.

23. Considere a função $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x_1, x_2) = x_1x_2$.

- (a) Obtenha $f(x) = (1/2)x^T Ax + b^T x + c$, com $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ simétrica, $b \in \mathbb{R}^2$ e $c \in \mathbb{R}$.

- (b) Obtenha uma matriz diagonal E tal que a função $g(x) = (1/2)x^T(A + E)x + d^T x + f$, com $d \in \mathbb{R}^2$ e $f \in \mathbb{R}$, seja convexa.
- (c) Faça $d = 0$ e $f = 0$ e escreva g por extenso (desenvolva os produtos matriciais).

24. Uma função $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se concava em \mathbb{R}^n se a função $f = -g$ é convexa em \mathbb{R}^n .

- (a) Enuncie uma proposição que lhe permita averiguar se uma dada função g é concava em \mathbb{R}^n .
- (b) Mostre que as únicas funções que são simultaneamente concavas e convexas são as funções lineares $f(x) = b^T x + c$.

25. em Exame 19/6/2000:

Considere uma função $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = (x_1 - x_2)^4 + x_1^2 - x_2^2 - 2x_1 + 2x_2 + 1.$$

- (a) Determine o vector gradiente ∇f e matriz Hessiana $\nabla^2 f$ em qualquer ponto $x \in \mathbb{R}^2$.
- (b) Mostre que f não é convexa em \mathbb{R}^2 .
- (c) Determine todos os pontos estacionários de f . Quais satisfazem a condição suficiente de segunda ordem para mínimo local?

26. em Exame 10/7/2000:

Considere a função $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + 2x_1x_2 - 3x_1 - x_2$$

- (a) Escreva a função f na forma matricial $f(x) = (1/2)x^T Q x + b^T x + c$, com Q uma matriz simétrica.
- (b) Determine todos os pontos estacionários de f . Quais são extremos locais e porquê?
- (c) Sejam λ um valor próprio negativo da matriz Hessiana e $v \neq 0$ o respectivo valor próprio. Mostre que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(kv) = -\infty.$$

Que pode concluir sobre a existência de mínimo global para f ?