Departamento de Matemática
Universidade de Coimbra

Matemática Computacional

Exercícios de Álgebra Linear e Cálculo Vectorial

1. Seja $x \in \mathbb{R}^n$. Recorde que
$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j|, \qquad \|x\|_\infty = \max_{1\le j\le n} |x_j|, \qquad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}.$$
Mostre que
$$\|x\|_1 \ge \|x\|_2 \ge \|x\|_\infty, \qquad \|x\|_1 \le \sqrt{n}\|x\|_2, \qquad \|x\|_2 \le \sqrt{n}\|x\|_\infty,$$
e conclua que as normas l_1, l_2 e l_∞ são equivalentes.

2. Seja $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Recorde que
$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n} \|a_{\cdot j}\|_1, \qquad \|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \|a_{i\cdot}\|_1, \qquad \|A\|_2 = \sqrt{\text{maior valor próprio de } A^TA},$$
onde $a_{\cdot j}$ designa a j-ésima coluna de A e $a_{i\cdot}$ designa a i-ésima linha de A. Mostre que $\|A\| = \|A^T\|$ para a norma l_2 mas não para as normas l_1 e l_∞.

3. Uma matriz $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ diz-se ortogonal se a sua inversa existe e é igual à transposta de Q. Mostre que
   (a) Todos os valores próprios de Q têm módulo um.
   (b) Seja $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Mostre que $\|QA\|_2 = \|A\|_2$ e $\|Q\|_2 = 1$.

4. Seja A uma matriz $n \times n$ simétrica. O teorema espectral assegura a existência de uma matriz ortogonal Q e uma matriz diagonal D tal que $A = QDQ^T$. Mostre que A é soma de n matrizes de característica um,
$$A = \sum_{i=1}^{n} d_{ii} q_i q_i^T,$$
onde q_i é a i-ésima coluna de Q.

5. Seja $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ uma matriz de característica completa.
   (a) Mostre que as matrizes A^TA e AA^T são simétricas e Positiva Semi-Definidas.
   (b) Sendo $m < n$, mostre que AA^T é Positiva Definida mas A^TA não.
   (c) Sendo $m > n$, mostre que AA^T não é Positiva Definida mas A^TA é.
   (d) Sendo $m = n$, mostre que AA^T e A^TA são ambas Positivas Definidas.

6. Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica com valores próprios reais no intervalo fechado $[m, M]$.
   (a) Mostre que $m\ x^Tx \le x^TAx \le M\ x^Tx$, para todo o $x \in \mathbb{R}^n$.
   (b) Mostre que $\|A\|_2 = \max\{|\ \lambda_i\ |: \lambda_i$ é valor próprio de $A\ \} \le \max\{|m|, |M|\}$ (**Sugestão:** Use o facto de que os valores proṕrios de A^2 são os valores próprios de A ao quadrado).

(c) Sabendo que A é Positiva Definida, conclua que $\|A\|_2 \leq M$.

7. Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica. Mostre que se todos os valores próprios de A forem superiores a μ então a matriz $A - \mu I$ é Positiva Definida.

8. Para cada uma das matrizes A abaixo, determine uma matriz diagonal E tal que $A+E$ é Positiva Definida :
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

9. Averigue quais as matrizes A abaixo são Positivas Semi-Definidas :
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

10. Mostre que o conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n\colon Ax \leq b\}$ é convexo, onde $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $b \in \mathbb{R}^m$.

11. Usando o exercício anterior, mostre que o conjunto dos pontos $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ tal que
$$\begin{array}{rcl} 2x_1 + x_2 - x_3 & \leq & 5 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 & = & 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 & \geq & 1 \end{array}$$
é um conjunto convexo.

12. Calcule a matriz Jacobiana da função vectorial $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por
$$F(x) = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^3 - x_3^4 \\ x_1x_2x_3 \\ 2x_1x_2 - 3x_2x_3 + x_1x_3 \end{bmatrix}.$$

13. Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x_1^3x_2^4 + x_2/x_1$. Determine o vector gradiente $\nabla f(x)$ e a matriz Hessiana $\nabla^2 f(x)$.

14. Mostre que se $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ for duas vezes continuamente diferenciável num conjunto $D \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto e convexo então para todo $x, x+p \in D$ tem-se
$$f(x+p) = f(x) + \nabla f(x)^T p + \frac{1}{2} p^T \nabla^2 f(z) p,$$
para algum z no interior do segmento que une x e $x+p$.

15. Considere a função $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax + b^T x + c$, onde
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad c = 1.$$

(a) Escreva f por extenso (isto é, desenvolva os produtos matriciais).

(b) Mostre que o vector gradiente $\nabla f(x) = Ax + b$ e a matriz Hessiana $\nabla^2 f(x) = A$.

16. Considere a função $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$F(x) = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 1 \\ 5x_1^2 - x_2^2 - 2 \end{bmatrix}$$

e a função $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{2}F(x)^T F(x) = \frac{1}{2}\|F(x)\|_2^2$. Verifique que

$$\nabla f(x) = J(x)^T F(x),$$

onde $J(x)$ designa a matriz Jacobiana de F e $\nabla f(x)$ designa o vector gradiente de f.

17. Seja $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ duas vezes continuamente diferenciável num conjunto $D \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto e convexo. Mostre que, se $x \in D$ é mínimo local de f então $\nabla f(x) = 0$ e $\nabla^2 f(x)$ é uma matriz Positiva Semi-Definida.

18. Considere a função $\theta: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$\theta(x) = 2x_1^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3 + 4x_1 - 8x_2 + 2x_3.$$

 (a) Mostre que $\bar{x} = (-2, -1, 3)$ é ponto estacionário mas não é nem mínimo local nem máximo local.
 (b) Mostre que o problema não tem nem mínimos locais nem máximos locais.

19. Escreva a função $\theta: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida na alínea anterior na forma matricial

$$\theta(x) = \frac{1}{2}x^T Ax + b^T x + c,$$

onde A é uma matriz simétrica.

20. Prove que a função quadrática de n variáveis,

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax + b^T x + c,$$

com $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica, $b \in \mathbb{R}^n$ e $c \in \mathbb{R}$, possui um único minimo local se e só se a matriz A for Positiva Definida. Caracterize esse minimo local.

21. Utilize as condições necessárias e suficientes de optimalidade para optimização sem restrições para mostrar que as soluções do problema de mínimos quadrados

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2^2\,,$$

com $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $b \in \mathbb{R}^m$, sendo $\mathrm{car}(A) = m > n$, são todos os pontos x que satisfazem $(A^T A)x = A^T b$. Quantos são?

22. Mostre que as seguintes funções são convexas no seu domínio de definição:
 (a) $f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^2$;
 (b) A função f do exercício 15.

23. Considere a função $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x_1, x_2) = x_1x_2$.
 (a) Obtenha $f(x) = (1/2)x^T Ax + b^T x + c$, com $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ simétrica, $b \in \mathbb{R}^2$ e $c \in \mathbb{R}$.

(b) Obtenha uma matriz diagonal E tal que a função $g(x) = (1/2)x^T(A+E)x + d^Tx + f$, com $d \in \mathbb{R}^2$ e $f \in \mathbb{R}$, seja convexa.

(c) Faça $d = 0$ e $f = 0$ e escreva g por extenso (desenvolva os produtos matriciais).

24. Uma função $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diz-se concava em $\mathbb{R}^n$ se a função $f = -g$ é convexa em $\mathbb{R}^n$.

    (a) Enuncie uma proposição que lhe permita averiguar se uma dada função g é concava em $\mathbb{R}^n$.

    (b) Mostre que as únicas funções que são simultaneamente concavas e convexas são as funções lineares $f(x) = b^Tx + c$.

25. *em Exame 19/6/2000:*

    Considere uma função $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = (x_1 - x_2)^4 + x_1^2 - x_2^2 - 2x_1 + 2x_2 + 1.$$

    (a) Determine o vector gradiente ∇f e matriz Hessiana $\nabla^2 f$ em qualquer ponto $x \in \mathbb{R}^2$.

    (b) Mostre que f não é convexa em $\mathbb{R}^2$.

    (c) Determine todos os pontos estacionários de f. Quais satisfazem a condição suficiente de segunda ordem para mínimo local?

26. *em Exame 10/7/2000:*

    Considere a função $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + 2x_1x_2 - 3x_1 - x_2$$

    (a) Escreva a função f na forma matricial $f(x) = (1/2)x^TQx + b^Tx + c$, com Q uma matriz simétrica.

    (b) Determine todos os pontos estacionários de f. Quais são extremos locais e porquê?

    (c) Sejam λ um valor próprio negativo da matriz Hessiana e $v \neq 0$ o respectivo valor próprio. Mostre que

$$\lim_{k\to\infty} f(kv) = -\infty.$$

    Que pode concluir sobre a existência de mínimo global para f?