Departamento de Matemática — 2º semestre 2000/2001
Universidade de Coimbra — Folha Prática 4

Matemática Computacional

Métodos de Secante para sistemas de equações não lineares e optimização sem restrições

1. Para cada uma das seguintes funções vectoriais $F\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$:

$$F(x) = \begin{bmatrix} x_2 - x_1^2 \\ 1 - x_1 \\ x_4 - x_3^2 \\ 1 - x_3 \end{bmatrix}, x^{(0)} = (0,0,0,0), \qquad F(x) = \begin{bmatrix} x_1 + 10x_2 \\ \sqrt{5}(x_3 - x_4) \\ (x_2 - 2x_3)^2 \\ \sqrt{10}(x_1 - x_4) \end{bmatrix}, x^{(0)} = (3,-1,0,1).$$

   (a) Identifique uma das raízes de F.

   (b) Efectue uma iteração do método de secante de Broyden para determinar uma raiz de F a partir do ponto inicial $x^{(0)}$ indicado e $x^{(1)} = x^{(0)} - J(x^{(0)})^{-1}F(x^{(0)})$.

2. No método de secante de BFGS para optimização sem restrições as matrizes $H_k \in \mathbb{R}^{n\times n}$ são geradas através da fórmula de recorrência

$$H_k = H_{k-1} + \frac{y_k y_k^T}{y_k^T s_k} - \frac{H_{k-1}s_k s_k^T H_{k-1}}{s_k^T H_{k-1} s_k},$$

onde $y_k = \nabla f(x^k) - \nabla f(x^{k-1})$ e $s_k = x^k - x^{k-1}$. Mostre que $H_k s_k = y_k$ e que, se $H_{k-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ for simétrica e Positiva Definida e $y_k^T s_k > 0$ então a matriz H_k é simétrica e Positiva Definida.

3. Considere a seguinte função $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$:

$$f(x) \quad = \quad x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + x_2^4 + (x_2 + x_3)^2$$

Efectue duas iterações do Método de secante de BFGS para aproximar um mínimo local de f a partir de $x^{(0)} = (-1,1,1)$ e $x^{(1)} = x^{(0)} - \nabla^2 f(x^{(0)})^{-1}\nabla f(x^{(0)})$.

4. *em Exame 23/7/97:*

   (a) Considere o seguinte método para resolver uma equação $f(x) = 0$:

$$x_{k+1} \quad = \quad \frac{-(x_k + h_k)f(x_k) + x_k f(x_k + h_k)}{f(x_k + h_k) - f(x_k)},$$

   em que x_0 é dado. Diga, justificando, para que valores de h_k é que se obtém o Método da Secante?

   (b) Qual é a principal vantagem do Método da Secante em relação ao Método de Newton ?

5. *em Exame 10/9/97:*

Considere a função vectorial $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por:

$$F(x_1, x_2) \quad = \quad \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2 + 1 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}.$$

   (a) Calcule a matriz Jacobiana de F e as raízes de $F(x_1, x_2) = 0$.

(b) Efectue, se possível, uma iteração do Método de Newton partindo do ponto $x^0 = (0, 0)$.

(c) Efectue, se possível, uma iteração do Método (de Secante) de Broyden, a partir de $x^0 = (0, 0)$ e $x^1 = (1, 1)$ e assumindo que a matriz A_0 é a identidade de ordem 2.

6. *em Exame 19/6/2000:*

Considere a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ definida por $f(z) = \Re(z^3 - 2z - 5)$, onde $\Re(\cdot)$ designa a parte real de um número complexo. Pretende-se determinar $z = x_1 + x_2 i (x_1, x_2 \in \mathbb{R})$ que torne mínimo o valor de f.

(a) Mostre que o problema dado é equivalente ao problema de determinar o mínimo global $x^* = (x_1^*, x_2^*)$ de uma certa função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

(b) Obtenha uma aproximação x^1 de x^* efectuando uma iteração do método de Newton a partir de $x^0 = (-1, 1)$.

(c) Obtenha uma aproximação x^2 de x^* efectuando uma iteração do método de Broyden a partir de x^1 e x^0 que vêm da alínea anterior.

Nota: Para resolver (b) e (c) sem ter resolvido (a) considere que $g(x) = x_1^2 x_2 - x_2^2/2$.