Departamento de Matemática | 2º semestre 2000/2001
Universidade de Coimbra | Folha Prática 6

Matemática Computacional

Métodos numéricos para equações diferenciais ordinárias

1. Prove que o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x' = (t + \operatorname{sen} x)^2, & t \in [-1, 1], \\ x(0) = 3, \end{cases}$$

tem solução. Será única?

2. Mostre que os seguintes Problemas de Valor Inicial (PVI) são bem postos:

$$\begin{cases} y' &= 1/(1 + y^2), \quad t \in [a, b], \\ y(a) &= \alpha, \end{cases} \qquad \begin{cases} y' &= -y + t + 1, \quad t \in [0, 1], \\ y(0) &= 1. \end{cases}$$

3. Converta num sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem os seguintes problemas de valor inicial (utilize notação vectorial):

$$\begin{cases} y'' &= 3y' - 2y, \quad t \in [0, b], \\ y(0) &= y'(0) = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} y''' &= 0.1(1 - y^2)y' - y, \quad t \in [0, b], \\ y(0) &= 1, \quad y'(0) = y''(0) = 0. \end{cases}$$

4. Mostre que $x = -t^2/4$ e $x = 1 - t$ são soluções do problema de valor inicial:

$$\begin{cases} 2x' = \sqrt{t^2 + 4x} - t, & t \in [2, 3], \\ x(2) = -1. \end{cases}$$

Porque que é que este facto não contradiz os teoremas de unicidade dos PVI?

5. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' &= -2y, \quad t \in [0, 1], \\ y(0) &= 1. \end{cases}$$

Usando o método de Euler explícito (também chamado método de Taylor de ordem um) – $y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i)$ –, obtenha um valor aproximado para $y(1)$, fazendo o tamanho do passo $h = 1$, $h = 0.5$ e $h = 0.25$. Compare os resultados obtidos sabendo que a solução exacta da equação diferencial é $y(t) = e^{-2t}, t \in [0, 1]$.

6. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' &= 1/(1 + y^2), \quad t \in [0, 1], \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

Use o método de Taylor de ordem dois – $y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i) + (h^2/2)(f_t + f_y f)(t_i, y_i)$ – para obter um valor aproximado para $y(1)$.

7. Considere a equação diferencial $y'' + 4ty' + 2y^2 = 0$ com condições iniciais $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$. Utilize o método de Euler explícito, com $h = 0.1$, para aproximar $y(0.5)$ e $y'(0.5)$.

8. Escreva os passos do método de Taylor de ordem dois aplicado a cada um dos seguintes problemas de valor inicial:

$$\begin{cases} x' \;=\; -tx^2, \quad t \in [0,b], \\ x(0) = 2, \end{cases} \qquad \begin{cases} 5tx' + x^2 \;=\; 2, \quad t \in [4,b], \\ x(4) = 1. \end{cases}$$

9. Escreva os passos do método de Taylor de ordem três aplicado ao problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x' \;=\; x^2 + xe^t, \quad t \in [0,b], \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

10. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' &=& -50y, \quad t \in [0,1] \\ y(0) &=& 1 \end{cases}$$

Aproxime $y(1)$ usando os métodos de Euler explícito - $y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i)$ - e implícito - $y_{i+1} = y_i + hf(t_{i+1}, y_{i+1})$ - com tamanho do passo $h < 1$. Compare os resultados obtidos com a solução exacta.

11. (a) Escreva os passos do método de Taylor de ordem dois, com um passo $h = 0.01$, aplicado ao problema de valor inicial:

$$\begin{cases} 2\,x' \;=\; -t^2x^3 + x, \quad t \in [0,5], \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

(b) Qual é a forma do erro de truncatura local no caso da alínea anterior? De que resulta o erro de truncatura global nesta integração aproximada de 0 até 5?

12. Considere o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x' \;=\; 2x, \quad t \in [0,1], \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

(a) Diga porque é que este PVI tem solução única.

(b) Descreva algoritmicamente o Método de Euler para aproximar a solução deste PVI no intervalo $[0,1]$, utilizando $M = 10$ passos.

(c) Sabendo que a solução deste PVI é $x(t) = e^{2t}$ determine o erro de truncatura local ao ir de t para $t + h$.

13. Considere o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{aligned} z''(t) &= z(t)^2 - y(t) + e^t\,, \\ y''(t) &= z(t) - y(t)^2 - e^t\,, \quad t \in [0,1], \\ z(0) &= z'(0) = 0\,;\; y(0) = 1\,, y'(0) = -2\,. \end{aligned}$$

(a) Reescreva este problema de valor inicial recorrendo a um sistema de primeira ordem.

(b) Escreva os passos do método de Taylor de ordem dois aplicado ao problema de valor inicial obtido na alínea anterior. Considere $h = 0.01$.

14. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' &= ty^2, \quad t \in [1,2], \\ y(1) &= 2. \end{cases}$$

Aproxime $y(1.1)$, usando o método de Heun - $y_{i+1} = y_i + (h/2)(k_1 + k_2)$, sendo

$$k_1 = f(t_i, y_i), \quad k_2 = f(t_i + h, y_i + hk_1).$$

15. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' &= y - 2t/y, \quad t \in [0,1] \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

Aproxime $y(0.8)$, usando o método de Runge-Kutta de ordem quatro - $y_{i+1} = y_i + (h/6)(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$, sendo

$$k_1 = f(t_i, y_i), \qquad k_2 = f(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1),$$
$$k_3 = f(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_2), \qquad k_4 = f(t_i + h, y_i + hk_3).$$

16. *em Exame 10/7/2000:*

Considere o Problema de Valor Inicial

$$\begin{cases} y' = x^2 + \sin(y), \quad x \in [0,1], \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

(a) Mostre que este PVI possui solução única $y(x)$.

(b) Aproxime $y(1)$ usando dois passos do método de Euler explícito.

(c) Mostre que o erro de truncatura para o método de Euler explícito é $T_{i+1} = y''(\eta_i)/n$, onde $\eta_i \in [i/n, (i+1)/n]$, para $i = 0, 1, \ldots, n-1$ (n é o número de passos).

(d) Determine n tal que o erro de truncatura para o método de Euler explícito seja inferior ou igual a 0.01, independentemente de i.

17. *em Exame 19/6/2000:*

Considere o Problema de Valor Inicial

$$\begin{cases} y' = 1/(1 + y^2), \quad t \in [0,1], \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

cuja solução exacta está definida implicitamente por $y^3 + 3y - 3t = 4$.

(a) Mostre que o PVI é bem posto.

(b) Aproxime $y(1)$ usando o método de Runge-Kutta de ordem 2, com $h = 0.5$.

(c) Aproxime $y(1)$ efectuando duas iterações do método da bissecção. Quantas iterações seriam necessárias para obter um erro absoluto inferior a 0.01?