Departamento de Matemática
Universidade de Coimbra

2º semestre 2000/2001
Folha Prática 3

Matemática Computacional

Métodos de Newton para sistemas de equações não lineares e optimização sem restrições

1. O seguinte sistema de equações não lineares possui duas soluções, uma das quais é $(x, y) = (3, 0)$,

$$\begin{cases} x^2 - 2x + y^2 - 3 &= 0 \\ x(6 - x) + y - 9 &= 0. \end{cases}$$

   Localize e determine a outra solução efectuando duas aproximações do método de Newton.

2. O seguinte sistema de equações não lineares possui uma solução $x_* = (1, 1)$:

$$\begin{aligned} 2(x_1 + x_2)^2 + (x_1 - x_2)^2 - 8 &= 0 \\ 5x_1^2 + (x_2 - 3)^2 - 9 &= 0. \end{aligned}$$

   Dado $x^{(0)} = (2, 0)$, aplique uma iteração do método de Newton para calcular $x^{(1)}$.

3. Aplique duas iterações do método de Newton ao sistema de equações não lineares:

$$\begin{aligned} e^{x_1} - 1 &= 0 \\ e^{x_2} - 1 &= 0, \end{aligned}$$

   começando com $x^{(0)} = (-10, -10)$. O que é que aconteceria se continuasse a aplicar o método de Newton?

4. Localize as quatro soluções do sistema de equações não lineares:

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 - 1 &= 0 \\ 5x_1^2 - x_2^2 - 2 &= 0\,. \end{aligned}$$

   Será que é possível obter todas estas soluções através do método de Newton escolhendo diferentes pontos iniciais $x^{(0)}$?

5. Seja $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma função vectorial definida por

$$F(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2^2 + x_2 \\ e^{x_3} - 1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Calcule a matriz Jacobiana $J(x)$ de F. Qual é o seu valor na solução $x_* = (0, 0, 0)$?

   (b) Qual é a constante de Lipschitz de $J(x)$ no conjunto:

$$D = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x_i| \leq a\,,\ i = 1, 2, 3\} \qquad (a > 0)$$

   (c) Em que região é que a sequência gerada pelo método de Newton é convergente se $x_3^{(0)} = 0$? E se $x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0$? Apresente justificações geométricas.

6. Pretende-se construir uma ponte entre as duas margens de um rio que, por razões económicas, seja o mais curta possível. Sabendo que, na região onde se pretende construir a ponte, as margens do rio têm a forma das curvas $y = e^x$ e $y = \ln x$, construa um modelo matemático de optimização que lhe permita determinar o comprimento da ponte.

7. Pretende-se aproximar o conjunto de pontos $\{(1,2),(2,3),(3,5),(4,1)\}$ por uma função $y = \exp(ax) + \exp(bx)$, onde $a, b \in \mathbb{R}$, de forma a que o quadrado dos desvios medidos na vertical seja o menor possível.

   (a) Formule este problema como um problema de optimização sem restrições (denominado *problema de mínimos quadrados não lineares*).

   (b) Efectue uma iteração do método de Newton para aproximar a solução.

8. Para cada uma das seguintes funções $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcll} f(x) & = & (x_1-2)^2 + (x_1-2)x_2 + (x_2+1)^2, & x^{(0)} = (1,1) \\ f(x) & = & (x_1^2 - x_2)^2 + (1-x_1)^2, & x^{(0)} = (2,2), x^{(0)} = (1,5) \text{ e } x^{(0)} = (0,1/2). \end{array}$$

   (a) Determine todos os pontos estacionários de f. Quais são mínimos locais e quais são máximos locais? Identifique o mínimo global.

   (b) Efectue duas iterações do Método de Newton para obter um mínimo local de f a partir dos pontos iniciais indicados.

   (c) Compare os valores de $f(x^{(0)})$, $f(x^{(1)})$ e $f(x^{(2)})$.

9. Mostre que se

$$f(x) = c + q^T x + \frac{1}{2} x^T A x,$$

   com $c \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{R}^n$ e $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, simétrica e positiva definida, então a partir de qualquer ponto inicial $x^{(0)}$,

   (a) a direcção de Newton $p^{(0)}$ satisfaz a condição de Armijo para $\alpha \leq 1/2$ e a condição de Wolfe para $\beta > 0$.

   (b) O ponto $x^{(0)} + p^{(0)}$ é mínimo global de f.

10. Para cada uma das seguintes funções $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ abaixo, efectue uma iteração do Método de Newton Modificado para obter um mínimo local de f a partir dos pontos iniciais indicados (**Nota:** Para simplificar os cálculos não precisa impôr as condições de Armijo e Wolfe):

$$\begin{array}{rcll} f(x) & = & x_1^4 + x_1^2 + x_2^2, & x^{(0)} = (1,1) \\ f(x) & = & (x_1^2 - x_2)^2 + (1-x_1)^2, & x^{(0)} = (1,5) \text{ e } x^{(0)} = (0,1/2), \end{array}$$

11. Para cada uma das seguintes funções $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:

$$\begin{array}{rcll} F(x) & = & \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 2 \\ \exp(x_1 - 1) + x_2^3 - 2 \end{bmatrix}, & x^{(0)} = (2,1/2) \\ F(x) & = & \begin{bmatrix} 2(x_1+x_2)^2 + (x_1-x_2)^2 - 8 \\ 5x_1^2 + (x_2-3)^2 - 9 \end{bmatrix}, & x^{(0)} = (1,0) \text{ e } x^{(0)} = (-3/5,-6/5). \end{array}$$

   (a) Identifique uma das raízes de F.

(b) Efectue uma iteração do Método de Newton Modificado para determinar uma raiz de F a partir dos pontos iniciais indicados (**Nota:** Para simplificar os cálculos não precisa impôr as condições de Armijo e Wolfe).

12. *em Exame-Modelo 96/97:*

Considere a função vectorial $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por:

$$F(x_1, x_2) \;=\; \begin{pmatrix} e^{x_1} - 1 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}.$$

(a) Calcule a matriz Jacobiana de F e as raízes de $F(x_1, x_2) = 0$.

(b) Efectue, se possível, uma iteração do Método de Newton partindo do ponto $x^0 = (\log(2), 1)$.

(c) Calcule a constante de Lipschitz da função Jacobiana de F no conjunto $[-1, 1] \times [-1, 1]$.

13. *em Exame 8/9/98:*

(a) Diga, sucintamente, quais as principais características do comportamento local e global do método de Newton.

Considere a função vectorial $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por:

$$F(x_1, x_2, x_3) \;=\; \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_1^2 \\ e^{x_2} + \frac{1}{2}x_3^2 - 1 \\ e^{x_3} + x_2^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Calcule a matriz Jacobiana de F.

(c) Efectue, se possível, uma iteração do Método de Newton partindo do ponto $x^0 = (1, 1, 1)$.

14. *em Exame 20/7/99:*

Considere a função vectorial $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida por:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \;=\; \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ x_2 x_3 \\ x_3 x_4 \\ \vdots \\ x_{n-1} x_n \\ x_n \end{pmatrix},$$

em que $n \in \mathbb{N}$ é um número ímpar maior que ou igual a 5.

(a) Calcule a matriz Jacobiana de F.

(b) Efectue, se possível, uma iteração do Método de Newton partindo do ponto

$$x^0 = (1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$$

(c) Efectue, se possível, uma iteração do Método de Newton partindo do ponto

$$x^0 = (-1, -1, \ldots, -1) \in \mathbb{R}^n.$$

(d) O que é que pode concluir sobre o comportamento do Método de Newton a partir destas duas últimas alíneas?

NOTA: Se não conseguir responder a esta questão (alíneas a,b,c,d) na forma em que ela está colocada, resolva-a para $n = 5$.

15. *em Exame 10/7/2000:*

Considere a função $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + 2x_1x_2 - 3x_1 - x_2$$

(a) Aproxime o mínimo valor de f efectuando uma iteração do método de Newton a partir de $x^0 = (0,0)$.

(b) Aproxime o mínimo valor de f efectuando uma iteração do método de Newton <u>modificado</u> a partir de $x^0 = (0,0)$.

(c) Atendendo a que existe existe $v \in \mathbb{R}^2$ tal que $\lim_{k\to\infty} f(kv) = -\infty$, para qual dos dois métodos (Newton e Newton modificado) existe a possibilidade de convergência?