Departamento de Matemática — 2º semestre 2000/2001
Universidade de Coimbra — Folha Prática 1

Matemática Computacional

Métodos de Newton e da bissecção para equações unidimensionais

1. Localize graficamente as soluções das equações

$$\ln(x-1) - 1/(x-1) = 0, \qquad \ln(4-x^2) = x \qquad \text{e} \qquad |x| - e^x = 0.$$

2. Mostre que a equação $x^3 - x - 1 = 0$ possui uma única solução no intervalo $[1, 2]$ e determine o número de iterações necessárias para a aproximar com erro absoluto inferior a 10^{-4} pelo método da bissecção. Efectue duas iterações.

3. Considere o problema de determinar uma solução x^* da equação $x^2 - \alpha = 0$ dispondo de uma calculadora muito elementar.

   (a) Deduza a expressão geral do método de Newton, exprimindo x_{k+1} em função de x_k.

   (b) Distintamente, para $\alpha > 0$ e $\alpha = 0$, escreva $x_{k+1} - x_*$ em função de $x_k - x_*$.

   (c) Como é que interpreta a diferença nos resultados da alínea anterior?

   (d) Assuma que $\alpha = -1$. Calcule 7 iterações do método de Newton começando em $x_0 = 2$. Que lhe parece estar a acontecer?

   (e) Para $\alpha > 0$, mostre que a sequência $\{x_k\}$ gerada pelo método de Newton converge sempre para uma raíz da equação $x^2 - \alpha = 0$ qualquer que seja $x_0 \neq 0$. Para que valores de x_0 é que o limite é $\sqrt{\alpha}$? E $-\sqrt{\alpha}$?

4. Seja f uma função real de variável real contínua à Lipschitz em $]a, b[$ com constante de Lipschitz $\gamma > 0$. Prove que

$$\left| f(y) - f(x) - f'(x)(y-x) \right| \;\leq\; \frac{\gamma}{2} |y-x|^2$$

para todo o x, y em $]a, b[$.

5. Considere a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Mostre que f é contínua à Lipschitz mas não é diferenciável em $x = 0$.

6. Considere as hipóteses do teorema da convergência (local) quadrática do método de Newton:

   1. $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ tal que f' é contínua à Lipschitz em $]a, b[$ com constante de Lipschitz $\gamma > 0$.
   2. Existe $x_* \in]a, b[$ tal que $f(x_*) = 0$.
   3. $|f'(x)| \;\geq\; \rho \;> 0$, para todo o x em $]a, b[$.

   Prove que a hipótese 3 pode ser substituída por $f'(x_*) \neq 0$ sem que o resultado do teorema referido seja alterado.

7. Para cada uma das funções $f(x) = x$, $f(x) = x^2 + x$ e $f(x) = e^x - 1$, responda às seguintes questões:

(a) Quanto vale a derivada de f na raiz $x_* = 0$?

(b) Determine uma constante de Lipschitz para f' no intervalo $[a, b]$ (com $a < 0 < b$) .

(c) Identifique um intervalo $[a, b]$ nas condições do teorema da convergência (local) quadrática do método de Newton.

8. Seja f uma função real de variável real definida em $]a, b[$ tal que a segunda derivada é contínua em $]a, b[$. Seja ainda $x_* \in]a, b[$ uma raíz da equação $f(x) = 0$ para a qual $f(x_*) = f'(x_*) = 0$ e $f''(x_*) \neq 0$.

   Assuma que a sequência $\{x_k\}$ gerada pelo método de Newton está bem definida (isto é que $f'(x_k) \neq 0$ para todo o k) e que converge para x_*. Prove que existe uma constante $\beta \in]0, 1[$ tal que
$$|x_{k+1} - x_*| \;\leq\; \beta|x_k - x_*|$$
   para $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande.

9. Explique como obter um valor aproximado para a distância mínima medida na vertical entre as curvas definidas por $y = e^x$ e $y = \ln(x)$, para $x > 0$.

10. Um avião em voo vertical descreve uma trajectória que, para $t \in [0, 1]$ dado em minutos, pode ser traduzida pela expressão
$$h(t) = (t - 1)e^t - t + 3.$$
    (a) Aplicando o método de Newton duas vezes, calcule um valor aproximado do instante em que o avião esteve mais próximo do solo, no intervalo de tempo dado.

    (b) Determine a diferença máxima de altitude que o avião atinge no mesmo intervalo.

11. Efectue duas iterações do Método de Newton Modificado para obter uma aproximação da solução de $x^3 - x - 1 = 0$ no intervalo $[1, 2]$.

12. Seja $P(x)$ um polinómio de grau n e $\bar{x}$ uma das suas raízes reais.

    (a) Mostre que se $\bar{x}$ é uma raiz real de multiplicidade 2 então
$$P(\bar{x}) = P'(\bar{x}) = 0, \quad P''(\bar{x}) \neq 0.$$
    (b) Mostre que, $\bar{x}$ é uma raiz real de multiplicidade k se e só se
$$P(\bar{x}) = P'(\bar{x}) = \ldots = P^{(k-1)}(\bar{x}) = 0, \quad P^{(k)}(\bar{x}) \neq 0.$$

13. *em Exame-Modelo 96/97:*

    (a) Efectue duas iterações do Método da Bissecção para resolver a equação $x^2 - 2 = 0$, começando com $x_0 = 0$ e $z_0 = 3$. Será que este método alguma vez consegue determinar de forma exacta a raíz da equação ?

    (b) Compare, do ponto de vista da convergência local da resolução de uma equação não linear, os Métodos de Newton e da Bissecção. Em que situação é que tiraria partido das vantagens de ambos ?

14. *em Exame 23/7/97:*

    Considere a seguinte função real de variável real:
$$f(x) \;=\; \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se } x \leq 0\,, \\ 1 - x^2 & \text{se } x > 0\,. \end{cases}$$

(a) Calcule, se possível, duas iterações do Método de Newton para resolver a equação $f(x) = 0$, começando com $x_0 = -1$.

(b) Quais são os valores de x_0 para os quais o Método de Newton converge para uma raíz de f?

(c) Seja $\{x_k\}$ a sequência gerada pelo Método de Newton para $x_0 > 0$. Escreva $x_{k+1} - x_*$ em função de $x_k - x_*$ para $x_* = 1$ e $k \in \mathbb{N}$. A partir desta fórmula, deduza a convergência quadrática do Método de Newton aplicada a este exemplo.

15. *em Exame 21/7/98:*

Seja f uma função real de variável real a satisfazer todas as condições do teorema da convergência local do Método de Newton aplicado a $f(x) = 0$.

(a) De que modo é que o valor da constante de Lipschitz de f' influencia a taxa de convergência local do Método de Newton?

Considere agora as seguintes funções reais de variável real:

$$f_1(x) \;=\; x^2 - x\,, \qquad f_2(x) \;=\; 100x^2 - 100x\,.$$

(b) Calcule as constantes de Lipschitz de f_1' e f_2' em $\mathbb{R}$.

(c) Escreva, em ambos os casos, a fórmula do Método de Newton que permite calcular x_{k+1} em função de x_k ($k \in \mathbb{N}$).

(d) Porque é que o resultado das alíneas b) e c) não contradiz a resposta dada na alínea a)? (Considere a raíz $x_* = 1$.)

16. *em Exame 15/9/99:*

Considere a seguinte função real de variável real:

$$f(x) \;=\; \frac{e^x + e^{-x}}{2} - 2\,.$$

(a) Esboce o gráfico de f.

(b) Considere também a equação não linear $f(x) = 0$. Efectue, se possível, uma iteração dos métodos

i. de Newton, com $x_0 = 0$.

ii. de secante, com $x_0 = 0$ e $x_1 = 1$.

(**NOTA:** Indique apenas os cálculos.) Que conclusões é que retira? Indique dois pontos iniciais para os quais não seria possível efectuar uma iteração do método de secante.

(c) Calcule a constante de Lipschitz de f' no intervalo $[a, b]$ com $0 < a \leq b$.

(d) Considere a aplicação do método de Newton com $x_0 \in [a, b]$. Diga, justificando a sua resposta com o resultado da alínea anterior, para que valores de a e de b é que o método de Newton seria em princípio mais lento: $a = 5\,,\ b = 10$ ou $a = 500\,,\ b = 1000$?
(**NOTA:** Se não respondeu à alínea c, pode justificar a sua resposta através de argumentos geométricos.)

17. *em Exame 19/6/2000:*

Considere a equação unidimensional $f(x) = \sin x - \cos 3x = 0, x \in \mathbb{R}$.

(a) Determine um intervalo $[a, b] \subseteq [0, 2\pi]$ que contenha uma única raiz x^* de f.

(b) Mostre que f' é contínua à Lipschitz em $[a, b]$ e que $f'(x^*) \neq 0$.

(c) Apresente a relação recursiva do método de Newton que define uma sucessão $\{x_k\}$ que se espera vir a convergir para x^*. Se houver convergência para x^*, será a taxa de convergência quadrática?

18. *em Exame 10/7/2000:*

Considere uma matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ cujo polinómio característico é definido por

$$p(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 2.$$

(a) Mostre que a matriz A tem três valores próprios reais distintos. (Sugestão: 1 é raiz de p)

(b) Sem efectuar quaisquer cĺculos, justifique que p' é contínua à Lipschitz em qualquer intervalo fechado e limitado $[a, b]$ e que p' não se anula em qualquer dos valores próprios de A.

(c) Apresente a relação recursiva do método de Newton que define uma sucessão $\{\lambda_k\}$ que se espera vir a convergir para um dos valores próprios de A. Se convergência ocorrer de facto, será a taxa de convergência quadrática?

19. (em `Matlab`) Mostre que a equação $x + 0.5 + 2\cos \pi x = 0$ possui uma única solução no intervalo $[0.5, 1.0]$ e obtenha uma aproximação com erro absoluto inferior a 10^{-2} usando o método da bissecção.

20. (em `Matlab`) Considere o problema de determinar as raízes reais de cada uma das seguintes equações não lineares a uma variável:

$$\begin{array}{rllllll} f_1(x) = & x^4 & -12x^3 & +47x^2 & -60x & & = 0 \\ f_1(x) = & x^4 & -12x^3 & +47x^2 & -60x & +24 & = 0 \\ f_1(x) = & x^4 & -12x^3 & +47x^2 & -60x & +24.1 & = 0. \end{array}$$

Efectue várias iterações do método de Newton a partir de $x_0 = 2$ e $x_0 = 1$.

21. (em `Matlab`) Obtenha um valor aproximado do ponto inicial $c > 0$ a partir do qual o método de Newton *entra em ciclo* quando aplicado a $\arctan(x) = 0$.