Departamento de Matemática — Universidade de Coimbra

$2^{\underline{o}}$ semestre 2001/2002 — Exercício 5 da Folha 2

Matemática Computacional

Exercício 5 da Folha 2

Enunciado corrigido: Suponha o conhecimento da factorização de uma matriz A $m \times n$ (com $m > n$) da forma $A = QR$, onde Q é uma matriz $m \times m$ ortogonal e R é uma matriz $m \times n$ em escada e de característica r. Considere o seguinte problema de mínimos quadrados

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2^2 .$$

Mostre que as soluções deste problema são as soluções do sistema linear

$$R_1 x = Q_1^T b, \tag{1}$$

onde R_1 é a submatriz de R contendo as primeiras r linhas, e Q_1 é a submatriz de Q contendo as primeiras r colunas.

Resolução: Para todo $x \in \mathbb{R}^n$ tem-se

$$\begin{aligned} \|Ax - b\|_2^2 &= \|QRx - b\|_2^2 \\ &= \left\|Q\left(Rx - Q^T b\right)\right\|_2^2 \\ &= \| \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \end{bmatrix} b \|_2^2 \\ &= \|R_1 x - Q_1^T b\|_2^2 + \|Q_2^T b\|_2^2 \end{aligned}$$

Por isso,

$$\|Ax - b\|_2^2 \geq \|Q_2^T b\|_2^2, \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n,$$

com igualdade para todo o $x \in \mathbb{R}^n$ tal que (1) se verifique, que é um sistema de equações sempre possível e com $n - r$ graus de liberdade.

Mais detalhe: Se $n - r > 0$ então a matriz R_1 é da forma

$$R_1 = [R_{1B}\ R_{1N}],$$

onde R_{1B} denota uma matriz quadrada $r \times r$ invertível. Então, (1) é equivalente a

$$\begin{aligned} & [R_{1B}\ R_{1N}] \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = Q_1^T b \\ \Longleftrightarrow\quad & R_{1B} x_B + R_{1N} x_N = Q_1^T b \\ \Longleftrightarrow\quad & R_{1B} x_B = Q_1^T b - R_{1N} x_N . \end{aligned}$$

Por isso, as soluções do sistema de equações (1) são da forma

$$x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}, \text{ com } x_B = R_{1B}^{-1} Q_1^T b - R_{1B}^{-1} R_{1N} x_N \quad \text{ e } x_N \text{ qualquer.}$$

ou, dito de outro modo,

$$x = \begin{bmatrix} R_{1B}^{-1} Q_1^T b \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ R_{1B}^{-1} R_{1N} \end{bmatrix} x_N, \qquad x_N \text{ qualquer.} \tag{2}$$

Uma sugestão de tema para um projecto: Escreva uma função em Matlab que para uma dada matriz A e dado vector b caracterize a totalidade das soluções no sentido dos mínimos quadrados através de (2).