Exame de Matemática Computacional

(Eng. Informática)

Departamento de Matemática
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Universidade de Coimbra

Exame fictício ———- Duração: 2h 30min

1. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x - \bar{x})^4$, onde $\bar{x} \in \mathbb{R}$ é uma constante. Pretende-se utilizar o método de Newton para determinar o mínimo valor de f.

   (a) Simplifique a relação recursiva do método de Newton que gera uma sucessão $\{x_k\}$.

   (b) Seja $y_k = |x_k - \bar{x}|$. Mostre que $y_{k+1} = (2/3)y_k$.

   (c) Mostre que $\{x_k\}$ converge para $\bar{x}$ qualquer que seja o ponto inicial x_0.

   (d) Mostre que a convergência de $\{x_k\}$ é linear.

   (e) Num teorema discutido nas aulas vimos que o método de Newton possui, sob certas condições, convergência quadrática. Neste caso, qual é a condição que falha?

2. Considere a função $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x^T \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} x + x^T \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} + 6.$$

   (a) Determine o vector gradiente ∇f e matriz Hessiana $\nabla^2 f$ no ponto $\bar{x} = (1, 1)$.

   (b) Determine a derivada direccional de f em $\bar{x}$ na direcção $d = -\nabla f(\bar{x})$.

   (c) Determine um ponto estacionário de f. Será mínimo local? Justifique.

3. Considere o sistema de equações não lineares

$$\begin{cases} x_1^3 + (x_1 - x_2)^2 & = & 1 \\ x_1 + x_1 x_2^2 & = & 2 \end{cases}$$

   que possui a solução $x^* = (1, 1)$.

   (a) Descreva o sistema na forma matricial $F(x) = 0$ e determine o Jacobiano de F em qualquer ponto $x \in \mathbb{R}^2$.

   (b) Efectue uma iteração do método de Newton para aproximar x^* a partir do ponto inicial $x^0 = (2, 2)$.

   (c) Se tivesse efectuado uma iteração do método de Newton modificado teria chegado ao mesmo ponto? Qual é principal vantagem do método de Newton modificado sobre o método de Newton.

4. (a) Mostre que o polinómio de grau menor ou a igual a um, interpolador de f nos pontos $x_0 < x_1$ é dado por

$$P_1(x) = \frac{(x_1 - x)f(x_0) + (x - x_0)f(x_1)}{x_1 - x_0}.$$

(b) Mostre que se f for de classe C^2 em $[x_0, x_1]$ então

$$|f(x) - P_1(x)| \leq \frac{(x_1 - x_0)^2}{8} M,$$

onde $M = \max_{x \in [x_0, x_1]} f''(x)$.

(c) Considere o seguinte extracto de uma tabela da função Φ definida por

$$\Phi(t) = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{t} \exp(-x^2)\ dx,$$

t	$\Phi(t)$
1.91	0.9719
1.92	0.9726
1.93	0.9732
1.94	0.9738
1.95	0.9744
1.96	0.9750
1.97	0.9756
1.98	0.9761
1.99	0.9767
2.00	0.9772

Aproxime o valor de $\Phi(1.964)$ e diga qual é o erro máximo cometido.

5. Pretende-se tabelar a função

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \int_{0}^{t} \exp(-x^2)\ dx,$$

no intervalo $[0, 1]$ em 101 pontos igualmente espaçados.

(a) Reformule o problema como um Problema de Valor Inicial (PVI).

(b) Explique como pode construir a tabela usando o método de Runge-Kutta de ordem dois.