Matemática Computacional

Métodos de Newton para sistemas de equações não lineares e optimização sem restrições

Ano lectivo 2000/2001 Folha 3

1. O sistema de equações não lineares

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x^2 - 2x + y^2 - 3 & = & 0 \\ x(6-x) + y - 9 & = & 0 \end{array} \right.$$

tem duas soluções, uma das quais é $(x, y) = (3, 0)$. Localize e determine a outra solução do sistema efectuando duas aproximações do método de Newton.

2. O sistema de equações não lineares:

$$\begin{array}{rcl} 2(x_1 + x_2)^2 + (x_1 - x_2)^2 - 8 & = & 0 \\ 5x_1^2 + (x_2 - 3)^2 - 9 & = & 0 \end{array}$$

tem uma solução $x_* = (1, 1)$. Dado $x^{(0)} = (2, 0)$, aplique uma iteração do método de Newton para calcular $x^{(1)}$.

3. Aplique duas iterações do método de Newton ao sistema de equações não lineares:

$$\begin{array}{rcl} e^{x_1} - 1 & = & 0 \\ e^{x_2} - 1 & = & 0 \end{array}$$

partindo de $x^{(0)} = (-10, -10)$. O que é que aconteceria se continuasse a aplicar o método de Newton ?

4. Considere o sistema de equações não lineares:

$$\begin{array}{rcl} x_1^2 + x_2^2 - 1 & = & 0 \\ 5x_1^2 - x_2^2 - 2 & = & 0\,. \end{array}$$

   (a) Localize as quatro soluções deste sistema de equações.

   (b) Será que é possível obter todas estas soluções através do método de Newton escolhendo diferentes pontos iniciais $x^{(0)}$?

5. Seja $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma função vectorial definida por

$$F(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2^2 + x_2 \\ e^{x_3} - 1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Calcule a matriz Jacobiana $J(x)$ de F. Qual é o seu valor na solução $x_* = (0, 0, 0)$?

   (b) Qual é a constante de Lipschitz de $J(x)$ no conjunto:

$$D = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x_i| \le a\,,\ i = 1, 2, 3\} \qquad (a > 0)$$

   (c) Em que região é que a sequência gerada pelo método de Newton é convergente se $x_3^{(0)} = 0$? E se $x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0$? Apresente justificações geométricas.

6. Pretende-se construir uma ponte entre as duas margens de um rio que, por razões económicas, seja o mais curta possível. Sabendo que, na região onde se pretende construir a ponte, as margens do rio têm a forma das curvas $y = e^x$ e $y = \ln x$, construa um modelo matemático de optimização que lhe permita determinar o comprimento da ponte.

7. Pretende-se aproximar o conjunto de pontos $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2, i = 1, 2, 3, 4$, por uma função $y = \exp(ax) + \exp(bx)$, onde $a, b \in \mathbb{R}$, de forma a que o quadrado dos desvios medidos na vertical seja o menor possível.

   (a) Formule este problema como um problema de optimização sem restrições (denominado *problema de mínimos quadrados não lineares*).

   (b) Resolva-o efectuando uma iteração do método de Newton.

8. Para cada uma das seguintes funções $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (x_1-2)^2 + (x_1-2)x_2 + (x_2+1)^2, \qquad && x^{(0)} = (1,1) \\
f(x) &= (x_1^2 - x_2)^2 + (1-x_1)^2, && x^{(0)} = (2,2), x^{(0)} = (1,5) \text{ e } x^{(0)} = (0,1/2).
\end{aligned}
$$

   (a) Determine todos os pontos estacionários de f. Quais são mínimos locais e quais são máximos locais? Identifique o mínimo global.

   (b) Efectue duas iterações do Método de Newton para obter um mínimo local de f a partir dos pontos iniciais indicados.

   (c) Compare os valores de $f(x^{(0)})$, $f(x^{(1)})$ e $f(x^{(2)})$.

9. Mostre que se

$$f(x) = c + q^T x + \frac{1}{2} x^T A x,$$

   com $c \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{R}^n$ e $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, simétrica e positiva definida, então a partir de qualquer ponto inicial $x^{(0)}$,

   (a) a direcção de Newton $p^{(0)}$ satisfaz a condição de Armijo para $\alpha \leq 1/2$ e a condição de Wolfe para $\beta > 0$.

   (b) O ponto $x^{(0)} + p^{(0)}$ é mínimo global de f.

10. Para cada uma das seguintes funções $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ abaixo, efectue uma iteração do Método de Newton Modificado para obter um mínimo local de f a partir dos pontos iniciais indicados (**Nota:** Para simplificar os cálculos não precisa impôr as condições de Armijo e Wolfe):

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x_1^4 + x_1^2 + x_2^2, \qquad && x^{(0)} = (1,1) \\
f(x) &= (x_1^2 - x_2)^2 + (1-x_1)^2, && x^{(0)} = (1,5) \text{ e } x^{(0)} = (0,1/2),
\end{aligned}
$$

11. Para cada uma das seguintes funções $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 2 \\ \exp(x_1 - 1) + x_2^3 - 2 \end{bmatrix}, \qquad && x^{(0)} = (2, 1/2) \\
F(x) &= \begin{bmatrix} 2(x_1+x_2)^2 + (x_1-x_2)^2 - 8 \\ 5x_1^2 + (x_2-3)^2 - 9 \end{bmatrix}, && x^{(0)} = (1,0) \text{ e } x^{(0)} = (-3/5, -6/5).
\end{aligned}
$$

   (a) Identifique uma das raízes de F.

(b) Efectue uma iteração do Método de Newton Modificado para determinar uma raiz de F a partir dos pontos iniciais indicados (**Nota:** Para simplificar os cálculos não precisa impôr as condições de Armijo e Wolfe).

12. *em Exame-Modelo 96/97:*

Considere a função vectorial $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por:

$$F(x_1, x_2) \;=\; \begin{pmatrix} e^{x_1} - 1 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}.$$

(a) Calcule a matriz Jacobiana de F e as raízes de $F(x_1, x_2) = 0$.

(b) Efectue, se possível, uma iteração do Método de Newton partindo do ponto $x^0 = (\log(2), 1)$.

(c) Calcule a constante de Lipschitz da função Jacobiana de F no conjunto $[-1, 1] \times [-1, 1]$.

13. *em Exame 8/9/98:*

(a) Diga, sucintamente, quais as principais características do comportamento local e global do método de Newton.

Considere a função vectorial $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por:

$$F(x_1, x_2, x_3) \;=\; \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_1^2 \\ e^{x_2} + \frac{1}{2}x_3^2 - 1 \\ e^{x_3} + x_2^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Calcule a matriz Jacobiana de F.

(c) Efectue, se possível, uma iteração do Método de Newton partindo do ponto $x^0 = (1, 1, 1)$.

14. *em Exame 20/7/99:*

Considere a função vectorial $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida por:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \;=\; \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ x_2 x_3 \\ x_3 x_4 \\ \vdots \\ x_{n-1} x_n \\ x_n \end{pmatrix},$$

em que $n \in \mathbb{N}$ é um número ímpar maior que ou igual a 5.

(a) Calcule a matriz Jacobiana de F.

(b) Efectue, se possível, uma iteração do Método de Newton partindo do ponto

$$x^0 = (1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$$

(c) Efectue, se possível, uma iteração do Método de Newton partindo do ponto

$$x^0 = (-1, -1, \ldots, -1) \in \mathbb{R}^n.$$

(d) O que é que pode concluir sobre o comportamento do Método de Newton a partir destas duas últimas alíneas?

NOTA: Se não conseguir responder a esta questão (alíneas a,b,c,d) na forma em que ela está colocada, resolva-a para $n = 5$.