**Matemática Computacional**

Métodos de Newton e da bissecção para equações unidimensionais

Ano lectivo 2000/2001 Folha 1

—◇—

1. Localize graficamente as soluções das equações

$$\ln(x-1) - 1/(x-1) = 0 \qquad \text{e} \qquad |x| - e^x = 0.$$

2. Mostre que a equação $x + 0.5 + 2\cos\pi x = 0$ possui uma e uma só solução no intervalo $[0.5, 1.0]$ e obtenha uma aproximação com erro absoluto inferior a $10^{-2}$ usando o método da bissecção.

3. Mostre que a equação $x^3 - x - 1 = 0$ possui uma e uma só solução no intervalo $[1, 2]$ e determine o número de iterações necessários para a aproximar com erro absoluto inferior a $10^{-4}$ pelo método da bissecção.

4. Considere a função $f(x) = \ln(4 - x^2) - x$. Localize graficamente as suas raízes reais e aproxime o valor da maior delas efectuando duas iterações do método de Newton.

5. Considere o problema de determinar uma solução $x^*$ da equação $x^2 - \alpha = 0$.

   (a) Deduza a expressão geral do método de Newton, exprimindo $x_{k+1}$ em função de $x_k$.

   (b) Para $\alpha > 0$, escreva $x_{k+1} - x_*$ em função de $x_k - x_*$.

   (c) Para $\alpha = 0$, escreva $x_{k+1} - x_*$ em função de $x_k - x_*$.

   (d) Como é que interpreta os resultados das alíneas (b) e (c) ?

   (e) Assuma que $\alpha = -1$. Calcule 7 iterações do método de Newton começando em $x_0 = 2$. Que conclui?

   (f) Para $\alpha > 0$, mostre que a sequência $\{x_k\}$ gerada pelo método de Newton converge sempre para uma raíz da equação $x^2 - \alpha = 0$ qualquer que seja $x_0 \neq 0$. Para que valores de $x_0$ é que o limite é $\sqrt{\alpha}$ ? E $-\sqrt{\alpha}$ ?

6. Considere a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

   Prove que $f$ é Lipschitz contínua mas não é diferenciável em $x = 0$.

7. Considere as hipóteses do teorema da convergência (local) quadrática do método de Newton:

   1. $f : ]a, b[ \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f'$ é contínua à Lipschitz em $]a, b[$ com constante $\gamma > 0$.
   2. Existe $x_* \in ]a, b[$ tal que $f(x_*) = 0$.
   3. $|f'(x)| \geq \rho > 0$, para todo o $x$ em $]a, b[$.

   Prove que a hipótese 3 pode ser substituída por

$$f'(x_*) \neq 0,$$

   sem que o resultado do teorema referido seja alterado.

8. Para cada uma das funções $f(x) = x$, $f(x) = x^2 + x$ e $f(x) = e^x - 1$, responda às seguintes questões:

   (a) Quanto vale a derivada de $f$ em $x_* = 0$ ?

   (b) Qual é uma constante de Lipschitz para $f'$ no intervalo $[a, b]$ (com $a < 0 < b$) ? Ou seja, qual é um limite superior para $(f(x) - f(y))/(x - y)$, com $x \neq y$, neste intervalo ?

   (c) Qual é o intervalo referido no teorema da convergência (local) quadrática do método de Newton a que $x_0$ tem que pertencer ?

9. Seja $f$ uma função real de variável real definida em $]a, b[$ tal que a segunda derivada é contínua em $]a, b[$. Seja ainda $x_* \in ]a, b[$ uma raíz da equação $f(x) = 0$ para a qual $f(x_*) = f'(x_*) = 0$ e $f''(x_*) \neq 0$.

   Assuma que a sequência $\{x_k\}$ gerada pelo método de Newton está bem definida (isto é que $f'(x_k) \neq 0$ para todo o $k$) e que converge para $x_*$. Prove que existe uma constante $\beta \in ]0, 1[$ tal que

   $$|x_{k+1} - x_*| \;\leq\; \beta |x_k - x_*|$$

   para $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande.

10. Explique como obter um valor aproximado para a distância mínima medida na vertical entre as curvas definidas por $y = e^x$ e $y = \ln(x)$, para $x > 0$.

11. Um avião em voo vertical descreve uma trajectória que, para $t \in [0, 1]$ dado em minutos, pode ser traduzida pela expressão

    $$h(t) = (t - 1)e^t - t + 3.$$

    (a) Aplicando o método de Newton duas vezes, calcule um valor aproximado do instante em que o avião esteve mais próximo do solo, no intervalo de tempo dado.

    (b) Determine a diferença máxima de altitude que o avião atinge no mesmo intervalo.

12. Efectue duas iterações do método de Newton modificado para obter uma aproximação da solução de $x^3 - x - 1 = 0$ no intervalo $[1, 2]$.

13. *em Exame-Modelo 96/97:*

    (a) Efectue duas iterações do Método da Bissecção para resolver a equação $x^2 - 2 = 0$, começando com $x_0 = 0$ e $z_0 = 3$. Será que este método alguma vez consegue determinar de forma exacta a raíz da equação ?

    (b) Compare, do ponto de vista da convergência local da resolução de uma equação não linear, os Métodos de Newton e da Bissecção. Em que situação é que tiraria partido das vantagens de ambos ?

14. *em Exame 23/7/97:*

    Considere a seguinte função real de variável real:

    $$f(x) \;=\; \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se } x \leq 0\,, \\ 1 - x^2 & \text{se } x > 0\,. \end{cases}$$

    (a) Calcule, se possível, duas iterações do Método de Newton para resolver a equação $f(x) = 0$, começando com $x_0 = -1$.

(b) Quais são os valores de $x_0$ para os quais o Método de Newton converge para uma raíz de $f$?

(c) Seja $\{x_k\}$ a sequência gerada pelo Método de Newton para $x_0 > 0$. Escreva $x_{k+1} - x_*$ em função de $x_k - x_*$ para $x_* = 1$ e $k \in \mathbb{N}$. A partir desta fórmula, deduza a convergência quadrática do Método de Newton aplicada a este exemplo.

15. *em Exame 21/7/98:*

Seja $f$ uma função real de variável real a satisfazer todas as condições do teorema da convergência local do Método de Newton aplicado a $f(x) = 0$.

(a) De que modo é que o valor da constante de Lipschitz de $f'$ influencia a taxa de convergência local do Método de Newton?

Considere agora as seguintes funções reais de variável real:

$$f_1(x) \; = \; x^2 - x \,, \qquad f_2(x) \; = \; 100x^2 - 100x \,.$$

(b) Calcule as constantes de Lipschitz de $f_1'$ e $f_2'$ em $\mathbb{R}$.

(c) Escreva, em ambos os casos, a fórmula do Método de Newton que permite calcular $x_{k+1}$ em função de $x_k$ $(k \in \mathbb{N})$.

(d) Porque é que o resultado das alíneas b) e c) não contradiz a resposta dada na alínea a)? (Considere a raíz $x_* = 1$.)

16. *em Exame 15/9/99:*

Considere a seguinte função real de variável real:

$$f(x) \; = \; \frac{e^x + e^{-x}}{2} - 2 \,.$$

(a) Esboce o gráfico de $f$.

(b) Considere também a equação não linear $f(x) = 0$. Efectue, se possível, uma iteração dos métodos

   i. de Newton, com $x_0 = 0$.

   ii. de secante, com $x_0 = 0$ e $x_1 = 1$.

(**NOTA:** Indique apenas os cálculos.) Que conclusões é que retira? Indique dois pontos iniciais para os quais não seria possível efectuar uma iteração do método de secante.

(c) Calcule a constante de Lipschitz de $f'$ no intervalo $[a, b]$ com $0 < a \leq b$.

(d) Considere a aplicação do método de Newton com $x_0 \in [a, b]$. Diga, justificando a sua resposta com o resultado da alínea anterior, para que valores de $a$ e de $b$ é que o método de Newton seria em princípio mais lento: $a = 5\,,\ b = 10$ ou $a = 500\,,\ b = 1000$?
(**NOTA:** Se não respondeu à alínea c, pode justificar a sua resposta através de argumentos geométricos.)