Exame de Matemática Computacional

(Eng. Informática)

Departamento de Matemática
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Universidade de Coimbra

10 de Julho de 2000 ——— Duração: 2h 30min

1. Considere uma matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ cujo polinómio característico é definido por

$$p(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 2.$$

   (a) Mostre que a matriz A tem três valores próprios reais distintos. (Sugestão: 1 e -1 são raízes de p)

   (b) Mostre que p' é contínua à Lipschitz em qualquer intervalo fechado e limitado $[a, b]$ e que p' não se anula em qualquer dos valores próprios de A.

   (c) Apresente a relação recursiva do método de Newton que define uma sucessão $\{\lambda_k\}$ que se espera vir a convergir para um dos valores próprios de A. Se convergência ocorrer de facto, será a taxa de convergência quadrática? Que quer isso dizer?

2. Considere a função $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + 2x_1x_2 - 3x_1 - x_2$$

   (a) Escreva a função f na forma matricial

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Q x + b^T x + c$$

   (b) Determine todos os pontos estacionários de f. Quais são extremos locais e porquê?

   (c) Sejam λ um valor próprio negativo da matriz Hessiana e $v \neq 0$ o respectivo valor próprio. Mostre que

$$\lim_{k\to\infty} f(kv) = -\infty.$$

   Que pode concluir sobre a existência de mínimo global para f?

3. Considere a função $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ introduzida na pergunta anterior.

   (a) Aproxime o mínimo valor de f efectuando uma iteração do método de Newton a partir de $x^0 = (0, 0)$.

   (b) Aproxime o mínimo valor de f efectuando uma iteração do método de Newton modificado a partir de $x^0 = (0, 0)$.

   (c) Para qual dos dois métodos (Newton e Newton modificado) existe a possibilidade de convergência, tendo em conta a propriedade invocada em 2(c)?

(vs.f.f.)

4. A resolução numérica da equação diferencial com condições iniciais:

$$y'' = f(x, y, y'), \quad x \in [-1, 1]$$
$$y'(-1) = 1, \quad y(-1) = 1$$

conduziu à construção dos seguintes valores tabelados para $y(x)$ e $y'(x)$:

x_i	$y(x_i)$	$y'(x_i)$
-1	1	1
0	2	0
1	3	1

(a) Determine o polinómio $P(x)$ de menor grau que interpola todos os valores tabelados.

(b) Verifique que $P(x_i) = y(x_i)$ e $P'(x_i) = y'(x_i)$, para $i = 1, 2, 3$.

(c) Aproxime o valor de $y'(0.5)$.

5. Considere o Problema de Valor Inicial

$$\begin{cases} y' = x^2 + \sin(y), \quad x \in [0, 1], \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

(a) Mostre que este PVI possui solução única $y(x)$.

(b) Aproxime $y(1)$ usando dois passos do método de Euler explícito.

(c) Mostre que o erro de truncatura para o método de Euler explícito é $T_{i+1} = y''(\eta_i)/n$, onde $\eta_i \in [i/n, (i+1)/n]$, para $i = 0, 1, \ldots, n-1$ (n é o número de passos).

(d) Determine n tal que o erro de truncatura para o método de Euler explícito seja inferior ou igual a 0.01, independentemente de i.